516
А-65

Проф. К. А. Андреевъ.

ОСНОВНОЙ КУРСЪ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

ВТОРОЕ ИЗДАНІЕ.

П О
А

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія Зильбербергъ (Рыбная—30).
1896.

2265

576
А-65

Проф. К. А. Андреевъ.

ОСНОВНОЙ КУРСЪ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

ВТОРОЕ ИЗДАНІЕ.

9265
проверено
1966 г.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія Зильбербергъ (Рыбная—30).
1896.

На основаніи ст. 41 § 1 п. 4 и ст. 138 унив. уст. печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Августа 17 дня 1896 г.

Ректоръ Императорскаго Харьковскаго Университета

М. Алексѣенко.

СОДЕРЖАНІЕ.

Глава седьмая. Эллипсъ.

Глава восьмая. Гипербола.

Глава девятая. Парабола.

Глава десятая. Коническія сѣченія и ихъ относительное расположеніе на плоскости.

Глава одиннадцатая. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ линіямъ второго порядка.

Часть вторая.

Геометрія въ пространствѣ.

Глава первая. Координаты и уравненія.

Глава вторая. Плоскость.

Глава третья. Прямая линія.

Глава четвертая. Общія свойства поверхностей второго порядка.

Глава пятая. Сфера.

Глава шестая. Центральныя поверхности.

Глава седьмая. Параболоиды.

Глава восьмая. Фокусы и фокальныя линіи.

Глава девятая. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ поверхностямъ второго порядка.

Предисловіе.

Первое изданіе настоящей книги давно разошлось, и потому, въ удовлетвореніе существующаго на нее спроса, мнѣ казалось не лишнимъ отпечатать ее вторымъ изданіемъ. Такъ какъ во все время съ появленія въ свѣтъ перваго изданія (въ 1887 г.) я не получалъ ни въ печати, ни въ личныхъ моихъ сношеніяхъ съ компетентными лицами никакихъ указаній на недостатки моего труда, то, приступая ко второму изданію, я долженъ былъ ограничиться лишь указаніями собственнаго опыта. Изъ личныхъ моихъ наблюденій я не могъ, однако, извлечь данныхъ для измѣненія содержанія книги въ существенномъ, а потому и ограничился одними редакціонными исправленіями, долженствующими, по моему мнѣнію, улучшить изложеніе нѣкоторыхъ мѣстъ и тѣмъ содѣйствовать увеличенію пригодности книги, какъ руководства.

Какъ при первоначальномъ составленіи этого руководства, такъ и при настоящихъ его исправленіяхъ я имѣлъ въ виду, какъ было сказано въ предисловіи къ 1-му изданію, дать точное и систематическое изложеніе того научнаго матеріала, знаніе котораго составляетъ основаніе изученія высшаго Математическаго Анализа и наукъ, именуемыхъ прикладными. Въ этомъ намѣреніи я старался выполнить, по возможности равномѣрно, двѣ слѣдующія главныя задачи. Во первыхъ, соединить въ достаточной полнотѣ необходимыя фактическія свѣдѣнія и, притомъ, такъ, чтобы они усваивались изъ книги съ возможно большею легкостью. Во вторыхъ, дать достаточно полное разъясненіе силы и значенія методовъ, какъ собственно аналитическаго, или метода коорди-

нат, такъ и находящагося съ нимъ въ тѣсной связи метода проективнаго. Этими цѣлями обусловливается самое наименованіе курса основнымъ.

Обѣщанный мною въ предисловіи къ первому изданію „Сборникъ упражненій" вышелъ въ свѣтъ въ 1892 году и, смѣю думать, можетъ принести свою долю пользы желающимъ болѣе прочнаго усвоенія предмета. Такъ какъ вопросы и задачи въ этомъ „Сборникѣ" расположены соотвѣтственно плану самого „Курса Аналитической Геометріи", а этотъ планъ безъ всякаго измѣненія сохраненъ и во второмъ изданіи „Курса", то значеніе „Сборника упражненій" по отношенію къ „Курсу" остается прежнее.

К. Андреевъ.

Харьковъ,
7-го Августа 1896 года.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

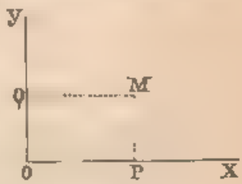
КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНІЯ.

§ 1. Прямолинейныя координаты.

1. Аналитическая Геометрія, будучи наукою о протяженіи въ самомъ широкомъ смыслѣ, характеризуется особеннымъ способомъ изслѣдованія, состоящимъ въ однообразномъ и методическомъ примѣненіи алгебраическаго анализа къ изученію формъ пространства. Основаніемъ этого способа служитъ понятіе о координатахъ, которое въ первоначальномъ, простѣйшемъ его видѣ и въ примѣненіи къ изученію формъ плоскихъ т. е. фигуръ, помѣщающихся на плоскости, можетъ быть составлено слѣдующимъ образомъ.

2. Положимъ, что мы имѣемъ на плоскости прямой уголъ XOY (фиг. 1), одну изъ сторонъ котораго, именно OX, будемъ предполагать горизонтальною.

Всякая точка M, имѣющая опредѣленное положеніе внутри этого угла, находится на опредѣленныхъ разстояніяхъ MP и MQ отъ его сторонъ. Всякое измѣненіе положенія точки M влечетъ за собою измѣненіе одного или обоихъ этихъ разстояній. Эти-то разстоянія и называются *координатами* точки M по отношенію къ сторонамъ угла XOY. Они могутъ быть измѣрены какою-нибудь единицею и, слѣдовательно, выражены опредѣленными числами. Пусть эти числа будутъ a и b.



Фиг. 1.

Если положеніе точки M неизвѣстно, то по даннымъ числовымъ величинамъ координатъ a и b оно можетъ быть найдено построеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно только на сторонѣ OX отложить длину OP, равную a единицъ, а на сторонѣ OY длину OQ, равную b единицъ, и затѣмъ чрезъ точки P и Q провести прямыя, параллельныя сторонамъ угла. Точка пересѣченія этихъ прямыхъ и будетъ M.

Итакъ, въ предположеніи, что единица извѣстна, числовыми значеніями a и b положеніе точки M внутри угла XOY опредѣляется вполнѣ.

3. Чтобы различать двѣ координаты точки M, имъ усвоиваются особыя названія. Координату a, которая представляетъ разстояніе точки M отъ стороны OY и, для построенія этой точки, отмѣривается по сторонѣ OX, называютъ *абсциссою*; а координату b, представляющую разстояніе точки M отъ горизонтальной стороны OX и отмѣриваемую по сторонѣ OY, называютъ *ординатою* [1]).

Неопредѣленную абсциссу принято обозначать буквою x, а неопредѣленную ординату буквою y. Вслѣдствіе этого, вмѣсто того, чтобы говорить, что абсцисса точки есть a, а ордината b, можно писать:

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b.$$

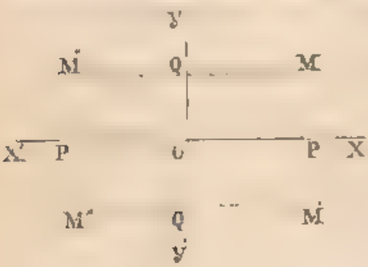
Прямыя OX и OY называются *осями координатъ*, при чемъ первая именуется *осью абсциссъ* или *осью иксовъ*, а вторая *осью ординатъ* или *осью игрековъ*. Точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ*.

Обѣ оси въ совокупности составляютъ *систему координатъ*.

При опредѣленіи положенія точки посредствомъ координатъ всегда предполагается, что положеніе самихъ осей координатъ дано или считается извѣстнымъ.

4. Оси координатъ, будучи продолжены неопредѣленно, образуютъ четыре угла: XOY, XOY', $X'OY$ и $X'OY'$ (фиг. 2). Сказанное выше объ опредѣленіи положенія точки внутри угла XOY примѣнимо и къ тремъ остальнымъ угламъ. Вслѣдствіе этого одними и тѣми-же числовыми величинами координатъ

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b$$



Фиг. 2.

опредѣляются на плоскости четыре точки M, M', M'', M''', по одной въ каждомъ углѣ. Всѣ эти точки находятся на разстояніи a единицъ отъ оси ординатъ и b единицъ отъ оси абсциссъ. Чтобы различать ихъ, координатамъ придаютъ вообще не числовое только, а алгебраическое значеніе, т. е. признаютъ ихъ величинами, могущими быть положительными или отрицательными, смотря по направленію измѣренія.

При этомъ принято абсциссы, отмѣриваемыя по оси x-овъ вправо, считать положительными, отмѣриваемыя же влѣво — отрицательными. Подобнымъ же образомъ ординаты, отмѣриваемыя по оси y-овъ кверху, считаются положительными, а внизъ — отрицательными.

---

[1]) Нужно замѣтить, однако, что условіе, чтобы одна изъ сторонъ угла была горизонтальною, не существенно необходимо и не всегда соблюдается, а потому и присвоеніе этихъ наименованій той или другой изъ сторонъ до нѣкоторой степени произвольно.

При такомъ условіи всѣ четыре точки M, M', M'', M''' будутъ имѣть разныя координаты, а именно:

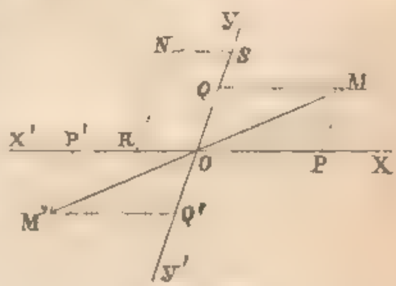
для точки M $x=+a$, $y=+b$,
для точки M' $x=+a$, $y=-b$,
для точки M'' $x=-a$, $y=+b$,
для точки M''' $x=-a$, $y=-b$.

Слѣдовательно, при такомъ условіи каждая точка плоскости характеризуется особыми, ей только принадлежащими, координатами; такъ что двумя координатами, данными алгебраически, т. е. со знаками $+$ или $-$, положеніе точки на плоскости опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Уголъ XOY, внутри котораго всѣ точки имѣютъ положительныя абсциссы и положительныя ординаты, называется *нормальнымъ*.

5. Указанное условіе считать разстоянія между точками за положительныя или отрицательныя, смотря по направленію ихъ измѣренія, имѣетъ въ Аналитической Геометріи всеобщее распространеніе и прилагается не только къ осямъ координатъ, но и ко всѣмъ другимъ прямолинейнымъ направленіямъ. Оно извѣстно подъ названіемъ *правила знаковъ*.

6. Мы предполагали до сихъ поръ, что оси координатъ OX и OY взаимно перпендикулярны и, слѣдовательно, всѣ четыре образуемые ими угла прямыя. Но это предположеніе не есть существенно необходимое. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что абсцисса точки M (фиг. 2) есть величина отрѣзка OP, отсѣкаемаго на оси x-овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси y-овъ, а ордината—величина отрѣзка OQ, отсѣкаемаго на оси y-овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси x-овъ. Такое воззрѣніе на координаты распространяется безъ всякаго измѣненія и на случай, когда оси не перпендикулярны между собою. Такъ на прилагаемомъ чертежѣ (фиг. 3), гдѣ нормальный уголъ XOY острый, координаты точки M суть:



Фиг. 3.

$$x=OP=QM \quad \text{и} \quad y=OQ=PM,$$

а координаты точки N суть:

$$x=OR=SN \quad \text{и} \quad y=OS=RN.$$

7. Разсмотрѣнный способъ опредѣлять положеніе точки на плоскости посредствомъ величинъ прямолинейныхъ отрѣзковъ называется способомъ прямолинейныхъ координатъ; при этомъ и самая система координатъ называется *прямолинейною*. Сверхъ того, если оси взаимно перпендикулярны, то система координатъ называется *прямоугольною*. Въ противномъ случаѣ она именуется *косоугольною*.

Прямолинейная система координатъ извѣстна также подъ названіемъ *Декартовой*, такъ какъ Декартъ первый далъ правила методическаго примѣненія этой системы къ изученію Геометріи и тѣмъ положилъ начало Аналитической Геометріи (въ 1637 г.).

8. При всякой прямолинейной системѣ координатъ всѣ точки, имѣющія равныя абсциссы, находятся на прямой, параллельной оси ординатъ, а всѣ точки, имѣющія равныя ординаты, на прямой, параллельной оси абсциссъ.

Слѣдовательно, условіе $x=a$, взятое въ отдѣльности, хотя и недостаточно для опредѣленія положенія точки на плоскости, тѣмъ не менѣе выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MP. Точно также условіе $y=b$ выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MQ. Понятно, что оба эти условія въ совокупности опредѣляютъ точку, принадлежащую обѣимъ прямымъ одновременно, т. е. единственную ихъ точку пересѣченія M.

Въ частности условіе $x=0$ опредѣляетъ ось y-овъ, а условіе $y=0$ ось x-овъ.

Координаты начала координатъ суть: $x=0$, $y=0$.

9. Если двѣ точки (какъ напримѣръ M и M'' въ фиг. 3) имѣютъ координаты, соотвѣтственно равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками, то онѣ расположены симметрично относительно начала координатъ, т. е. лежатъ на одной съ нимъ прямой и на равныхъ отъ него разстояніяхъ. Точно также и обратно, всякія двѣ точки, симметричныя относительно начала координатъ, имѣютъ координаты, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками. Въ этомъ легко убѣдиться изъ равенства треугольниковъ MOP и $M''OP'$.

10. Точка, которой координаты суть $x=a$ и $y=b$, называется сокращенно *точкою* (a, b). Она считается извѣстною или данною, какъ скоро извѣстны или даны величины a и b. Найти неизвѣстную точку (x, y) значитъ въ Аналитической Геометріи вычислить координаты x и y или, по крайней мѣрѣ, дать формулы, выражающія ихъ чрезъ величины извѣстныя.

Въ слѣдующихъ задачахъ координаты точекъ служатъ данными или искомыми.

11. *Даны двѣ точки* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2); *требуется найти разстояніе между ними.*

Предположимъ, что оси координатъ косоугольныя, и назовемъ чрезъ ω уголъ между ними. Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 4). Проведя прямыя M_1P_1 и M_2P_2 параллельно оси ординатъ и прямую M_1N параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть:

$$OP_1=x_1, \quad OP_2=x_2, \quad M_1P_1=y_1, \quad M_2P_2=y_2.$$

Изъ треугольника M_1NM_2 имѣемъ:

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_2N^2 - 2M_1N \cdot M_2N \cdot \cos M_1NM_2,$$

но

$$M_1N = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$$

и

$$M_2N = M_2P_2 - NP_2 = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1;$$

кромѣ того

$$\cos M_1NM_2 = -\cos\omega.$$

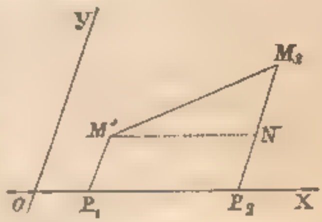
Поэтому, называя чрезъ d искомое разстояніе M_1M_2, будемъ имѣть:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega,$$

откуда

$$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega} \quad . \quad . \quad (1)$$

Это равенство и рѣшаетъ задачу, потому что во второй части находятся только данныя величины, по которымъ искомая длина d и можетъ быть вычислена. Двойной знакъ во второй части соотвѣтствуетъ двумъ различнымъ направленіямъ, которымъ можно слѣдовать при измѣреніи длины M_1M_2. Если по смыслу задачи нужно найти только абсолютную величину отрѣзка M_1M_2, то ясно, что знакъ — не долженъ имѣть мѣста.

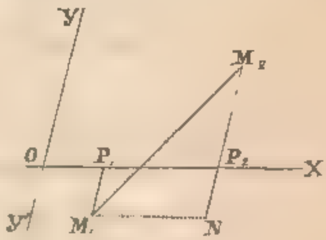


Фиг. 4.

12. Замѣтимъ, что формула (1) есть вполнѣ общая, т. е. справедливая при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ данныхъ точекъ на плоскости, если только подъ x_1, y_1, x_2, y_2 будемъ понимать (какъ это всегда дѣлается) алгебраическія значенія координатъ, т. е. со включеніемъ въ это обозначеніе и знака + или — соотвѣтственно положеніямъ точекъ.

Такъ напримѣръ, если положимъ, что точка M_2 находится внутри нормальнаго угла XOY, а точка M_1 внутри угла XOY' (фиг. 5), то будемъ имѣть:

$$M_2N = M_2P_2 + M_1P_1.$$



Фиг. 5.

Но, замѣчая, что алгебраическія значенія ординатъ y_1 и y_2 суть:

$$y_2 = + M_2P_2 \text{ и } y_1 = - M_1P_1,$$

будемъ имѣть, что въ этомъ случаѣ, какъ и въ предыдущемъ,

$$M_2N = y_2 - y_1.$$

13. Если оси координатъ прямоугольныя, то формула (1) принимаетъ слѣдующій болѣе простой видъ:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

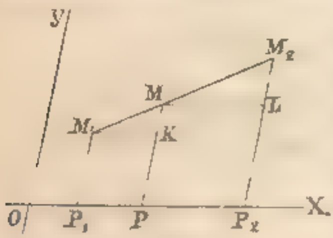
ибо въ этомъ случаѣ $\cos\omega = \cos 90^0 = 0$.

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $x_2=0$, $y_2=0$ и $x_1=x$, $y_1=y$, получимъ

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Это есть выраженіе разстоянія какой-нибудь точки (x, y) отъ начала координатъ.

14. *Даны двѣ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), требуется найти на прямой, ихъ соединяющей, точку (x, y), которой разстоянія отъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи $m:n$.*



Фиг 6.

Другими словами эта задача можетъ быть выражена такъ: *раздѣлить отрѣзокъ между двумя данными точками въ данномъ отношеніи.*

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки и M искомая (фиг. 6.). Проведя прямыя M_1P, M_2P_2 и MP параллельно оси ординатъ и прямыя M_1K и ML параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ M_1KM и MLM_2:

$$\frac{M_1K}{ML}=\frac{MK}{M_2L}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но

$$M_1K=P_1P=OP-OP_1=x-x_1,$$
$$ML=PP_2=OP_2-OP=x_2-x,$$
$$MK=MP-KP=MP-M_1P_1=y-y_1,$$
$$M_2L=M_2P_2-LP_2=M_2P_2-MP=y_2-y.$$

Поэтому, замѣчая, что по условію задачи должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m}{n},$$

получимъ два уравненія

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n},$$

изъ которыхъ находимъ

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу, потому что онѣ представляютъ выраженія искомыхъ координатъ чрезъ данныя координаты x_1, y_1, x_2, y_2 и данныя числа m и n. Онѣ одинаковы какъ для косоугольной, такъ и для прямоугольной системы координатъ, потому что въ нихъ вовсе не входитъ уголъ ω между осями координатъ.

15. Мы предполагали, что искомая точка M находится внутри отрѣзка M_1M_2, но смыслу задачи не противорѣчитъ и допущеніе, что точка M находится на продолженіи этого отрѣзка въ ту или другую

сторону. Дѣлая это допущеніе и повторяя предыдущія разсужденія примѣнительно къ фиг. 7-й, найдемъ:

$$\frac{M_1K}{LM}=\frac{MK}{LM_2}=\frac{M_1M}{M_2M}$$

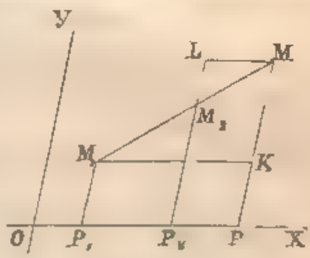
или

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$x=\frac{nx_1-mx_2}{n-m}, \qquad y=\frac{ny_1-my_2}{n-m} \; \ldots\ldots\ldots (5)$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что двумъ различнымъ предположеніямъ о положеніи искомой точки относительно данныхъ (внутри и внѣ отрѣзка M_1M_2) соотвѣтствуютъ различныя формулы, рѣшающія задачу. Легко показать, однако, что это различіе устраняется, если принять во вниманіе *правило знаковъ*.



Фиг. 7.

Въ самомъ дѣлѣ, когда точка M находится внутри отрѣзка M_1M_2, то отношеніе разстояній M_1M и MM_2, имѣющихъ одинаковое направленіе (отъ M_1 къ M и отъ M къ M_2), должно считаться положительнымъ; когда же точка M находится внѣ отрѣзка M_1M_2, то эти разстоянія имѣютъ разныя направленія и, слѣдовательно, отношеніе ихъ должно считаться отрицательнымъ. Отсюда видимъ, что въ двухъ этихъ случаяхъ данное отношеніе должно имѣть разные знаки, тогда какъ, выводя формулы (4) и (5), мы принимали во вниманіе только его ариѳметическое значеніе. Такимъ образомъ, видимъ, что, принимая во вниманіе правило знаковъ, мы должны во второмъ случаѣ отношеніе $\frac{m}{n}$ замѣнить чрезъ $-\frac{m}{n}$. Отъ этого формулы (5) сдѣлаются тождественными съ (4).

Итакъ, формулы (4) рѣшаютъ задачу во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, если только подъ обозначеніями m и n разумѣются величины алгебраическія со включеніемъ ихъ знаковъ.

10. Изъ сказаннаго видимъ также, что всякой величинѣ отношенія $\frac{m}{n}$ соотвѣтствуетъ единственное и опредѣленное положеніе точки M на прямой M_1M_2 внутри или внѣ отрѣзка M_1M_2, смотря по знаку этого отношенія, и обратно, всякому положенію точки M на этой прямой соотвѣтствуетъ особое алгебраическое значеніе отношенія $\frac{m}{n}$.

Если положимъ $\frac{m}{n} = 1$ или $m = n$, то будемъ имѣть $M_1M = MM_2$, т. е. M будетъ срединою отрѣзка M_1M_2. Въ этомъ случаѣ формулы (4) обращаются въ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Координаты средины отрѣзка суть, слѣдовательно, ариѳметическія средины координатъ концовъ его.

Если $\frac{m}{n} = -1$, то формулы (4) даютъ $x = \infty$, $y = \infty$. Точка, которой одна или обѣ координаты имѣютъ безконечно большія величины, называется *точкою безконечно удаленною*. По какую бы сторону отъ отрѣзка M_1M_2 ни находилась точка M, при безпредѣльномъ ея удаленіи отношеніе $\frac{M_1M}{MM_2}$ стремится къ одному и тому же предѣлу (-1). Поэтому принимаютъ, что на всякой прямой безконечно удаленная точка единственна.

§ 2. Преобразованіе координатъ.

17. Выборъ системы координатъ, относительно которой опредѣляется положеніе точки, въ большинствѣ случаевъ бываетъ произволенъ, но иногда, ради простоты изслѣдованій или другихъ цѣлей, бываетъ полезно одну систему координатъ, первоначально взятую замѣнить другою, опредѣленнымъ образомъ выбранною. При этомъ является вопросъ: *какъ по координатамъ точки относительно одной системы найти координаты той же точки относительно другой?*

Чтобы не смѣшивать двухъ системъ координатъ, о которыхъ при этомъ идетъ рѣчь, будемъ ту изъ нихъ, которая дана первоначально, называть *прежней*, а ту, къ которой требуется перейти,—*новой*. При этомъ координаты какой-нибудь точки M относительно прежней системы условимся обозначать чрезъ x и y, а координаты той же точки относительно новой системы чрезъ x' и y'.

Рѣшеніе названнаго вопроса должно, очевидно, состоять въ отысканіи формулъ, выражающихъ величины x и y чрезъ x' и y' или обратно.

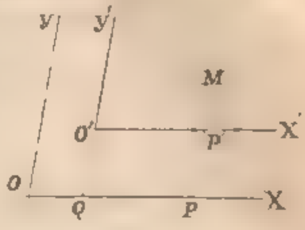
Замѣтимъ, что данными для опредѣленія однихъ координатъ по другимъ должны служить, кромѣ этихъ послѣднихъ координатъ, еще величины, опредѣляющія расположеніе одной системы координатъ по отношенію къ другой. Какія могутъ быть эти величины, мы сейчасъ увидимъ.

18. Разсмотримъ сперва два частные случая предложеннаго вопроса.

1-й случай.—*Обѣ системы имѣютъ одинаковое направленіе осей, но разныя начала.*

Пусть будетъ XOY (фиг. 8) прежняя система координатъ и $X'O'Y'$ — новая. По предположенію ось $O'X'$ параллельна OX и $O'Y'$ параллельна OY. Расположеніе новой системы относительно прежней будетъ, очевидно, вполнѣ опредѣлено, если даны координаты новаго начала относительно прежней системы. Пусть эти координаты будутъ

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b.$$



Фиг. 8

Проведя прямую $MP'P$ параллельно оси OY и обозначивъ чрезъ Q точку пересѣченія осей OX и $O'Y'$, будемъ имѣть:

$$OP=OQ+QP=OQ+O'P',$$
$$MP=P'P+MP'=O'Q+MP',$$

и такъ какъ

$$OP=x,\ MP=y,\ O'P'=x',\ MP'=y',\ OQ=a,\ O'Q=b,$$

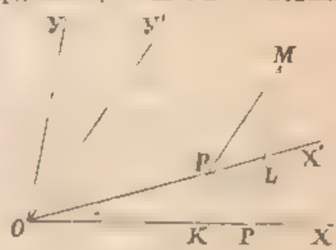
то получимъ

$$\left.\begin{matrix} x=a+x' \\ y=b+y' \end{matrix}\right\} \dots\dots\dots\dots \text{(1)}$$

Эти формулы и рѣшаютъ вопросъ въ настоящемъ частномъ случаѣ. Онѣ, очевидно, вполнѣ общія, т. е. имѣютъ мѣсто при всякихъ положеніяхъ какъ начала новой системы координатъ, такъ и данной точки M, если только подъ буквенными обозначеніями разумѣются алгебраическія значенія координатъ со включеніемъ знака $+$ или $-$. Кромѣ того эти формулы одинаковы какъ для косоугольныхъ, такъ и для прямоугольныхъ системъ координатъ.

19. 2-й случай.—*Обѣ системы координатъ имѣютъ общее начало, но разныя направленія осей.*

Пусть XOY будетъ прежняя система координатъ, а $X'OY'$ — новая. Расположеніе новой системы относительно прежней опредѣлится вполнѣ, если будутъ извѣстны углы, составляемые новыми осями съ прежними. Очевидно, что достаточно для этого дать только два угла, составляемые новыми осями съ одной изъ прежнихъ, напр. съ OX; кромѣ того должно предполагать извѣстнымъ уголъ XOY между прежними осями.



Фиг. 9.

Итакъ, пусть даны (фиг. 9):

$$\angle X'OX=\alpha,\ \angle Y'OX=\beta,\ \angle XOY=\omega.$$

Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ чертежа, будемъ имѣть:

$$\angle YOX'=\omega-\alpha,\ \angle YOY'=\omega-\beta.$$

Проведя чрезъ точку M прямыя MP и MP' параллельно осямъ OY и OY', будемъ имѣть:

$$OP = x,\ MP = y,\ OP' = x',\ MP' = y'.$$

Проведя кромѣ того чрезъ точку P' прямыя $P'L$ и $P'K$ параллельно прежнимъ осямъ OX и OY, будемъ имѣть, что въ треугольникѣ $OP'K$

$$\angle KOP' = \alpha,\ \angle OKP' = \pi - \omega,\ \angle OP'K = \omega - \alpha,$$

а въ треугольникѣ $P'ML$

$$\angle MP'L = \beta,\ \angle P'LM = \pi - \omega,\ \angle P'ML = \omega - \beta.$$

Вслѣдствіе этого изъ перваго треугольника получимъ:

$$\frac{P'K}{OP'} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi - \omega)} \quad \text{и} \quad \frac{OK}{OP'} = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\pi - \omega)},$$

откуда

$$P'K = x'\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} \quad \text{и} \quad OK = x'\frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}.$$

Изъ второго же треугольника найдемъ:

$$\frac{ML}{MP'} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - \omega)} \quad \text{и} \quad \frac{P'L}{MP'} = \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin(\pi - \omega)},$$

откуда

$$ML = y'\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \quad \text{и} \quad P'L = y'\frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}.$$

Но изъ чертежа видно, что

$$y = MP = P'K + ML,$$
$$x = OP = OK + P'L.$$

Подставивъ сюда найденныя выраженія для $P'K$, OK, ML и $P'L$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x'\sin\alpha - y'\sin\beta}{\sin\omega} \\ x &= \frac{x'\sin(\omega - \alpha) + y'\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Эти формулы и рѣшаютъ вопросъ въ настоящемъ частномъ случаѣ.

20. Хотя формулы (2) выведены для частнаго расположенія осей, изображеннаго на чертежѣ, но не трудно видѣть, что онѣ вполнѣ общія, т. е. имѣютъ мѣсто и при всякомъ другомъ расположеніи осей. Для этого замѣтимъ, что въ Аналитической Геометріи для угловыхъ величинъ соблюдается то же правило знаковъ, какъ и для прямолинейныхъ разстояній, при чемъ за положительное направленіе, которому слѣдуютъ при измѣреніи или отсчитываніи угла, принимается въ большинствѣ случаевъ направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки, а за отрицательное — совпадающее съ направленіемъ этого

движенія. Въ силу такого правила въ формулахъ (2) углы α и β могутъ имѣть различные знаки при различныхъ направленіяхъ осей. Но если условимся подъ буквеннымъ обозначеніемъ угловъ понимать ихъ алгебраическія значенія, т. е. со включеніемъ знаковъ $+$ или $-$, то отъ измѣненія направленія осей не будетъ измѣняться видъ формулъ (2). Эти формулы будутъ, слѣдовательно, справедливыми при всякомъ расположеніи осей.

21. Формулы (2) принимаютъ болѣе простой видъ, если одна или обѣ системы координатъ прямоугольныя. Такъ, если прежняя система координатъ прямоугольная, то $\sin\omega = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(\omega - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\omega - \beta) = \cos\beta$, и формулы (2) обращаются въ

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta \\ x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Если новая система прямоугольная, то $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ и, слѣдовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$, $\sin(\omega - \beta) = -\cos(\omega - \alpha)$, такъ что формулы (2) обращаются въ

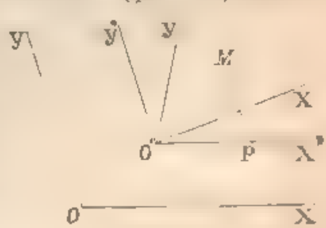
$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\omega} \\ x &= \frac{x'\sin(\omega-\alpha) - y'\cos(\omega-\alpha)}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Наконецъ, если обѣ системы прямоугольныя, то изъ послѣднихъ формулъ, полагая $\omega = \frac{\pi}{2}$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

22. Обратимся теперь къ самому общему случаю въ расположеніи системъ координатъ, т. е. къ тому случаю, когда *обѣ системы имѣютъ различныя начала координатъ и различныя направленія осей.*

Пусть прежнія оси будутъ XOY, а новыя $X'O'Y'$ (фиг. 10). Возьмемъ еще третью вспомогательную систему, которой начало совпадаетъ съ новымъ началомъ O' и которой оси $O'X''$, $O'Y''$ послѣдовательно параллельны осямъ OX и OY. Если назовемъ координаты точки M относительно этой системы чрезъ x'' и y'', то будемъ имѣть на основаніи формулъ (1)



Фиг. 10.

$$x = a + x'',$$
$$y = b + y''.$$

Для перехода же отъ вспомогательной системы $X''O'Y''$ къ новой $X'O'Y'$ будемъ имѣть по формуламъ (2) равенства:

$$x'' = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin\omega},$$

$$y'' = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\omega}.$$

Подставляя эти выраженія для x'' и y'' въ предыдущія равенства, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin\omega} + a \\ y &= \frac{x' \sin\alpha - y' \sin\beta}{\sin\omega} + b \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Это и будутъ такъ называемыя общія формулы преобразованія координатъ. Сокращенно мы можемъ ихъ представить въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} x &= mx' + ny' + a \\ y &= px' + qy' + b \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

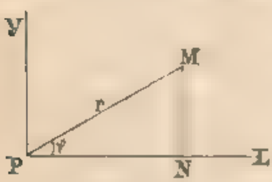
гдѣ, какъ видно изъ предыдущаго, величины m, n, p, q должны считаться извѣстными, ибо онѣ зависятъ опредѣленнымъ образомъ отъ угловыхъ величинъ, опредѣляющихъ расположеніе одной системы координатъ относительно другой.

Такимъ образомъ, видимъ, что при всякомъ преобразованіи прямолинейныхъ координатъ обѣ координаты точки относительно одной системы выражаются чрезъ координаты точки относительно другой *линейно*, т. е. многочленами первой степени.

§ 3. Полярныя координаты.

23. Способъ опредѣлять положеніе точки посредствомъ прямолинейныхъ координатъ не есть единственный, служащій для этой цѣли. Основываясь на одной и той же основной мысли, можно предложить безконечное множество подобныхъ способовъ. Наиболѣе употребительный, кромѣ изложеннаго, есть способъ координатъ полярныхъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Допустимъ, что намъ извѣстно положеніе на плоскости нѣкоторой точки P и нѣкоторой прямой PL, исходящей изъ этой точки въ опредѣленномъ направленіи (фиг. 11). Въ такомъ случаѣ положеніе всякой другой точки M будетъ опредѣляться вполнѣ посредствомъ разстоянія MP и угла MPL, ибо, какъ скоро извѣстны эти величины, точка M можетъ быть найдена построеніемъ. Слѣдовательно, эти двѣ величины можно считать координатами точки M въ такомъ же точно смыслѣ, какъ и координаты прямолинейныя. Ихъ-то и называютъ *полярными координатами*.



Фиг. 11.

Точка P и прямая PL, положенiе которыхъ предполагается извѣстнымъ напередъ, составляютъ *полярную систему координатъ*: изъ нихъ первая называется *полюсомъ* системы, а послѣдняя *полярною осью*.

Самымъ координатамъ усваиваются особыя наименованiя, а именно: разстоянiе MP точки M отъ полюса называется *радiусомъ векторомъ*, а уголъ радiуса вектора съ полярной осью—*амплитудою*. Условившись обозначать радiусъ векторъ буквою r, а амплитуду буквою φ, будемъ имѣть, что для точки M

$$r = MP, \quad \varphi = \angle MPL.$$

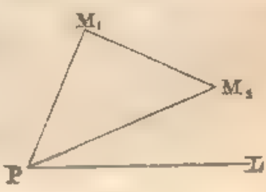
24. По отношенiю къ амплитудамъ различныхъ точекъ соблюдается упомянутое выше правило знаковъ, т. е. амплитуды, отсчитываемыя отъ полярной оси къ радiусу вектору въ направленiи обратномъ направленiю движенiя часовой стрѣлки, считаются положительными, а въ направленiи согласномъ этому движенiю—отрицательными. При этомъ можно ограничиться только положительными амплитудами, если условимся ихъ абсолютныя величины считать измѣняющимися отъ 0^0 до 360^0. Если же допускаются и отрицательныя амплитуды, то необходимо (во избѣжанiе неопредѣленности и недоразумѣнiй), чтобы ихъ абсолютныя величины не превышали 180^0. Что же касается радiуса вектора, то онъ дается обыкновенно только абсолютными размѣрами, ибо направленiе, въ которомъ его слѣдуетъ отмѣривать отъ полюса для построенiя точки M, уже достаточно опредѣляется амплитудою.

Изъ сказаннаго видимъ, что всѣ точки, имѣющiя одинаковые радiусы векторы, лежатъ на окружности, которой центръ находится въ полюсѣ. Всѣ точки, имѣющiя одинаковыя амплитуды, лежатъ на прямой (или лучѣ), исходящей изъ полюса въ опредѣленномъ направленiи. Полюсъ есть единственная точка, которая опредѣляется только однимъ условiемъ $r=0$.

Точка, которой полярныя координаты суть r и φ, называется сокращенною *точкою* (r,φ).

25. Рѣшимъ одну изъ задачъ, разсмотрѣнныхъ уже нами при употребленiи прямолинейныхъ координатъ.

Даны двѣ точки (r_1,φ_1) *и* (r_2,φ_2); *требуется найти разстоянiе между ними.*



Фиг. 12.

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 12). Изъ треугольника M_1PM_2 имѣемъ:

$$\overline{M_1M_2}^2 = PM_1^{\,2} + PM_2^{\,2} - 2.PM_1.PM_2.\cos M_1PM_2.$$

Но $\quad PM_1 = r_1,\ PM_2 = r_2$

и $\quad \angle M_1PM_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$

Поэтому, обозначая искомое разстоянiе M_1M_2 чрезъ d, будемъ имѣть:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

откуда $\quad d = \pm\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$

26. Зная полярныя координаты какой-нибудь точки, не трудно найти ея прямолинейныя координаты, или обратно. При этомъ расположеніе одной системы координатъ относительно другой должно считаться извѣстнымъ. Такъ какъ формулы для перехода отъ одной прямолинейной системы координатъ къ другой также прямолинейной нами уже найдены, то въ настоящемъ случаѣ достаточно найти формулы, связывающія полярныя координаты точки съ ея прямолинейными координатами относительно какой-нибудь произвольно взятой прямолинейной системы. Пусть эта послѣдняя система будетъ прямоугольная и притомъ такая, что положительное направленіе оси абсциссъ совпадаетъ съ полярною осью, а начало координатъ—съ полюсомъ.

Въ такомъ случаѣ изъ треугольника PMN (фиг. 11) получимъ:

$$PN = PM . \cos MPL \quad \text{и} \quad MN = PM . \sin MPL,$$

или

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Эти формулы выражаютъ прямолинейныя координаты чрезъ полярныя. Изъ нихъ же, или непосредственно изъ треугольника PMN, находимъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Эти формулы опредѣляютъ полярныя координаты чрезъ прямолинейныя.

На основаніи сказаннаго, формулами (2) и (3) рѣшается вполнѣ вопросъ о преобразованіи прямолинейныхъ координатъ въ полярныя или обратно.

§ 4. Линіи и уравненія.

27. Мы видѣли, что условія

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b,$$

взятыя въ совокупности, опредѣляютъ, по отношенію къ какой-либо прямолинейной системѣ координатъ, точку, и что каждое изъ нихъ въ отдѣльности выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости цѣлый непрерывный рядъ, т. е. опредѣляетъ нѣкоторую линію. Подобнымъ же образомъ два условія

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

по отношенію къ которымъ предыдущія условія суть только частные случаи, опредѣляютъ на плоскости нѣкоторую точку, ибо изъ нихъ мы находимъ для координатъ x и y значенія

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \qquad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'},$$

которымъ и соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе точки.

Если же одно изъ условій (1) будетъ взято въ отдѣльности отъ другого, то изъ него, какъ неопредѣленнаго уравненія, не опредѣлятся

координаты x и y. Тѣмъ не менѣе посредствомъ его устанавливается между этими координатами опредѣленная связь, въ силу которой всякому произвольному значенію одной изъ величинъ x и y будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе другой. И если одну изъ этихъ величинъ, напр. x, будемъ измѣнять непрерывно, то, въ силу той же связи, другая будетъ измѣняться также непрерывно. Отсюда слѣдуетъ, что и каждое изъ условій (1), въ отдѣльности взятое, выдѣляетъ на плоскости непрерывный рядъ точекъ или линію.

28. Это заключеніе справедливо не только для уравненій первой степени, каковы условія (1), но и для всякихъ другихъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Чтобы нагляднѣе убѣдиться въ этомъ, положимъ, что мы имѣемъ одно такое уравненіе:

$$f(x,y)=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

гдѣ знакъ f служитъ символическимъ обозначеніемъ какой-угодно аналитической зависимости, т. е совокупности какихъ бы то ни было дѣйствій надъ неизвѣстными x и y и надъ другими величинами, принимаемыми за извѣстныя.

Разсмотримъ сперва, какое значеніе имѣетъ совокупность двухъ условій:

$$f(x,y)=0 \quad \text{и} \quad x=a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

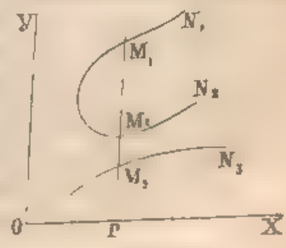
Вторымъ изъ этихъ условій дается непосредственно значеніе неизвѣстнаго x; другое же неизвѣстное y опредѣлится послѣ исключенія x изъ обоихъ условій. Результатъ этого исключенія будетъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$f(a,y)=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Такъ какъ изъ Алгебры извѣстно, что уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ, вообще говоря, нѣсколько рѣшеній (корней), то должно существовать нѣсколько значеній для y, удовлетворяющихъ уравненію (4). Пусть эти значенія будутъ:

$$y=b_1\,,\ y=b_2\,,\ y=b_3 \ . \ . \ . \ . \ .$$

Принимая во вниманіе, что каждому изъ этихъ значеній y соотвѣтствуетъ одно и то же значеніе x, именно $x=a$, заключаемъ, что совокупностью условій (3) опредѣляется нѣсколько точекъ, лежащихъ на прямой PM_1, параллельной оси OY (фиг. 13), и имѣющихъ ординатами $M_1P=b_1$, $M_2P=b_2$, $M_3P=b_3$ и т. д.



Фиг. 13.

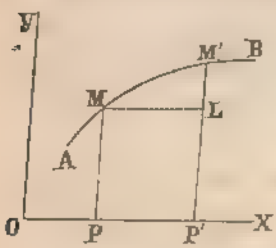
Если теперь вообразимъ, что величина a непрерывно измѣняется, то условіе $x=a$ будетъ представлять непрерывный рядъ прямыхъ, параллельныхъ оси OY, или, другими словами, непрерывное измѣненіе величины a въ уравненіи $x=a$ обусловливаетъ непрерывное перемѣщеніе прямой PM_1, выражаемой этимъ уравненіе-

емъ. Но, въ силу уравненія (4), такому измѣненію величины a будетъ соотвѣтствовать непрерывное же измѣненіе и всѣхъ опредѣляемыхъ изъ него значеній величины y. Это значитъ, что при перемѣщеніи прямой PM_1 каждая изъ точекъ M_1, M_2, M_3... будетъ также перемѣщаться, образуя непрерывный рядъ или описывая линію. Каждая изъ точекъ этихъ рядовъ будетъ имѣть координатами величины, удовлетворяющія первому изъ условій (3) или уравненію (2). Что же касается другого условія (3), т. е. уравненія $x = a$, то при допущеніи, что a есть величина измѣняющаяся, оно перестаетъ имѣть значеніе, т. е. оно не можетъ служить, какъ условіе для выдѣленія какихъ-либо точекъ плоскости. Слѣдовательно, всѣ точки рядовъ, описываемыхъ точками M_1, M_2, M_3..., выдѣляются посредствомъ только уравненія (2) или, другими словами, одно это уравненіе опредѣляетъ вполнѣ эти ряды

Ряды, образуемые точками M_1, M_2, M_3..., могутъ быть или совершенно отдѣльными одинъ отъ другого, какъ напр. на чертежѣ (фиг. 13) ряды M_2N_2 и M_3N_3, или непрерывно переходящими одинъ въ другой, какъ M_1N_1 и M_2N_2. Въ послѣднемъ случаѣ они являются только частями или вѣтвями одной и той же линіи. Впрочемъ и въ первомъ случаѣ болѣе подробное изученіе свойствъ линій обнаруживаетъ тѣсную связь между названными отдѣльными рядами точекъ, связь, въ силу которой ихъ также признаютъ вѣтвями одной и той же линіи. Принимая все это во вниманіе, мы убѣждаемся, что *всякое уравненіе съ двумя неизвѣстными опредѣляетъ на плоскости нѣкоторую линію.*

29. Постараемся теперь убѣдиться въ обратномъ.

Пусть дана на плоскости нѣкоторая непрерывная линія AB (фиг 14). Возьмемъ на ней какую-нибудь точку M, координаты которой будутъ



Фиг. 14.

$OP = x$ и $MP = y$. Если одну изъ этихъ координатъ, напр. абсциссу, измѣнимъ на произвольную величину PP', то такому измѣненію будетъ соотвѣтствовать измѣненіе ординаты на величину вполнѣ опредѣленную LM'. Слѣдовательно, посредствомъ линіи AB устанавливается между величинами x и y такая зависимость, что произвольное измѣненіе одной изъ этихъ величинъ влечетъ за собою опредѣленное измѣненіе другой, и, при непрерывности линіи AB, эта зависимость будетъ также обладать свойствомъ непрерывности [1]) Такого рода зависимость называется аналитическою и можетъ быть выражена такъ:

$$y = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[1]) Свойство это состоитъ въ томъ, что, при достаточно маломъ измѣненіи одной изъ двухъ зависящихъ другъ отъ друга величинъ, измѣненіе другой можетъ быть сколь угодно малымъ.

гдѣ знакъ F означаетъ совокупность дѣйствій надъ x и другими величинами, принимаемыми за извѣстныя.

Послѣднее равенство равнозначуще съ равенствомъ

$$f(x, y) = 0,$$

къ которому оно приводится посредствомъ простыхъ алгебраическихъ дѣйствій, и такъ какъ это есть общій видъ уравненія съ двумя неизвѣстными, то и заключаемъ, что *всякая линія на плоскости выражается однимъ уравненіемъ съ двумя неизвѣстными.*

30. Во всякомъ уравненіи, выражающемъ какую-либо линію, величины x и y суть перемѣнныя, а потому ихъ называютъ измѣняющимися или текущими координатами линіи, въ отличіе отъ координатъ опредѣленныхъ точекъ, которыя суть величины постоянныя.

Если двѣ перемѣнныя величины связаны между собою такъ, что одну мы можемъ измѣнять произвольно, а другая измѣняется при этомъ лишь въ зависимости отъ измѣненій первой, то первую принято въ математикѣ называть *независимою перемѣнною,* а вторую ея *функціею.* Употребляя это наименованіе, можно сказать, что изъ двухъ перемѣнныхъ координатъ какой-либо линіи одна есть функція другой. Это именно и выражено символически уравненіемъ (5).

Хотя во всемъ сказанномъ выше мы имѣли въ виду только прямолинейныя координаты, но легко понять, что тѣ же разсужденія примѣнимы и ко всякой другой системѣ координатъ. Такъ, очевидно, что всякое уравненіе

$$f(r, \varphi) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

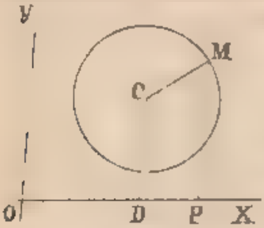
въ которомъ r и φ суть полярныя координаты, выражаетъ линію, и обратно, всякая линія выражается по отношенію къ какой-либо полярной системѣ координатъ уравненіемъ вида (6).

31. Возможность выражать всякую линію уравненіемъ даетъ средство къ самому широкому примѣненію алгебраическаго анализа къ изученію какъ самихъ линій, такъ и всякихъ ихъ сочетаній или фигуръ.

Въ самомъ дѣлѣ, между линіей и выражающимъ ее уравненіемъ, очевидно, должна существовать тѣсная связь, такъ что всякая особенность уравненія должна имѣть свое истолкованіе въ свойствахъ линіи, и обратно. Вслѣдствіе этого изученіе линій и, слѣдовательно, фигуръ, а съ тѣмъ вмѣстѣ и Геометріи вообще, сводится на изученіе уравненій въ связи съ установленіемъ общихъ правилъ для такого истолкованія.

Если линія опредѣляется геометрически, то первымъ шагомъ для ея изученія должно быть нахожденіе, на основаніи этого геометрическаго опредѣленія, ея опредѣленія аналитическаго, т. е. уравненія.

Возьмемъ для примѣра кругъ. Эта линія опредѣляется геометрически, какъ такая, всѣ точки которой находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ одной и той же точки, называемой центромъ. Обозначимъ чрезъ r абсолютную величину радіуса, чрезъ α и β координаты центра C, а чрезъ x и y координаты какой-нибудь точки M на окружности относительно нѣкоторой прямолинейной системы (фиг. 15). Въ силу геометрическаго опредѣленія круга, между величинами этими должно имѣть мѣсто соотношеніе:



Фиг. 15.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega}=r\,,$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2\,, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ. Такъ какъ этому соотношенію удовлетворяютъ координаты всякой точки окружности и не удовлетворяютъ координаты точекъ, лежащихъ внутри или внѣ круга, то оно и будетъ уравненіемъ круга.

Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ уравненіе круга будетъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\,,$$

и оно обращается въ

$$x^2+y^2=r^2\,,$$

когда начало координатъ находится въ центрѣ круга.

32. Наиболѣе общую задачу Аналитической Геометріи составляетъ такое изученіе линій, въ которомъ за исходный пунктъ принимается не геометрическое ихъ опредѣленіе, а самый общій видъ выражающихъ ихъ уравненій. Чтобы это изученіе было систематическое, линіи подраздѣляются или классифицируются на основаніи признаковъ, характеризующихъ самыя уравненія. Такъ, прежде всего линіи раздѣляются на *алгебраическія* и *трансцендентныя*.

Алгебраическою называется всякая линія, которая относительно прямолинейныхъ системъ координатъ выражается алгебраическимъ уравненіемъ. Другими словами, алгебраическая линія есть такая, для которой общая зависимость между прямолинейными координатами любой ея точки выражается совокупностью однихъ только алгебраическихъ дѣйствій надъ ними. Если же эта зависимость не можетъ быть выражена одними только алгебраическими дѣйствіями, повторенными въ конечномъ числѣ, то какъ уравненіе, выражающее линію, такъ и самая линія называются трансцендентными.

Къ числу зависимостей, не выражающихся алгебраическими дѣйствіями, принадлежатъ, напримѣръ, зависимости между угломъ и его

синусомъ, между степенью и ея показателемъ и т. д. Вслѣдствие этого линіи, выражаемыя уравненіями:

$$y = \sin x \quad \text{или} \quad y = a^x,$$

суть трансцендентныя.

Во всякомъ алгебраическомъ уравненіи, при помощи алгебраическихъ же дѣйствій надъ его обѣими частями, могутъ быть уничтожены дѣлители и радикалы, вслѣдствіе чего уравненіе это приводится къ такому виду

$$f(x, y) = 0,$$

въ которомъ первая часть есть такъ называемая цѣлая функція, т. е. алгебраическій многочленъ съ двумя неизвѣстными. Смотря по степени или измѣренію этого многочлена, линіи раздѣляются на порядки. Такъ, алгебраическая линія будетъ 1-го, 2-го и т. д. порядка, когда въ выражающемъ ее уравненіи $f(x, y) = 0$ первая часть будетъ многочленъ 1-й, 2-й и т. д. степени.

Обративъ вниманіе на уравненіе (7), убѣждаемся, что кругъ есть алгебраическая линія второго порядка.

33. Одна и та же линія выражается, вообще говоря, различными уравненіями, смотря по тому, относительно какой системы координатъ мы ее разсматриваемъ. Поэтому является вопросъ: какъ, зная уравненіе линіи относительно одной системы координатъ, найти ея уравненіе относительной другой?

Такъ какъ искомое или новое уравненіе есть аналитическое выраженіе зависимости, которая существуетъ между новыми координатами каждой точки линіи, то, для нахожденія этого новаго уравненія, нужно только въ прежнее уравненіе $f(x, y) = 0$ подставить на мѣсто перемѣнныхъ x и y ихъ выраженія изъ формулъ для преобразованія координатъ.

Если какъ прежняя, такъ и новая системы координатъ — прямолинейныя, то эти выраженія суть линейныя. Вслѣдствіе этого отъ внесенія ихъ на мѣсто x и y въ многочленъ $f(x, y)$ послѣдній преобразуется въ новый многочленъ $F(x, y)$, степень котораго не можетъ быть выше степени прежняго. Слѣдовательно, отъ преобразованія прямолинейныхъ координатъ степень уравненія линіи не можетъ повыситься. Отсюда слѣдуетъ также, что она не можетъ и понизиться, ибо въ противномъ случаѣ обратное преобразованіе координатъ, т. е. переходъ отъ новой системы къ прежней, приводило бы къ повышенію степени.

Линія, разсматриваемая по отношенію къ какой-нибудь системѣ координатъ, называется *отнесенною* къ этой системѣ. Употребляя для краткости этотъ терминъ, можно сказать на основаніи предыдущаго, что *степень уравненія всякой алгебраической линіи остается одна и та же, къ какой бы прямолинейной системѣ координатъ эта линія ни была отнесена.*

Порядокъ линіи представляетъ, слѣдовательно, такую ея особенность, которая не зависитъ отъ выбора осей координатъ и лежитъ, такъ сказать, въ самой природѣ линіи.

34. Если въ алгебраическомъ уравненіи $f(x,y)=0$ многочленъ, составляющій первую часть, есть произведеніе двухъ многочленовъ низшихъ степеней, то уравненіе это выражаетъ совокупность двухъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$f(x,y)=\varphi(x,y)\cdot\psi(x,y),$$

будемъ имѣть, что уравненіе $f(x,y)=0$ удовлетворяется всѣми тѣми точками, которыя удовлетворяютъ каждому изъ уравненій $\varphi(x,y)=0$ и $\psi(x,y)=0$ въ отдѣльности. Слѣдовательно, первое уравненіе выражаетъ не что иное, какъ совмѣстно взятыя двѣ линіи, выражаемыя двумя послѣдними уравненіями.

Сказанное распространяется, очевидно, и на тотъ случай, когда первая часть уравненія разлагается на большее число множителей, изъ которыхъ каждый есть цѣлый многочленъ.

Если же одинъ изъ множителей многочлена $f(x,y)$ есть постоянный, т. е. вовсе не зависящій отъ перемѣнныхъ координатъ x и y, то его можно откинуть, не измѣняя значенія уравненія. Дѣйствительно, при условіи

$$f(x,y)=M\cdot f'(x,y)$$

всѣ значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одному изъ уравненій

$$f(x,y)=0 \qquad \text{и} \qquad f'(x,y)=0,$$

должны удовлетворять и другому. Оба эти уравненія выражаютъ, слѣдовательно, одну и ту же линію.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что обѣ части всякаго уравненія можно умножать или дѣлить на постоянныя количества, не измѣняя этимъ геометрическаго значенія уравненія.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ОПРЕДѢЛИТЕЛИ.

§ 1. Основныя свойства опредѣлителей.

35. Положимъ, что мы имѣемъ n^2 какихъ-нибудь количествъ, расположенныхъ въ таблицу, состоящую изъ n строкъ и n столбцовъ. Чтобы изъ самаго обозначенія этихъ количествъ видно было, какое мѣсто каждое изъ нихъ занимаетъ въ таблицѣ, будемъ означать количества, находящіяся въ одномъ столбцѣ, одною и тою же буквою съ присоединеніемъ только различныхъ указателей, послѣдовательность которыхъ соотвѣтствуетъ послѣдовательности строкъ. Разсматриваемая таблица количествъ будетъ, слѣдовательно, имѣть такой видъ:

$$\left.\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots & u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & u_n \end{matrix}\right\} .$$

Выберемъ изъ всѣхъ этихъ количествъ группу n такихъ, между которыми не было бы принадлежащихъ одной и той же строкѣ или одному и тому же столбцу. Такихъ группъ можетъ быть, очевидно, нѣсколько. Одну изъ нихъ, именно группу

$$a_1, \; b_2, \; c_3, \ldots u_n,$$

состоящую изъ количествъ, расположенныхъ по діагонали таблицы, мы будемъ называть *главною*. Всѣ остальныя группы получатся изъ главной, если, сохраняя въ ней порядокъ буквъ, произведемъ всѣ возможныя перемѣщенія указателей, или, сохраняя порядокъ указателей, подвергнемъ всевозможнымъ перемѣщеніямъ буквы. Число группъ будетъ, слѣдовательно,

$$1.2.3\ldots n.$$

36. Перемножая количества, составляющія каждую такую группу, составимъ изъ произведеній алгебраическую сумму такъ, чтобы главный членъ ея

$$a_1b_2c_3\ldots u_n,$$

равно какъ всѣ тѣ, которые получаются изъ него посредствомъ четнаго числа взаимныхъ перестановокъ указателей, были взяты со знакомъ $+$, а тѣ члены, которые получаются изъ главнаго чрезъ нечетное число такихъ перестановокъ, со знакомъ $-$.

Составленное такимъ образомъ алгебраическое выраженіе разсматриваемыхъ количествъ называется *опредѣлителемъ* или *детерминантомъ*; самыя же количества его *элементами*. Произведенія элементовъ, составляющія слагаемыя опредѣлителя, суть его *члены*. Число n называется *порядкомъ* опредѣлителя.

37. Въ тѣхъ случаяхъ, когда должны быть указаны всѣ элементы, опредѣлитель принято обозначать такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots u_n \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Сокращенно же можно употреблять слѣдующее обозначеніе:

$$\sum \pm a_1b_2c_3\ldots u_n.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что опредѣлитель второго порядка есть разность двухъ произведеній:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \sum \pm a_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Опредѣлитель 3-го порядка есть алгебраическая сумма шести произведеній:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \sum \pm a_1b_2c_3 =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Въ частности:

$$\begin{vmatrix} 3, & -7 \\ 1, & 5 \end{vmatrix} = 3.5 + 1.7 = 22;$$

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -5, & 4, & 0 \\ 0, & -7, & 1 \end{vmatrix} = 8 + 105 - 5 = 108.$$

38. Прямыми слѣдствіями даннаго способа составленія опредѣлителей изъ элементовъ являются слѣдующія ихъ свойства.

1) Величина опредѣлителя не мѣняется, если строки будутъ замѣнены столбцами и обратно, при сохраненіи послѣдовательности тѣхъ и другихъ, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots u_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots a_n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots b_n \\ c_1, & c_2, & c_3, & \ldots c_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u_1, & u_2, & u_3, & \ldots u_n \end{vmatrix}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, группы элементовъ, изъ которыхъ составляются слагаемыя для обоихъ опредѣлителей, очевидно, однѣ и тѣ же, а потому члены этихъ опредѣлителей соотвѣтственно равны по абсолютнымъ величинамъ. Замѣчая же, что оба опредѣлителя имѣютъ одинъ и тотъ же главный членъ,

$$a_1b_2c_3\ldots u_n,$$

заключаемъ, что и знаки у равныхъ членовъ должны быть одинаковые.

2) Опредѣлитель измѣняетъ знакъ, сохраняя абсолютную величину, если два какіе-нибудь столбца будутъ перемѣщены одинъ на мѣсто другого. Такъ напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots u_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots u_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1, & a_1, & c_1, & \ldots u_n \\ b_2, & a_2, & c_2, & \ldots u_n \\ b_3, & a_3, & c_3, & \ldots u_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_n, & a_n, & c_n, & \ldots u_n \end{vmatrix}.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что слагаемыя новаго опредѣлителя, по абсолютнымъ величинамъ, суть тѣ же самыя произведенія, какъ и въ данномъ опредѣлителѣ, но тотъ членъ, который въ новомъ опредѣлителѣ есть главный и, слѣдовательно, берется со знакомъ $+$, получается изъ главнаго члена даннаго опредѣлителя только одной перестановкой двухъ буквъ, вслѣдствіе чего равный ему членъ даннаго опредѣлителя имѣетъ знакъ обратный. Отсюда же слѣдуетъ, что и остальные члены обоихъ опредѣлителей, какъ получающіеся изъ главныхъ однимъ и тѣмъ же способомъ, должны, при равныхъ абсолютныхъ величинахъ, различаться знаками.

3) Опредѣлитель равняется нулю, если въ немъ элементы двухъ какихъ-нибудь столбцовъ послѣдовательно равны между собою. Такъ напр.:

$$\left|\begin{array}{l} a_1, b_1, c_1, \ldots u_1 \\ a_2, b_2, c_2, \ldots u_2 \\ a_3, b_3, c_3, \ldots u_3 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_n, b_n, c_n, \ldots u_n \end{array}\right| = 0,$$

если

$$a_1 = c_1, \; a_2 = c_2, \; a_3 = c_3, \ldots a_n = c_n.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что при такомъ условіи отъ перемѣщенія одинаковыхъ столбцовъ одного на мѣсто другого опредѣлитель вовсе не долженъ мѣняться и въ то же время, на основаніи предыдущаго свойства, онъ долженъ мѣнять свой знакъ.

39. Изъ способа составленія опредѣлителей видно, что во всякомъ опредѣлителѣ существуетъ по нѣсколько членовъ, содержащихъ множителемъ одинъ изъ элементовъ перваго столбца, и не можетъ быть членовъ, въ которые не входилъ бы множителемъ ни одинъ изъ элементовъ этого столбца. Отсюда слѣдуетъ, что опредѣлитель (1) можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ldots + a_n A_n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Представленный въ такомъ видѣ, опредѣлитель (1) называется *разложеннымъ по элементамъ перваго столбца.*

Понятно, что тотъ же опредѣлитель можетъ быть разложенъ по элементамъ всякаго другого столбца или какой-угодно строки. Такъ, разлагая опредѣлитель (1) по элементамъ 3-го столбца, представимъ его въ видѣ суммы

$$c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 + \ldots - c_n C_n,$$

а разлагая по элементамъ 1-ой строки,—въ видѣ суммы

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \ldots + u_1 U \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Во всѣхъ этихъ разложеніяхъ множитель, на который умножается какой-либо элементъ разсматриваемаго столбца или разсматриваемой строки, мы будемъ обозначать тою же буквою (во большою) и съ тѣмъ же указателемъ, какъ и самый элементъ.

Изъ возможности указаннаго разложенія обнаруживаются еще слѣдующія свойства опредѣлителей.

1) Если всѣ элементы одного изъ столбцовъ или одной изъ строкъ суть нули, то и самый опредѣлитель равенъ нулю.

2) Если всѣ элементы одного изъ столбцовъ или одной изъ строкъ будутъ помножены на какую-нибудь величину, то чрезъ это и опредѣлитель помножается на ту-же величину.

3) Величина опредѣлителя не мѣняется, если къ элементамъ какого-нибудь столбца будутъ прибавлены количества, пропорціональныя соотвѣтствующимъ элементамъ другого столбца. То-же самое и относительно строкъ.

40. Произведеніе a_1A_1 въ разложеніи (2) или (3) есть алгебраическая сумма всѣхъ тѣхъ членовъ даннаго опредѣлителя, которые содержатъ множителемъ элементъ a_1. Такъ какъ всѣ эти члены получаются изъ главнаго

$$a_1b_2c_3\ldots u_n$$

посредствомъ всевозможныхъ перемѣщеній всѣхъ буквъ, кромѣ a, то ясно, что множитель A_1 составляется, по общему правилу для составленія опредѣлителей, изъ элементовъ даннаго опредѣлителя, за исключеніемъ расположенныхъ въ первомъ столбцѣ и въ первой строкѣ. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & \ldots & u_2 \\ b_3, & c_3, & \ldots & u_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_n, & c_n, & \ldots & u_n \end{vmatrix}$$

Опредѣлитель, который получается изъ даннаго опредѣлителя, когда въ немъ будетъ выкинутъ какой-нибудь столбецъ и какая-нибудь строка, называется его *подчиненнымъ опредѣлителемъ* или *миноромъ*. Очевидно, что число миноровъ даннаго опредѣлителя равняется числу его элементовъ, т. е. n^2, такъ какъ каждому элементу соотвѣтствуетъ особый миноръ, получающійся исключеніемъ того столбца и той строки, которымъ этотъ элементъ принадлежитъ.

Множитель A_1 при элементѣ a_1 есть, слѣдовательно, опредѣлитель миноръ соотвѣтствующій этому элементу.

Чтобы найти значеніе множителя A_k, гдѣ k какое-угодно число, перенесемъ въ опредѣлителѣ (1) k-ую строку на мѣсто первой. Такъ какъ, это перенесеніе можно произвести посредствомъ $(k-1)$ послѣдовательныхъ перестановокъ k-ой строки съ каждой изъ предшествующихъ, а при каждой изъ такихъ перестановокъ мѣняется знакъ опредѣлителя, то, очевидно, будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} a_k, & b_k, & c_k, & \ldots & u_k \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & u_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & u_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k-1}(a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_kA_k + \ldots + a_nA_n).$$

Отсюда убѣждаемся соотвѣтственно съ предыдущимъ, что

$$A_k = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} b_1 , & c_1 , & \dots u_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} , & c_{k-1} , & \dots u_{k-1} \\ b_{k+1} , & c_{k+1} , & \dots u_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n , & c_n , & \dots u_n \end{vmatrix}.$$

Принимая во вниманіе, что сказанное о строкахъ должно быть справедливо и для столбцовъ и обратно, приходимъ къ слѣдующему общему заключенію:

Въ разложеніи опредѣлителя по элементамъ какого-нибудь столбца или какой-нибудь строки каждый элементъ умножается на соотвѣтствующій ему опредѣлитель миноръ, причемъ послѣдній берется со знакомъ $+$, когда сумма чиселъ, означающихъ порядки строки и столбца, которымъ принадлежитъ этотъ элементъ, будетъ числомъ четнымъ, и со знакомъ $-$ въ противномъ случаѣ.

§ 2. Рѣшеніе системъ линейныхъ уравненій.

41. Приложимъ сказанное къ выводу общихъ формулъ для рѣшенія совмѣстныхъ уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

Пусть мы имѣемъ слѣдующую систему n такихъ уравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + u_1t = v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + u_2t = v_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots + u_3t = v_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \dots + u_nt = v_n \end{array}\right\} \dots\dots\dots (1)$$

Обозначимъ чрезъ $\triangle$ опредѣлитель, составленный изъ n^2 коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, т. е. положимъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 , & b_1 , & c_1 , & \dots u_1 \\ a_2 , & b_2 , & c_2 , & \dots u_2 \\ a_3 , & b_3 , & c_3 , & \dots u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n , & b_n , & c_n , & \dots u_n \end{vmatrix} = \triangle .$$

Разлагая этотъ опредѣлитель по элементамъ 1-го столбца, будемъ имѣть:

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\ldots+a_nA_n=\triangle.$$

Кромѣ того должно быть:

$$\begin{aligned}b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+\ldots+b_nA_n&=0,\\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3+\ldots+c_nA_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_1A_1+u_2A_2+u_3A_3+\ldots+u_nA_n&=0,\end{aligned}$$

такъ какъ здѣсь первыя части суть такіе опредѣлители, въ которыхъ два столбца имѣютъ одинаковые элементы.

На этомъ основаніи, помножая данныя уравненія послѣдовательно на A_1, A_2, A_3, $\ldots A_n$ и складывая ихъ почленно, получимъ:

$$\triangle x=v_1A_1+v_2A_2+v_3A_3+\ldots+v_nA_n,$$

откуда

$$x=\frac{v_1A_1+v_2A_2+v_3A_3+\ldots+v_nA_n}{\triangle}=\frac{M_x}{\triangle}.$$

Здѣсь M_x есть, очевидно, такой опредѣлитель, который получимъ, замѣнивъ въ опредѣлителѣ $\triangle$ элементы перваго столбца соотвѣтственными постоянными членами данныхъ уравненій.

42. Такимъ же точно образомъ, разлагая опредѣлитель $\triangle$ по элементамъ 2-го столбца, будемъ имѣть:

$$b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+\ldots+b_nB_n=\triangle,$$

и въ то же время

$$\begin{aligned}a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3+\ldots+a_nB_n&=0,\\ c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3+\ldots+c_nB_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_1B_1+u_2B_2+u_3B_3+\ldots+u_nB_n&=0;\end{aligned}$$

поэтому, сложивши почленно данныя уравненія, помноженныя послѣдовательно на B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$, получимъ

$$\triangle y=v_1B_1+v_2B_2+v_3B_3+\ldots+v_nB_n$$

и, слѣдовательно,

$$y=\frac{v_1B_1+v_2B_2+v_3B_3+\ldots+v_nB_n}{\triangle}=\frac{M_y}{\triangle},$$

гдѣ M_y есть результатъ замѣны въ опредѣлителѣ $\triangle$ элементовъ второго столбца вторыми частями данныхъ уравненій.

Точно также получатся выраженія и для остальныхъ неизвѣстныхъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что каждое неизвѣстное въ системѣ n уравненій первой степени съ n неизвѣстными выражается отношеніемъ, въ которомъ послѣдующій членъ есть опредѣлитель, составленный изъ

коэффиціентовъ этихъ уравненій, а предыдущій получается, какъ результатъ замѣны въ этомъ опредѣлителѣ коэффиціентовъ при опредѣляемомъ неизвѣстномъ соотвѣтствующими постоянными членами.

43. Полагая въ уравненіяхъ (1)

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0,$$

будемъ имѣть систему n однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + u_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + u_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + u_3t = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + u_nt = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ опредѣлители M_x, M_y, ... M_t должны равняться нулю, то изъ предыдущихъ выраженій для неизвѣстныхъ x, y, ... будемъ имѣть:

$$\triangle x = \triangle y = \triangle z = \ldots = \triangle t = 0.$$

Это показываетъ, что разсматриваемая система уравненій (2) только тогда удовлетворяется значеніями неизвѣстныхъ, не равными одновременно нулю, когда опредѣлитель $\triangle$ равняется нулю. Равенство

$$\triangle = 0$$

есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ уравненія (2) совмѣстимы, т. е. удовлетворяются всѣ одними и тѣми же величинами неизвѣстныхъ.

Ясно, однако, что, какими бы значеніями неизвѣстныхъ ни удовлетворялось какое-нибудь изъ этихъ уравненій, оно будетъ удовлетворяться и произведеніями этихъ значеній на одну и ту же произвольную величину.

Изъ однородныхъ уравненій не опредѣляются, слѣдовательно, самыя неизвѣстныя, и могутъ быть найдены только отношенія ихъ или величины имъ пропорціональныя.

44. Для нахожденія n величинъ, пропорціональныхъ неизвѣстнымъ, въ уравненіяхъ (2) достаточно имѣть $(n-1)$ изъ этихъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ опредѣлитель $\triangle$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + \ldots + u_1U_1,$$

то должно быть:

$$\begin{array}{l} a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 + \ldots + u_2U_1 = 0, \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 + \ldots + u_3U_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nA_1 + b_nB_1 + c_nC_1 + \ldots + u_nU_1 = 0, \end{array}$$

ибо первая часть каждаго изъ этихъ равенствъ есть опредѣлитель, въ которомъ элементы двухъ строкъ одинаковы. Эти равенства показываютъ, что величины A_1, B_1, C_1, ... U_1, которыя вовсе не зависятъ отъ коэффиціентовъ перваго изъ уравненій (2), удовлетворяютъ остальнымъ $(n-1)$ изъ нихъ. Слѣдовательно, рѣшенія этихъ $(n-1)$ однородныхъ уравненій будутъ:

$$x = kA_1\,,\ y = kB_1\,, \dots t = kU_1\,,$$

гдѣ k произвольный множитель.

45. Уравненія (1) принимаютъ видъ однородныхъ, если вторыя части ихъ v_1, v_2, ... v_n замѣнимъ чрезъ $-v_1\omega$, $-v_2\omega$, ... $-v_n\omega$ и будемъ разсматривать ω какъ неизвѣстное. Полагая же $\omega = -1$, возвратимся снова къ неоднороднымъ уравненіямъ (1).

Отсюда слѣдуетъ, что условіе совмѣстимости $(n+1)$ неоднородныхъ уравненій съ n неизвѣстными, каковы уравненія

$$\left.\begin{array}{l} a_0x + b_0y + c_0z + \dots + u_0t = v_0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + \dots + u_1t = v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + u_2t = v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \dots + u_nt = v_n \end{array}\right\} \dots\dots\dots (3)$$

есть то же, какъ и для однородныхъ уравненій съ тѣми же коэффиціентами. Это условіе есть, слѣдовательно, равенство нулю опредѣлителя $(n+1)$-го порядка, составленнаго изъ всѣхъ этихъ коэффиціентовъ, включая и постоянные члены, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0, & \dots & v_0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & \dots & v_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & v_2 \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & v_n \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3. Перемноженіе опредѣлителей.

46. Возьмемъ систему уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = r \\ a_2x + b_2y + c_2z = s \\ a_3x + b_3y + c_3z = t \end{array}\right\} \dots\dots\dots (1)$$

и пусть ихъ постоянные члены r, s, t сами опредѣляются изъ такой же системы уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1r + \beta_1s + \gamma_1t = \delta_1 \\ \alpha_2r + \beta_2s + \gamma_2t = \delta_2 \\ \alpha_3r + \beta_3s + \gamma_3t = \delta_3 \end{array}\right\} \dots\dots\dots (2)$$

Подставляя въ эти послѣднія вмѣсто r, s и t ихъ выраженія изъ (1), получимъ систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z&=\delta_1\\ A_2x+B_2y+C_2z&=\delta_2\\ A_3x+B_3y+C_3z&=\delta_3 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A_1&=a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 \qquad & A_2&=a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2\\ B_1&=b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1\ , & B_2&=b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2\ ,\\ C_1&=c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 & C_2&=c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3&=a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3\\ B_3&=b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3\ .\\ C_3&=c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{aligned}$$

Если положимъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1\\ A_2, & B_2, & C_2\\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}=\triangle,\quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}=P,\quad \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}=Q,$$

то будемъ имѣть изъ системъ (3) и (2):

$$x=\frac{M_x}{\triangle},\quad y=\frac{M_y}{\triangle},\quad z=\frac{M_z}{\triangle}\ldots\ldots\ldots (4)$$

и

$$r=\frac{N_r}{Q},\quad s=\frac{N_s}{Q},\quad t=\frac{N_t}{Q}\ldots\ldots\ldots (5)$$

Система же (1), по внесеніи въ нее послѣднихъ выраженій для r, s и t, обратится въ

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=\frac{N_r}{Q}\\ a_2x+b_2y+c_2z&=\frac{N_s}{Q}\\ a_3x+b_3y+c_3z&=\frac{N_t}{Q} \end{aligned}\right\}.$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ для x, y и z выраженія, въ которыхъ общій знаменатель будетъ, очевидно,

$$P.Q.$$

Такъ какъ эти значенія неизвѣстныхъ суть тѣ же самыя выраженія ихъ чрезъ коэффиціенты уравненій (1) и (2), какъ и представляемыя равенствами (4), то общіе знаменатели въ тѣхъ и другихъ выраженіяхъ должны быть равны, т. е.

$$P.Q=\triangle$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1\\ A_2, & B_2, & C_2\\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}.$$

Это заключеніе имѣетъ, очевидно, мѣсто при какомъ-угодно числѣ неизвѣстныхъ и уравненій системъ (1) и (2). Оно представляетъ правило для перемноженія опредѣлителей, состоящее въ слѣдующемъ.

Произведеніе двухъ опредѣлителей одного и того же порядка есть опредѣлитель того же порядка, элементы котораго суть суммы произведеній элементовъ множителей. Именно, элементъ m-го столбца и n-й строки равенъ суммѣ произведеній элементовъ m-го столбца одного множителя на соотвѣтствующіе элементы n-й строки другого.

Примѣръ:

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m, & n \\ p, & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + cn, & bm + dn \\ ap + cq, & bp + dq \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ въ множителяхъ строки могутъ быть принимаемы за столбцы и обратно, то произведеніе тѣхъ же опредѣлителей равно опредѣлителямъ.

$$\begin{vmatrix} am + cp, & bm + dp \\ an + cq, & bn + dq \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} am + bp, & cm + dp \\ an + bq, & cn + dq \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} am + bn, & cm + dn \\ ap + bq, & cp + dq \end{vmatrix}.$$

47. Если въ какомъ-нибудь данномъ опредѣлителѣ замѣнимъ каждый элементъ соотвѣтствующимъ ему опредѣлителемъ миноромъ, то получимъ новый опредѣлитель, который называется *производнымъ* даннаго. Этотъ же послѣдній называется *начальнымъ* по отношенію къ своему производному.

Между двумя такими опредѣлителями существуетъ простая зависимость, которую, на основаніи сказаннаго, легко обнаружить.

Возьмемъ опредѣлитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 & \dots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 & \dots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 & \dots & u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix} = \triangle.$$

Вслѣдствіе извѣстнаго намъ соотношенія между множителями въ разложеніи даннаго опредѣлителя и его минорами (см. стр. 28) можно производный опредѣлитель представить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & \ldots & U_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & \ldots & U_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & \ldots & U_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n, & B_n, & C_n, & \ldots & U_n \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Перемножая эти опредѣлители по указанному сейчасъ правилу и замѣчая, что вообще

$$a_kA_k + b_kB_k + c_kC_k + \ldots + u_kU_k = \Delta$$

и

$$a_kA_l + b_kB_l + c_kC_l + \ldots + u_kU_l = 0,$$

гдѣ указатели k и l какіе-угодно, будемъ имѣть:

$$\Delta \cdot \Delta' = \begin{vmatrix} \Delta, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & \Delta, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 0, & \Delta, & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \Delta \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta \cdot \Delta' = \Delta^n,$$

или

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

Итакъ, производный опредѣлитель равняется начальному, возвышенному въ степень, единицею низшую его порядка.

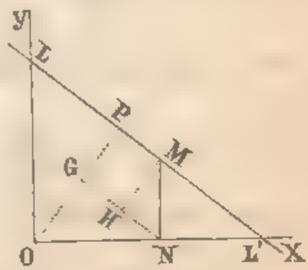
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

§ 1. Уравненіе прямой.

48. Уравненіе всякой линіи представляетъ, какъ сказано выше, зависимость, связывающую координаты какой-угодно точки этой линіи съ постоянными величинами, значеніями которыхъ опредѣляется ея видъ и расположеніе относительно системы координатъ. Эти постоянныя, какого бы рода они ни были, называются *параметрами* линіи.

Постараемся найти уравненіе какой-нибудь прямой линіи LL' относительно прямоугольной системы XOY (фиг. 16). Для этого опустимъ перпендикуляръ OP изъ начала координатъ на разсматриваемую прямую и назовемъ длину его чрезъ p, а уголъ, составляемый имъ съ осью OX, чрезъ α. Величинами p и α опредѣляется положеніе прямой; онѣ суть, слѣдовательно, параметры прямой, и искомое уравненіе должно представлять зависимость между этими величинами и координатами точекъ, лежащихъ на прямой.



Фиг. 16.

Пусть M будетъ какая-нибудь точка прямой LL'. Построимъ ея координаты $ON=x$ и $MN=y$ и проведемъ двѣ прямыя NG и MH, изъ которыхъ первая параллельна LL', а вторая перпендикулярна къ ней. Очевидно, что при всякомъ положеніи точки M на прямой LL' должно имѣть мѣсто равенство

$$OG+HM=OP.$$

Но $OP=p$, и кромѣ того изъ треугольниковъ OGN и HMN имѣемъ:

$$OG=ON\cos NOG=x\cos\alpha$$

и

$$HM=MN\sin MNH=y\sin\alpha.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее равенство принимаетъ видъ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

или

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

*

Такъ какъ это равенство справедливо при всякомъ положеніи точки M на прямой LL' и не можетъ имѣть мѣста при всякомъ другомъ положеніи этой точки, то оно и будетъ искомое уравненіе прямой LL'.

49. Относительно перемѣнныхъ x и y уравненіе (1) есть алгебраическое первой степени. Поэтому, принимая во вниманіе неизмѣняемость степени уравненія отъ преобразованія прямолинейныхъ координатъ и замѣчая, что разсматриваемая прямая LL' была взята совершенно произвольно, мы можемъ сдѣлать общее заключеніе: *прямая линія есть линія алгебраическая перваго порядка.*

50. Чтобы убѣдиться въ справедливости обратнаго предложенія, достаточно также ограничиться случаемъ прямоугольной системы координатъ.

Возьмемъ общее уравненіе первой степени

$$Ax + By + C = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ A, B и C суть какія-угодно дѣйствительныя величины, и постараемся обнаружить, какую линію оно выражаетъ относительно прямоугольной системы координатъ XOY. Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на $\sqrt{A^2+B^2}$, мы, не измѣняя его геометрическаго значенія, дадимъ ему видъ

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Такъ какъ теперь коэффиціенты при x и y удовлетворяютъ условію

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1\,,$$

то долженъ существовать такой уголъ α, чтобы было

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Кромѣ того должна, очевидно, существовать такая длина p, выраженная въ тѣхъ-же единицахъ, какъ и координаты x, y, чтобы было

$$-p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Въ силу этихъ послѣднихъ равенствъ уравненіе (3) является тождественнымъ съ уравненіемъ (1), а потому должно имѣть одинаковое съ нимъ значеніе. Слѣдовательно, какъ это уравненіе, такъ и данное (2) выражаетъ прямую.

Итакъ, убѣждаемся, что *всякая линія перваго порядка есть прямая.*

Всѣ остальныя алгебраическія линіи, а также и линіи трансцендентныя, вошло въ обычай называть общимъ именемъ *кривыхъ.*

51. Уравненіе (2) называется *общимъ уравненіемъ прямой линіи*. Уравненіе (1) именуется ея *уравненіемъ въ нормальной формѣ*.

Для того, чтобы общее уравненіе прямой, отнесенной къ прямоугольной системѣ координатъ, привести къ нормальной формѣ, нужно только, какъ видно изъ сказаннаго, раздѣлить обѣ его части на квадратный корень изъ суммы квадратовъ двухъ первыхъ коэффиціентовъ.

Въ уравненіи (1) величину p можно всегда считать положительною, т. е. понимать подъ этимъ обозначеніемъ только абсолютное разстояніе прямой отъ начала координатъ. Въ такомъ случаѣ, при различныхъ положеніяхъ прямой, уголъ α долженъ получать различныя значенія отъ 0^0 до 360^0. Если же допустимъ, что p можетъ имѣть оба знака, то достаточно углу α придавать значенія, не превосходящія 180^0. При этомъ величину перпендикуляра OP нужно считать положительною, когда основаніе его P выше оси OX, и отрицательною въ противномъ случаѣ.

52. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ общее уравненіе (2) можетъ быть приведено къ виду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \qquad (4)$$

гдѣ p имѣетъ то же значеніе, какъ и въ уравненіи (1), а α и β суть углы, составляемые перпендикуляромъ къ прямой съ осями OX и OY, такъ что, означая уголъ между осями чрезъ ω, будемъ имѣть

$$\alpha + \beta = \omega.$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, помножимъ обѣ части уравненія (2) на неопредѣленный множитель M и постараемся выбрать для него такое значеніе, чтобы это уравненіе сдѣлалось тождественнымъ съ уравненіемъ (4), т. е, чтобы было

$$\cos\alpha = MA, \qquad \cos\beta = MB, \qquad -p = MC.$$

Для этого замѣтимъ, что

$$\sin\omega = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

или, возвысивъ въ квадратъ,

$$\sin^2\omega = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta.$$

Замѣняя же въ двухъ первыхъ членахъ второй части $\sin^2\alpha$ чрезъ $1-\cos^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ чрезъ $1-\cos^2\beta$, получимъ

$$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

или
$$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega.$$

Подставивъ сюда на мѣсто $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ ихъ предыдущія выраженія, получимъ

$$\sin^2\omega = M^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega),$$

откуда
$$M = \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}.$$

Итакъ, чтобы общее уравненіе (2), выражающее прямую относительно косоугольной системы координатъ, привести къ виду (4), нужно обѣ его части помножить на

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}.$$

Уравненіе (4), обращающееся въ (1) при $\omega=\frac{\pi}{2}$, называется также *уравненіемъ прямой въ нормальной формѣ.*

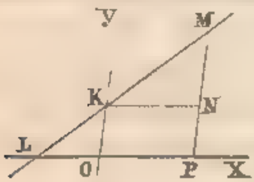
53. Кромѣ разсмотрѣнныхъ видовъ уравненія прямой линіи употребительны еще другіе виды, которые получаются также изъ общаго уравненія (2) посредствомъ простыхъ преобразованій. Такъ, рѣшая уравненіе (2) относительно перемѣннаго y, дадимъ ему видъ:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

или, означая $-\frac{A}{B}$ чрезъ a, а $-\frac{C}{B}$ чрезъ b,

$$y=ax+b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Послѣднее уравненіе равнозначуще съ (2), ибо получается изъ него посредствомъ раздѣленія обѣихъ частей на постоянное B и перенесенія членовъ. Слѣдовательно, оно также выражаетъ какую-угодно прямую.



Фиг. 17.

Это есть одинъ изъ наиболѣе употребительныхъ видовъ уравненія прямой. Въ немъ a и b суть ея параметры. Посмотримъ, какое они имѣютъ геометрическое значеніе.

Такъ какъ, положивъ въ уравненіи (5) $x=0$, получимъ $y=b$, то заключаемъ, что b есть ордината той точки прямой, выражаемой уравненіемъ, въ которой она пересѣкается съ осью OY, т. е. $b=OK$ (фиг. 17). Это постоянное называется поэтому *ординатою въ началѣ.*

Что касается другого постояннаго a, то значеніе его обнаруживается слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненія (5) имѣемъ

$$a=\frac{y-b}{x}.$$

Но для какой-нибудь точки M, взятой произвольно на прямой,

$$x=OP \qquad \text{и} \qquad y=MP.$$

Слѣдовательно, для этой точки

$$a=\frac{MP-OK}{OP}=\frac{MP-NP}{KN}=\frac{MN}{KN}.$$

Если же обозначимъ углы, которые прямая составляетъ съ осями OX и OY, послѣдовательно чрезъ α и β, то будемъ имѣть изъ треугольника KMN

$$\frac{MN}{KN} = \frac{\sin MKN}{\sin KMN} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Слѣдовательно,

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что постоянный коэффиціентъ a есть отношеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ. Онъ есть, слѣдовательно, величина угловая, опредѣляющая направленіе прямой, и называется поэтому ея *угловымъ коэффиціентомъ*.

Если система координатъ прямоугольная, то $\sin(\omega - \alpha) = \cos\alpha$ и

$$a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для того, чтобы коэффиціентъ a имѣлъ какое-угодно значеніе и, слѣдовательно, уравненіе (5) представляло какую-угодно прямую, углу α могутъ быть приписываемы только положительныя величины, не превышающія 180^0, причемъ этотъ уголъ измѣряется между положительнымъ направленіемъ оси OX и тою частью прямой, которая выше этой оси.

54. Еще одинъ употребительный видъ уравненія прямой можно получить изъ общаго уравненія (2), раздѣливъ обѣ его части на $-C$ и перенеся послѣдній членъ во вторую часть. Въ такомъ случаѣ уравненіе это обращается въ

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

и, обозначая $-\frac{C}{A}$ чрезъ m, а $-\frac{C}{B}$ чрезъ n, мы дадимъ ему видъ:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Положимъ, что L и L' суть точки, въ которыхъ прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, пересѣкаетъ оси OY и OX (фиг. 16). Такъ какъ при $y = 0$ уравненіе (6) обращается въ $\frac{x}{m} = 1$, откуда $x = m$, то заключаемъ, что постоянная величина m есть абсцисса точки L', т. е. отрѣзокъ оси OX между началомъ координатъ и точкою пересѣченія съ прямою. Подобнымъ же образомъ, полагая $x = 0$, получимъ $y = n$, изъ чего убѣждаемся, что постоянное n есть ордината точки L, т. е. отрѣзокъ OL. Итакъ, постоянные параметры m и n въ уравненіи (6) суть отрѣзки, отсѣкаемые на осяхъ координатъ выражаемою этимъ уравненіемъ прямою. Смотря по расположенію прямой, величины эти могутъ быть какъ положительныя, такъ и отрицательныя.

Уравненіе (6) выведено нами изъ общаго (2) въ предположеніи, что оси координатъ какія-угодно. Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ, какъ видъ этого уравненія, такъ и значеніе его коэффиціентовъ остаются тѣ же самые.

55. Уравненіе (6) можетъ быть выведено также изъ уравненія (4) въ нормальной формѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольниковъ OPL' и OPL (фиг. 16) имѣемъ

$$OP = OL' \cos POL' = OL \cos POL,$$

откуда, полагая $OL' = m$ и $OL = n$, получимъ

$$\cos POL' = \cos\alpha = \frac{p}{m} \quad \text{и} \quad \cos POL = \cos\beta = \frac{p}{n}.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$x\frac{p}{m} + y\frac{p}{n} - p = 0.$$

Раздѣливъ здѣсь всѣ коэффиціенты на p и перенеся постоянный членъ во вторую часть, мы и получимъ уравненіе (6).

56. Обратимъ вниманіе на случаи, когда одинъ или два изъ коэффиціентовъ общаго уравненія прямой

$$Ax + By + C = 0$$

равняются нулю.

Если $A = 0$, то уравненіе удовлетворяется однимъ только постояннымъ значеніемъ y при неопредѣленномъ значеніи x. Если же $B = 0$, то уравненію удовлетворяетъ одно постоянное значеніе x и какое угодно значеніе y. Это показываетъ, что въ первомъ случаѣ уравненіе выражаетъ прямую, параллельную оси x-овъ, а во второмъ—параллельную оси y-овъ.

Если $C = 0$, то уравненіе обращается въ

$$Ax + By = 0$$

и удовлетворяется при $x = 0$, $y = 0$. Это значитъ, что прямая проходитъ чрезъ начало координатъ.

Если $A = C = 0$, то уравненіе обращается въ $y = 0$ и представляетъ ось x-въ, а при $B = C = 0$ оно обращается въ $x = 0$ и представляетъ ось y-овъ.

Наконецъ, если $A = B = 0$, но C не равняется нулю, то уравненіе становится невозможнымъ при конечныхъ величинахъ x и y. Это показываетъ, что оно не представляетъ никакой прямой, точки которой не безконечно удаленныя (см. стр. 8). Легко видѣть, дѣйствительно, что такое значеніе коэффиціентовъ соотвѣтствуетъ случаю, когда прямая всѣми точками удалена въ безконечность.

Мы положили выше

$$-\frac{C}{A}=m \quad \text{и} \quad -\frac{C}{B}=n,$$

гдѣ m и n суть отрѣзки, отсѣкаемые прямою на осяхъ координатъ. Отсюда видно, что при данномъ конечномъ значенiи C, отрѣзки эти увеличиваются съ уменьшенiемъ A и B, и дѣлаются безконечно большими, когда $A=B=0$. Въ этомъ случаѣ прямая принимаетъ, слѣдовательно, такое положенiе, въ которомъ она обѣ оси координатъ пересѣкаетъ въ безконечно удаленныхъ точкахъ, а потому и всѣ другiя ея точки должны быть также безконечно удаленными. На этомъ основанiи говорятъ, что при $A=B=0$ общее уравненiе (2) представляетъ безконечно удаленную прямую.

§ 2. Задачи на прямыя линiи.

57. Въ предыдущемъ мы показали, что уравненiе всякой прямой можетъ быть представлено въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+C=0 \\ x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)-p=0 \\ y=ax+b \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Въ какомъ бы изъ этихъ видовъ уравненiе ни разсматривалось, прямая, имъ выражаемая, будетъ извѣстною и вполнѣ опредѣленною только тогда, когда имѣютъ извѣстныя и опредѣленныя значенiя входящiя въ это уравненiе постоянныя. Найти какiя-нибудь величины, опредѣляемыя положенiемъ данной прямой, значитъ дать ихъ аналитическiя выраженiя чрезъ постоянныя, входящiя въ уравненiе прямой.

Если же, напротивъ, прямая неизвѣстна и отыскивается по какимъ-нибудь условiямъ, то, для опредѣленiя ея, мы должны прежде всего выбрать одинъ изъ видовъ (1) представляющаго ее уравненiя и затѣмъ найти выраженiя его постоянныхъ чрезъ данныя величины, входящiя въ условiя.

Уравненiе прямой въ каждомъ изъ трехъ послѣднихъ видовъ (1) содержитъ въ себѣ два постоянныхъ или параметра. Это указываетъ на опредѣляемость прямой линiи по двумъ условiямъ.

Что же касается перваго изъ уравненiй (1), т. е. общаго уравненiя первой степени, то по даннымъ условiямъ, опредѣляющимъ прямую, отыскиваются въ немъ не сами постоянныя A, B, C, а только отношенiя двухъ изъ нихъ къ какому-нибудь третьему. Это потому, что отъ умноженiя уравненiя на постоянную величину его значенiе не измѣняется,

вслѣдствіе чего прямая опредѣляется не одною какою-нибудь системою значеній для коэффиціентовъ A, B, C, но всякою системою величинъ имъ пропорціональныхъ.

Разсмотримъ нѣсколько задачъ, въ которыхъ прямыя линіи представляются данными или искомыми.

58. *Найти уголъ между двумя прямыми, отнесенными къ прямоугольной системѣ координатъ.*

По смыслу задачи должны быть извѣстны уравненія двухъ прямыхъ. Положимъ, что онѣ даны въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' = 0.$$

Такъ какъ уголъ между двумя прямыми долженъ равняться углу между перпендикулярами, опущенными на нихъ изъ начала координатъ, то, обозначая искомый уголъ буквою φ, будемъ имѣть

$$\varphi = \alpha' - \alpha,$$

и, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\alpha' \cos\alpha + \sin\alpha' \sin\alpha, \\ \sin\varphi &= \sin\alpha' \cos\alpha - \cos\alpha' \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу.

59. Если уравненія прямыхъ даны въ общемъ видѣ

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

то, приведя ихъ къ нормальной формѣ посредствомъ раздѣленія послѣдовательно на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и $\sqrt{A'^2 + B'^2}$, будемъ имѣть, какъ видѣли выше (см. стр. 36):

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

и

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \qquad \sin\alpha' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Подставляя эти величины въ формулы (2), получимъ:

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\cdot\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{A^2 + B^2}\cdot\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \; . \; (3)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'}.$$

Когда прямыя линіи параллельны между собою, то должно быть $\sin\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$; когда же онѣ перпендикулярны, то должно быть $\cos\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = \infty$. Принимая во вниманіе, что величины A, B, A', B', какъ коэффиціенты данныхъ уравненій, не могутъ быть безконечно

большими, убѣждаемся, что условіе параллельности двухъ прямыхъ, выраженныхъ общими уравненіями, есть

$$AB' - BA' = 0,$$

а условіе перпендикулярности ихъ

$$AA' + BB' = 0.$$

Первое изъ этихъ условій даетъ

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Слѣдовательно, двѣ прямыя параллельны, когда коэффиціенты при соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ въ ихъ уравненіяхъ пропорціональны.

60. Если уравненія прямыхъ даны въ видѣ

$$y = ax + b \quad \text{и} \quad y = a'x + b',$$

то уголъ между ними долженъ опредѣляться угловыми коэффиціентами a и a'. Дѣйствительно, обозначая чрезъ λ и λ' углы, образуемые прямыми съ осью OX, будемъ имѣть, какъ извѣстно:

$$\operatorname{tg}\lambda = a \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\lambda' = a';$$

и такъ какъ $\varphi = \lambda' - \lambda$, то и получаемъ

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\lambda' - \lambda) = \frac{\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda' \operatorname{tg}\lambda} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Слѣдовательно, условіе параллельности прямыхъ въ этомъ случаѣ будетъ

$$a = a',$$

а условіе перпендикулярности

$$1 + aa' = 0 \quad \text{или} \quad aa' = -1.$$

61. *Найти уголъ между двумя прямыми, отнесенными къ косоугольной системѣ координатъ.*

Если уравненія прямыхъ даны въ формѣ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

и

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0,$$

гдѣ, какъ мы знаемъ, $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega$, то искомый уголъ φ опредѣляется, какъ и въ предыдущей задачѣ, по формуламъ (2). Если-же эти уравненія даны въ общемъ видѣ, то приведеніе ихъ къ предыдущему виду достигается, какъ мы видѣли (см. стр. 38), помноженіемъ ихъ послѣдовательно на

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

вслѣдствіе чего будемъ имѣть:

$$\cos\alpha = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha' = \frac{A'\sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{B - A\cos\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \text{ и } \sin\alpha' = \frac{B' - A'\cos\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}.$$

Подставляя эти выраженія въ формулы (2), получимъ:

$$\cos\varphi = \frac{(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}$$

и $$\sin\varphi = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

откуда $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega}.$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу. При $\omega = \frac{\pi}{2}$ онѣ обращаются въ формулы (3).

Изъ послѣднихъ формулъ видимъ, что условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ, отнесенныхъ къ косоугольной системѣ координатъ, есть

$$(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega = 0;$$

оно можетъ быть представлено такъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\omega, & A \\ \cos\omega, & 1, & B \\ A', & B', & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Условіе же параллельности есть то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ:

$$AB' - BA' = 0;$$

оно не зависитъ, слѣдовательно, отъ угла между осями координатъ.

62. *Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ, данныхъ общими уравненіями.*

Координаты искомой точки, принадлежащей обѣимъ прямымъ, должны удовлетворять одновременно обоимъ даннымъ уравненіямъ

$$Ax + By + C = 0$$

и $$A'x + B'y + C' = 0.$$

Слѣдовательно, вопросъ сводится къ совмѣстному рѣшенію этихъ двухъ уравненій, что, какъ извѣстно, даетъ

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \qquad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'} \quad \ldots\ldots (4)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу.

Если данныя прямыя параллельны между собою, то общій знаменатель въ выраженіяхъ для x и y есть нуль, и потому получимъ $x = \infty$ и $y = \infty$.

Такъ какъ точку, координаты которой суть безконечно большія величины, называютъ безконечно удаленною, то можно сказать, что двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ.

Если формулы (4) даютъ для x и y неопредѣленныя выраженія, то данныя прямыя совпадаютъ. Дѣйствительно, для того, чтобы было $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$, нужно имѣть:

$$AB'-BA'=0,\quad BC'-CB'=0,\quad CA'-AC'=0.$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ есть необходимое слѣдствіе двухъ первыхъ, ибо изъ нихъ находимъ

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}.$$

Отсюда видимъ, что второе изъ данныхъ уравненій получается изъ перваго умноженіемъ всѣхъ его коэффиціентовъ на постоянную величину $M=\frac{A'}{A}$, а это и значитъ, что оба уравненія выражаютъ одну и ту же прямую.

63. *Найти условіе, при которомъ три прямыя, данныя общими уравненіями, проходятъ чрезъ одну точку.*

Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} Ax+By+C&=0,\\ A'x+B'y+C'&=0,\\ A''x+B''y+C''&=0. \end{aligned}$$

Если существуетъ точка, принадлежащая всѣмъ тремъ прямымъ, то координаты ея должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ. Выраженія (4) представляютъ рѣшенія двухъ первыхъ уравненій; подставляя ихъ въ третье, мы и получимъ искомое условіе:

$$A''\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}+B''\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}+C''=0$$

или, по умноженіи обѣихъ частей на $(AB'-BA')$,

$$A''(BC'-CB')+B''(CA'-AC')+C''(AB'-BA')=0,$$

что можно представить еще такъ:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C\\ A', & B', & C'\\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix}=0.$$

Искомое условіе есть, такимъ образомъ, результатъ исключенія перемѣнныхъ x и y изъ трехъ данныхъ уравненій.

64. *Найти уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.*

Пусть данныя точки будутъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Возьмемъ уравненіе прямой въ формѣ

$$y = ax + b.$$

При неопредѣленныхъ a и b оно представляетъ какую-угодно прямую на плоскости, но если эта прямая проходитъ чрезъ первую изъ данныхъ точекъ, то должно имѣть мѣсто тождество

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Вычитая почленно это тождество изъ уравненія прямой, дадимъ ему видъ

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Каково-бы ни было значеніе углового коэффиціента a, это послѣднее уравненіе удовлетворяется координатами x_1, y_1 и, слѣдовательно, при неопредѣленномъ a, оно выражаетъ какую-угодно прямую, проходящую чрезъ первую изъ данныхъ точекъ. Если же эта прямая проходитъ и чрезъ вторую данную точку, то оно должно удовлетворяться и координатами x_2, y_2, т. е. должно имѣть мѣсто тождество

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Раздѣливъ почленно послѣднее уравненіе на это тождество, получимъ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

уравненіе, которое кромѣ перемѣнныхъ x и y содержитъ только координаты данныхъ точекъ, и такъ какъ оно удовлетворяется этими координатами, то и есть искомое.

Уничтожая въ немъ знаменателя, дадимъ ему видъ

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

65. Можно получить тотъ же результатъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ общее уравненіе первой степени

$$Ax + By + C = 0.$$

Если оно представляетъ искомую прямую, то должны имѣть мѣсто два тождества:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

откуда, какъ изъ двухъ однородныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными A, B, C (см. стр. 30 и 31), находимъ:

$$\frac{A}{y_1 - y_2} = \frac{B}{x_2 - x_1} = \frac{C}{x_1y_2 - y_1x_2},$$

вслѣдствіе чего общее уравненіе и принимаетъ видъ (6).

Искомое уравненіе получается, слѣдовательно, посредствомъ исключенія коэффиціентовъ A, B, C изъ общаго уравненія прямой и резуль-

татовъ подстановки въ него на мѣсто перемѣнныхъ x и y координатъ данныхъ точекъ. Его можно представить еще такимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & 1 \\ x_1\,, & y_1\,, & 1 \\ x_2\,, & y_2\,, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

66. *Найти условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой.*

Пусть данныя точки будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Прямая, проходящая чрезъ двѣ первыя изъ нихъ, выражается уравненіемъ (6) или (7). Координаты третьей точки, какъ лежащей на той же прямой, должны удовлетворять этому уравненію, т. е. должно быть:

$$(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0\,,$$

или

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0\,,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1\,, & y_1\,, & 1 \\ x_2\,, & y_2\,, & 1 \\ x_3\,, & y_3\,, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое условіе.

67. *Найти прямую, проходящую чрезъ данную точку и параллельную данной прямой.*

Пусть данная точка есть (x_1, y_1) и уравненіе прямой дано въ видѣ

$$y = ax + b.$$

Всѣ прямыя линіи, проходящія чрезъ точку (x_1, y_1), выражаются, какъ мы видѣли, уравненіемъ

$$y - y_1 = m(x - x_1)\,,$$

гдѣ m есть неопредѣленный угловой коэффиціентъ. Вслѣдствіе же параллельности искомой прямой съ данной должно быть

$$m = a\,,$$

откуда и заключаемъ, что уравненіе искомой прямой есть

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Если уравненіе данной прямой разсматривается въ общемъ видѣ

$$Ax + By + C = 0\,,$$

то допускаемъ, что и искомая прямая выражается такимъ-же уравненіемъ

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Такъ какъ эта прямая проходитъ, по условію, чрезъ точку (x_1, y_1), то имѣемъ тождество

$$A'x_1 + B'y_1 + C' = 0\,,$$

вслѣдствіе котораго уравненіе искомой прямой принимаетъ видъ

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0.$$

При неопредѣленныхъ A' и B' это есть уравненіе какой-угодно прямой, проходящей чрезъ точку (x_1, y_1). Изъ условія же параллельности

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$$

имѣемъ:

$$A' = Ak \quad \text{и} \quad B' = Bk.$$

Внеся эти величины въ предыдущее уравненіе и раздѣливъ всѣ его члены на постоянное k, мы получимъ для искомой прямой уравненіе:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

68. *Найти прямую, проходящую черезъ данную точку и перпендикулярную къ данной прямой.*

Всякая прямая, проходящая черезъ данную точку (x_1, y_1), выражается, какъ мы сейчасъ видѣли, уравненіемъ

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0.$$

Условіе же перпендикулярности этой прямой съ прямой, данной общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0,$$

есть
$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\omega = 0,$$

или
$$A'(A - B\cos\omega) - B'(B - A\cos\omega) = 0,$$

или
$$\frac{A'}{B - A\cos\omega} = \frac{B'}{B\cos\omega - A} = k,$$

откуда
$$A' = k(B - A\cos\omega) \quad \text{и} \quad B' = k(B\cos\omega - A).$$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе, по раздѣленіи обѣихъ его частей на k, принимаетъ видъ

$$(B - A\cos\omega)(x - x_1) + (B\cos\omega - A)(y - y_1) = 0,$$

въ которомъ оно и выражаетъ искомую прямую.

Если система координатъ прямоугольная, то $\cos\omega = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, и потому уравненіе искомой прямой будетъ

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0,$$

или
$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}.$$

69. Двѣ послѣднія задачи представляютъ частные случаи слѣдующей. *Найти прямую, проходящую чрезъ данную точку и составляющую съ данной прямой данный уголъ.*

Если уравненіе данной прямой есть

$$Ax + By + C = 0,$$

а искомой
$$A'x + B'y + C' = 0,$$
то, называя данный уголъ буквою φ, будемъ имѣть (см. стр. 44).
$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{(AA' + BB') + (AB' + BA')\cos\omega}.$$

Отсюда находимъ
$$\frac{A'}{A\sin(\omega-\varphi) - B\sin\varphi} = \frac{B'}{A\sin\varphi + B\sin(\omega-\varphi)}.$$

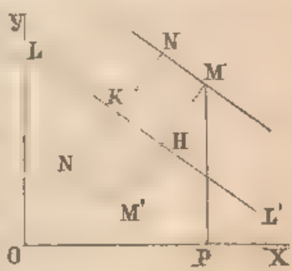
Вслѣдствіе того, что искомая прямая проходитъ чрезъ данную точку (x_1, y_1), уравненіе ея принимаетъ видъ
$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0;$$
на основаніи же послѣдняго равенства оно обращается въ
$$[A\sin(\omega+\varphi) - B\sin\omega](x - x_1) + [A\sin\varphi + B\sin(\omega-\varphi)](y - y_1) = 0.$$

Полагая здѣсь $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получимъ рѣшенія двухъ предыдущихъ задачъ.

70. *Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.*

Положимъ, что данная прямая LL' отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ (фиг. 18) и уравненіе ея въ нормальной формѣ есть
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Пусть кромѣ того координаты данной точки M будутъ x_1, y_1. Проведя чрезъ нее прямую MN параллельную данной, будемъ имѣть, что уравненіе ея, долженствующее отличаться отъ уравненія данной прямой только постояннымъ членомъ, есть
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p' = 0,$$
гдѣ p' есть длина перпендикуляра ON на эту прямую изъ начала координатъ.



Фиг. 18.

Если данная точка M находится по другую сторону отъ данной прямой, нежели начало координатъ, то, называя искомую длину перпендикуляра изъ M на LL' буквою l, будемъ имѣть
$$l = MH = NK = ON - OK = (p' - p).$$

Если же данная точка находится по ту же сторону отъ данной прямой, какъ и начало координатъ, какова, напр., точка M', то искомая длина будетъ
$$l = M'H' = N'K' = OK - ON' = (p - p') = -(p' - p).$$

Слѣдовательно, имѣемъ вообще

$$l = \pm (p' - p).$$

Здѣсь величина p' неизвѣстна. Чтобы найти ее, замѣтимъ, что координаты точки M должны удовлетворять уравненію прямой MN, чрезъ нее проходящей, т. е. должно быть:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p' = 0,$$

откуда

$$p' = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha.$$

Подставивъ эту величину въ предыдущее выраженіе для l, получимъ

$$l = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p), \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

71. Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ случаѣ, когда уравненіе прямой дается въ нормальной формѣ, длина перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на эту прямую, опредѣляется какъ величина, которую получаетъ первая часть даннаго уравненія при подстановкѣ въ него на мѣсто перемѣнныхъ x и y координатъ данной точки. При этомъ величина эта должна быть взята съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, смотря по тому, будетъ ли данная точка лежать по другую сторону отъ данной прямой, нежели начало координатъ, или по ту же самую.

Очевидно, что это заключеніе справедливо и тогда, когда система координатъ косоугольная, только въ этомъ случаѣ формула (8) измѣняется въ слѣдующую:

$$l = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p)$$

или

$$l = \pm [x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(\omega - \alpha) - p] \, . \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Если уравненіе прямой дано въ общемъ видѣ, то, чтобы рѣшить вопросъ, нужно только привести это уравненіе къ нормальной формѣ и затѣмъ уже приложить къ нему указанное сейчасъ правило. Слѣдовательно, предполагая, что уравненіе прямой есть

$$Ax + By + C = 0,$$

будемъ имѣть, что искомая длина перпендикуляра въ случаѣ прямоугольной системы координатъ будетъ

$$l = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

а въ случаѣ косоугольной системы координатъ

$$l = \pm \frac{(Ax_1 + By_1 + C) \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos\omega}} \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

72. *Найти уравненіе прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между двумя данными прямыми.*

Каждая точка искомой прямой находится на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ обѣихъ данныхъ прямыхъ: поэтому, полагая, что эти послѣднія выражены уравненіями въ нормальной формѣ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

и

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0,$$

будемъ имѣть, что зависимость между координатами любой точки искомой прямой есть

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta - p) = \pm(x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p'),$$

что и будетъ ея уравненіемъ.

Двойной знакъ второй части соотвѣтствуетъ двумъ смежнымъ угламъ, образуемымъ данными прямыми.

Когда данныя прямыя выражены общими уравненіями,

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

то, согласно сказанному въ предыдущемъ, уравненіе искомой прямой будетъ

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} = \pm\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}.$$

Въ частности уравненія $x - y = 0$ и $x + y = 0$ представляютъ прямыя, дѣлящія пополамъ углы между осями координатъ.

73. *Найти площадь треугольника по координатамъ его вершинъ.*

Пусть вершины треугольника будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Принимая сторону, соединяющую двѣ первыя, за основаніе и называя длину ея черезъ b, будемъ имѣть, что уравненіе этой прямой есть (см. стр. 46)

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0,$$

а длина

$$b = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}.$$

Слѣдовательно, высота h этого треугольника, т. е. длина перпендикуляра изъ вершины (x_3, y_3) на противоположную сторону, опредѣлится формулой

$$h = \frac{[(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - y_1x_2)]\sin\omega}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}}$$

Поэтому, если обозначимъ искомую площадь треугольника чрезъ $\triangle$, то будемъ имѣть:

$$2\triangle = b\,h = [(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - y_1x_2)]\sin\omega$$

Въ случаѣ же прямоугольной системы координатъ

$$2\triangle = [(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - y_1x_2)],$$

откуда
$$\triangle = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

или
$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой, выражаетъ, что площадь треугольника, для котораго эти три точки суть вершины, равняется нулю.

74. *Найти площадь треугольника по уравненіямъ его сторонъ.*

Пусть уравненія данныхъ сторонъ будутъ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Если назовемъ координаты вершинъ, противолежащихъ этимъ сторонамъ, послѣдовательно чрезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3\, y_3)$, то будемъ имѣть, рѣшая совмѣстно каждыя два уравненія:

$$x_1 = \frac{B_2C_3 - C_2B_3}{A_2B_3 - B_2A_3}, \qquad x_2 = \frac{B_3C_1 - C_3B_1}{A_3B_1 - B_3A_1}, \qquad x_3 = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - B_1A_2},$$
$$y_1 = \frac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3}, \qquad y_2 = \frac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1}, \qquad y_3 = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}.$$

Внеся эти выраженія въ формулу (12), рѣшающую предыдущую задачу, мы и получимъ слѣдующее рѣшеніе настоящей:

$$2\triangle = \left\{ \begin{aligned} & \frac{B_2C_3 - C_2B_3}{A_2B_3 - B_2A_3}\left(\frac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1} - \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}\right) + \\ & + \frac{B_3C_1 - C_3B_1}{A_3B_1 - B_3A_1}\left(\frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2} - \frac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3}\right) + \\ & + \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - B_1A_2}\left(\frac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3} - \frac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1}\right). \end{aligned} \right.$$

75. Это рѣшеніе можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ чрезъ R опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ трехъ данныхъ уравненій, т. е. положимъ

$$R = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, \\ A_3, & B_3, & C_3, \end{vmatrix}.$$

Числители и знаменатели въ предыдущихъ выраженіяхъ для координатъ вершинъ треугольника суть опредѣлители миноры по отношенію къ опредѣлителю R. Называя ихъ соотвѣтственнымъ образомъ чрезъ α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, будемъ имѣть изъ предыдущаго

$$2\triangle = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} - \frac{\beta_3}{\gamma_3}\right) + \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) + \frac{\alpha_3}{\gamma_3}\left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\gamma_2}\right)$$

или, по приведеніи къ одному знаменателю,

$$2\triangle = \frac{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}.$$

Числитель этой послѣдней дроби есть опредѣлитель производный относительно R, а потому, какъ мы знаемъ (см. стр. 34), равняется его квадрату. Слѣдовательно,

$$2\triangle = \frac{R^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}$$

или

$$2\triangle = \frac{[A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)]^2}{(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3)}.$$

76. *Найти отношеніе, въ которомъ разстояніе между двумя данными точками дѣлится данною прямою.*

Пусть координаты данныхъ точекъ будутъ

$$x_1,\ y_1 \quad \text{и} \quad x_2,\ y_2$$

и уравненіе данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Искомое отношеніе равняется, очевидно, отношенію перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данныхъ точекъ на данную прямую. Но въ томъ случаѣ, когда данныя точки находятся по разныя стороны отъ данной прямой, эти перпендикуляры имѣютъ различныя направленія, между тѣмъ какъ въ этомъ именно случаѣ искомое отношеніе должно быть положительнымъ (см. стр. 9). Въ противномъ случаѣ это отношеніе есть величина отрицательная, а перпендикуляры имѣютъ одинаковыя направленія. Слѣдовательно, полагая, что искомое отношеніе есть $\frac{m}{n}$, и называя длины перпендикуляровъ изъ данныхъ точекъ на данную прямую чрезъ d_1 и d_2, будемъ имѣть вообще

$$\frac{m}{n} = -\frac{d_1}{d_2},$$

но $$d_1 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{(Ax_2 + By_2 + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}$$

и потому находимъ

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

77. Тотъ же результатъ можно получить слѣдующимъ образомъ.

Называя чрезъ x и y координаты точки пересѣченія данной прямой съ прямой, соединяющей данныя точки, и полагая, что искомое отношеніе есть $\frac{m}{n}$, будемъ, какъ извѣстно, имѣть

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

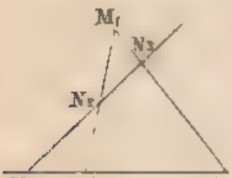
Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію данной прямой, то

$$A\frac{nx_1+mx_2}{m+n}+B\frac{ny_1+my_2}{m+n}+C=0,$$

откуда $$(Ax_1+By_1+C)n+(Ax_2+By_2+C)m=0,$$
и слѣдовательно

$$\frac{m}{n}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

78. Положимъ, что мы имѣемъ треугольникъ $M_1M_2M_3$, вершины которого опредѣляются координатами: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), и пусть нѣкоторая прямая, выражаемая уравненіемъ



Фиг. 19.

$$Ax+By+C=0,$$

пересѣкаетъ стороны этого треугольника въ точкахъ N_1, N_2, N_3 (фиг. 19). На основаніи предыдущаго будемъ имѣть:

$$\frac{M_1N_3}{N_3M_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C},$$

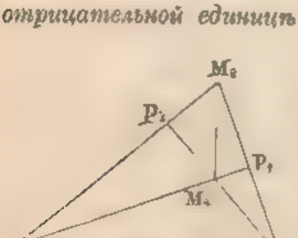
$$\frac{M_2N_1}{N_1M_3}=-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_3+By_3+C},$$

$$\frac{M_3N_2}{N_2M_1}=-\frac{Ax_3+By_3+C}{Ax_1+By_1+C}.$$

Перемноживъ почленно эти три равенства, получимъ

$$\frac{M_1N_3}{N_3M_2}\cdot\frac{M_2N_1}{N_1M_3}\cdot\frac{M_3N_2}{N_2M_1}=-1.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *произведеніе трехъ отношеній, въ которыхъ произвольная прямая дѣлитъ стороны треугольника, равняется отрицательной единицѣ* [1]).



Фиг. 20.

79. Соединимъ прямыми линіями вершины треугольника $M_1M_2M_3$ съ какою-нибудь точкою M_4 и назовемъ послѣдовательно чрезъ P_1, P_2, P_3 точки, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаютъ стороны треугольника (фиг. 20). Полагая, что координаты точки M_4 суть x_4 и y_4, будемъ имѣть, что прямая M_1P_1 выражается уравненіемъ:

$$(y_1-y_4)x-(x_1-x_4)y+(x_1y_4-y_1x_4)=0.$$

[1]) Это предложеніе было извѣстно еще въ древности, его называютъ теоремой Менелая (I в. по Р. Х.).

Поэтому находимъ, что

$$\frac{M_2P_1}{P_1M_3} = -\frac{(y_1 - y_4)x_2 - (x_1 - x_4)y_2 + (x_1y_4 - y_1x_4)}{(y_1 - y_4)x_3 - (x_1 - x_4)y_3 + (x_1y_4 - y_1x_4)}$$

или

$$\frac{M_2P_1}{P_1M_3} = -\frac{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}.$$

Точно такъ же, составивши уравненія прямыхъ M_2P_2 и M_3P_3, получимъ равенства:

$$\frac{M_3P_2}{M_3P_1} = -\frac{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}$$

и

$$\frac{M_1P_3}{P_3M_2} = -\frac{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}.$$

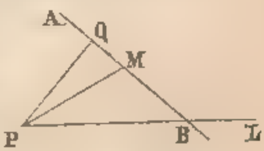
Перемножая почленно послѣднія три равенства, получимъ

$$\frac{M_2P_1}{P_1M_3} \cdot \frac{M_3P_2}{P_2M_1} \cdot \frac{M_1P_3}{P_3M_2} = 1.$$

Итакъ, *произведеніе трехъ отношеній, въ которыхъ стороны треугольника дѣлятся прямыми, соединяющими его вершины съ произвольною точкою, равняется положительной единицѣ* [1]).

80. *Найти уравненіе прямой линіи въ полярныхъ координатахъ.*

Пусть разсматриваемая прямая есть AB (фиг. 21). Назовемъ черезъ p длину перпендикуляра PQ, опущеннаго на эту прямую изъ полюса, и черезъ α уголъ QPL, составляемый имъ съ полярною осью PL. Величинами α и p положеніе прямой AB опредѣляется вполнѣ, и потому ихъ можно принять за постоянные параметры, входящіе въ искомое уравненіе.



Фиг. 21.

Называя чрезъ r и φ координаты какой-нибудь точки M, принадлежащей прямой AB, будемъ имѣть изъ треугольника PMQ

$$PQ = PM\cos MPQ = PM\cos(LPQ - LPM)$$

или

$$p = r\cos(\alpha - \varphi).$$

Это и есть искомое уравненіе, потому что оно выражаетъ общую зависимость между координатами любой точки прямой.

Легко получить то же уравненіе посредствомъ преобразованія координатъ изъ уравненія прямой въ нормальной формѣ относительно прямоугольной системы. Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь формулами для преобразованія координатъ (см. стр. 16)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

[1]) Это предложеніе извѣстно подъ названіемъ теоремы Чевы (1678).

будемъ имѣть, что уравненіе въ нормальной формѣ

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

обратится въ

$$r\cos\alpha\cos\varphi + r\sin\alpha\sin\varphi - p = 0,$$

откуда

$$p = r(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = r\cos(\alpha - \varphi).$$

§ 3. Прямая линія, какъ геометрическое мѣсто.

81. Относительное расположеніе точекъ на плоскости опредѣляется обыкновенно такъ называемыми *геометрическими условіями*. Координаты и уравненія представляютъ только средства выражать эти условія аналитически.

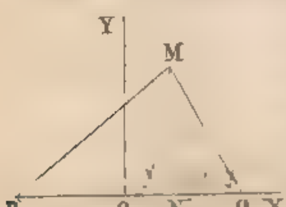
Геометрическія условія могутъ быть до безконечности разнообразны. Въ тѣхъ случаяхъ, когда они не достаточны для полнаго опредѣленія точки, ими могутъ быть выдѣляемы цѣлыя системы точекъ, расположенныхъ въ безконечномъ множествѣ опредѣленнымъ образомъ на плоскости. Совокупность положеній точекъ, подчиненныхъ общимъ выдѣляющимъ ихъ условіямъ, принято называть *геометрическимъ мѣстомъ*.

Если геометрическое мѣсто представляетъ непрерывный рядъ точекъ или линію, то оно должно выражаться уравненіемъ. Найти такое геометрическое мѣсто по даннымъ условіямъ значитъ въ Аналитической Геометріи составить уравненіе, которому удовлетворяютъ всѣ точки этого геометрическаго мѣста, т. е. уравненіе этой линіи.

Вслѣдствіе разнообразія геометрическихъ условій одна и та же линія можетъ быть геометрическимъ мѣстомъ, опредѣляемымъ различными условіями. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ геометрическое мѣсто, опредѣляемое данными условіями, есть прямая линія.

82. *Дано основаніе треугольника по величинѣ и положенію и разность квадратовъ двухъ другихъ сторонъ: найти геометрическое мѣсто вершины, противолежащей основанію.*

Примемъ основаніе PQ (фиг. 22) за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ его средины, за ось ординатъ, и назовемъ чрезъ x и y координаты вершины M относительно этихъ осей, а чрезъ $2a$ абсолютную величину основанія. Обозначая кромѣ того чрезъ k^2 данную разность квадратовъ сторонъ, будемъ имѣть по условію



Фиг. 22.

$$MP^2 - MQ^2 = k^2.$$

Но, какъ извѣстно (стр. 7),

$$MP^2 = (x+a)^2 + y^2$$

и

$$MQ^2 = (x-a)^2 + y^2.$$

Слѣдовательно,

$$(x+a)^2-(x-a)^2=k^2$$

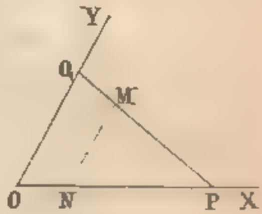
или, по раскрытіи скобокъ и приведеніи,

$$4ax-k^2=0.$$

Отсюда видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ основанію треугольника.

83. *Данъ уголъ треугольника по величинѣ и положенію и сумма двухъ прилежащихъ ему сторонъ: найти геометрическое мѣсто точки, дѣлящей третью сторону въ данномъ отношеніи.*

Пусть данное отношеніе есть $\frac{m}{n}$. Принимая стороны даннаго угла OP и OQ (фиг. 23) за оси координатъ и обозначая чрезъ x и y координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ OPQ и NPM:



Фиг. 23.

$$\frac{OP}{x}=\frac{PQ}{MQ} \quad \text{и} \quad \frac{OQ}{y}=\frac{PQ}{PM}.$$

Но по условію

$$\frac{PM}{MQ}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$\frac{PQ}{MQ}=\frac{m+n}{n} \quad \text{и} \quad \frac{PQ}{PM}=\frac{m+n}{m},$$

и слѣдовательно,

$$OP=(m+n)\frac{x}{n} \quad \text{и} \quad OQ=(m+n)\frac{y}{m}.$$

Называя же данную сумму сторонъ OP и OQ буквою s, найдемъ по сложеніи послѣднихъ равенствъ:

$$s=(m+n)\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{m}\right)$$

или

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=\frac{s}{m+n}.$$

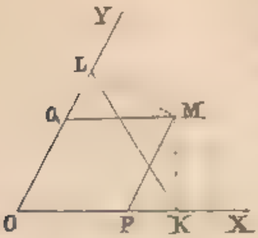
Это и есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

84. *Даны двѣ прямыя, образующія извѣстный уголъ: найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ къ нимъ при условіи, что сумма или разность разстояній этихъ перпендикуляровъ отъ вершины даннаго угла имѣетъ данную величину.*

По условію должно быть (фиг. 24)

$$OK \pm OL=a,$$

гдѣ a есть данное постоянное количество. Если двѣ данныя прямыя примемъ за оси координатъ и назовемъ уголъ между ними буквою ω, то, обозначая чрезъ x и y координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста, будемъ имѣть



Фиг. 24.

$$OK = OP + PK = x + y\cos\omega$$

и

$$OL = OQ + QL = y + x\cos\omega.$$

Слѣдовательно,

$$(x + y\cos\omega) \pm (y + x\cos\omega) = a$$

или

$$(1 \pm \cos\omega)x + (\cos\omega \pm 1)y = a.$$

Это уравненіе включаетъ въ себѣ два слѣдующія:

$$(1 + \cos\omega)(x + y) = a \quad \text{и} \quad (1 - \cos\omega)(x - y) = a.$$

Искомое геометрическое мѣсто есть, слѣдовательно, прямая, параллельная одному изъ бисектровъ даннаго угла.

85. *Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ при условіи, что прямая, соединяющая ихъ основанія, имѣетъ данное направленіе.*

Направленіе прямой KL (фиг. 24) опредѣляется ея угловымъ коэффиціентомъ, который, какъ извѣстно, равняется отрицательному отношенію разстояній OL и OK. Принимая эту величину за извѣстную и обозначая ее буквою m, будемъ имѣть:

$$OL = -m\,OK,$$

или

$$(y + x\cos\omega) = -m(x + y\cos\omega),$$

или

$$(\cos\omega + m)x + (1 + m\cos\omega)y = 0,$$

откуда видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая чрезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ.

86. *Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ въ предположеніи, что средина разстоянія между ихъ основаніями находится на данной прямой.*

Пусть уравненіе данной прямой есть

$$y = mx + n.$$

Координаты средины разстоянія KL суть:

$$x = \frac{OK}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{OL}{2}.$$

Такъ какъ, по условію, онѣ должны удовлетворять данному уравненію, то будемъ имѣть, умноживъ обѣ его части на 2,

$$OL = m \cdot OK + 2n,$$

или

$$(y + x\cos\omega) = m(x + y\cos\omega) + 2n,$$

или

$$(m - \cos\omega)x + (m\cos\omega - 1)y + 2n = 0,$$

уравнение, представляющее также прямую.

87. Если уравненія двухъ какихъ-нибудь линій

$$f(x, y, a) = 0 \qquad \text{и} \qquad F(x, y, a) = 0$$

содержатъ одинъ и тотъ же неопредѣленный параметръ a, то точки пересѣченія этихъ линій, имѣющія опредѣленное положеніе при всякомъ частномъ значеніи параметра a, будутъ перемѣщаться при его измѣненіи. Найти геометрическое мѣсто этихъ точекъ значитъ составить уравненіе, которому удовлетворяли бы всѣ значенія x и y, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ обѣихъ линій, при какомъ-угодно значеніи параметра a. Очевидно, что этимъ свойствомъ обладаетъ уравненіе, получающееся посредствомъ исключенія параметра a изъ уравненій обѣихъ линій.

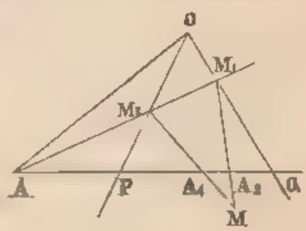
Это замѣчаніе весьма часто примѣняется съ пользою къ отысканію геометрическихъ мѣстъ. Въ слѣдующихъ примѣрахъ мы приложимъ его къ нахожденію геометрическихъ мѣстъ пересѣченія перемѣнныхъ прямыхъ линій.

88. *Стороны треугольника проходятъ чрезъ три точки, лежащія на одной прямой, а двѣ вершины его находятся на двухъ данныхъ прямыхъ; требуется найти геометрическое мѣсто третьей вершины.*

Пусть MM_1M_2 будетъ разсматриваемый треугольникъ (фиг. 25). Стороны его проходятъ чрезъ данныя точки A, A_1, A_2, а двѣ вершины M_1 и M_2 лежатъ на данныхъ прямыхъ OQ и OP. Примемъ прямыя AQ и AO за оси координатъ и положимъ:

$$AO = a, \; AA_1 = a_1, \; AA_2 = a_2,$$

$$AP = p, \; AQ = q.$$



Фиг. 25.

При такомъ обозначеніи уравненія прямыхъ OQ и OP будутъ

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{a} = 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{a} = 1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ сторона M_1M_2, какъ проходящая чрезъ начало координатъ, выразится уравненіемъ

$$y = mx,$$

гдѣ m есть неопредѣленный угловой коэффиціентъ.

Изъ этихъ уравненій находимъ координаты вершинъ M_1 и M_2, а именно: для точки M_1

$$x=\frac{aq}{a+mq},\qquad y=\frac{amq}{a+mq}$$

и для точки M_2

$$x=\frac{ap}{a+mp},\qquad y=\frac{amp}{a+mp}.$$

Уравненіе прямой M_2M, какъ проходящей чрезъ двѣ точки M_2 и A_1, координаты которыхъ извѣстны, получится въ видѣ (см. стр. 46):

$$\frac{amp}{a+mp}x-\left(\frac{ap}{a+mp}-a_1\right)y-\frac{aa_1mp}{a+mp}=0$$

или, по уничтоженіи знаменателей,

$$ampx+(aa_1+a_1mp-ap)\,y-aa_1mp=0$$

или, наконецъ, по отдѣленіи членовъ, содержащихъ множителя m,

$$mp(ax+a_1y-aa_1)+a(a_1-p)\,y=0.$$

Точно также найдемъ, что прямая M_1M выражается уравненіемъ

$$mq(ax+a_2y-aa_2)+a(a_2-q)\,y=0.$$

Точка M искомаго геометрическаго мѣста опредѣляется пересѣченіемъ прямыхъ, выражаемыхъ послѣдними двумя уравненіями, и такъ какъ эти уравненія содержатъ неопредѣленную величину m, то, исключая изъ нихъ эту величину, мы и получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста въ видѣ:

$$p(a_2-q)(ax+a_1y-aa_1)-q(a_1-p)(ax+a_2y-aa_2)=0.$$

Это уравненіе можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$a(a_2p-a_1q)\,x+(y-a)\left[a_1a_2(p-q)-pq(a_1-a_2)\right]=0$$

или

$$\frac{(a_2p-a_1q)x}{a_1a_2(p-q)-pq(a_1-a_2)}+\frac{y}{a}=1.$$

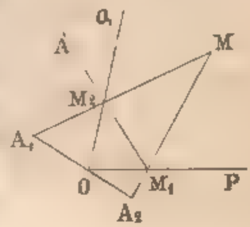
Оно выражаетъ прямую, проходящую чрезъ точку O.

89. Иногда уравненія перемѣнныхъ линій, пересѣченіемъ которыхъ опредѣляется точка геометрическаго мѣста, могутъ содержать не одну, а нѣсколько неопредѣленныхъ величинъ. Въ такомъ случаѣ нужно по условіямъ задачи составить еще дополнительныя уравненія, связывающія эти величины съ перемѣнными координатами точки геометрическаго мѣста, и именно въ такомъ числѣ, чтобы всѣ неопредѣленныя величины могли быть исключены. Результатъ этого исключенія и будетъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

Положимъ, что три данныя точки A, A_1, A_2, чрезъ которыя въ предыдущемъ примѣрѣ проходятъ стороны перемѣннаго треугольника MM_1M_2, не лежатъ на одной прямой. Но вмѣсто того точка O пересѣ-

ченія прямыхъ OP и OQ, на которыхъ должны лежать двѣ вершины M_1 и M_2 этого треугольника, находится на прямой, соединяющей двѣ изъ данныхъ точекъ A_1 и A_2 (фиг. 26).

Чтобы найти въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто третьей вершины M, примемъ за оси координатъ прямыя OP и OQ и положимъ, что координаты данныхъ точекъ A, A_1, A_2 суть послѣдовательно (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2). Называя чрезъ m_1 и m_2 неопредѣленныя разстоянія точекъ M_1 и M_2 отъ O, будемъ имѣть, что прямая M_2M, какъ проходящая чрезъ двѣ точки, координаты которыхъ извѣстны, выразится уравненіемъ



Фиг. 26.

$$(b_1 - m_2)x - a_1 y + a_1 m_2 = 0.$$

Точно также уравненіе прямой M_1M будетъ

$$b_2 x - (a_2 - m_1)y - b_2 m_1 = 0.$$

Чтобы исключить изъ этихъ уравненій два неопредѣленные параметра m_1 и m_2, замѣтимъ, что точки A, M_1 и M_2 находятся на одной прямой, и потому должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\frac{a}{m_1} + \frac{b}{m_2} = 1.$$

Изъ предыдущихъ уравненій находимъ для m_1 и m_2 слѣдующія выраженія:

$$m_1 = \frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 - y} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{b_1 x - a_1 y}{x - a_1}.$$

Внеся ихъ въ послѣднее соотношеніе, мы и получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$\frac{a(b_2 - y)}{b_2 x - a_2 y} - \frac{b(a_1 - x)}{b_1 x - a_1 y} = 1.$$

До сихъ поръ мы не принимали во вниманіе условія, что прямая A_1A_2 проходитъ чрезъ начало координатъ. Въ силу этого условія между координатами точекъ A_1 и A_2 имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1},$$

изъ котораго находимъ

$$\frac{b_2}{a_2} x - y = \frac{b_1}{a_1} x - y$$

или

$$\frac{b_2 x - a_2 y}{a_2} = \frac{b_1 x - a_1 y}{a_1},$$

откуда

$$b_2 x - a_2 y = \frac{a_2}{a_1}(b_1 x - a_1 y).$$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе обращается въ

$$\frac{a_1 a(b_2-y)}{a_2(b_1x-a_1y)}-\frac{b(a_1-x)}{b_1x-a_1y}=1,$$

или, по уничтоженіи знаменателя,

$$a_1a(b_2-y)-a_2b(a_1-x)=a_2(b_1x-a_1y),$$

или

$$a_2(b-b_1)x+a_1(a_2-a)y+a_1(ab_2-a_2b)=0,$$

или

$$\frac{a_2(b-b_1)x}{a_1(a_2b-ab_2)}+\frac{(a_2-a)y}{a_2b-ab_2}=1,$$

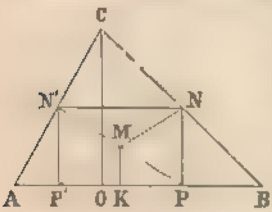
откуда

$$\frac{(b-b_1)x}{a_1b-ab_1}+\frac{(a_2-a)y}{a_2b-ab_2}=1.$$

Это есть уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки пересѣченія прямыхъ AA_1 съ OP и AA_2 съ OQ.

90. *Найти геометрическое мѣсто центра прямоугольника, вписаннаго въ данный треугольникъ.*

Пусть ABC будетъ данный треугольникъ и $PNN'P'$ вписанный въ него прямоугольникъ (фиг. 27). Примемъ основаніе AB и высоту OC треугольника за оси координатъ и обозначимъ абсолютныя величины отрѣзковъ OA, OB, OC послѣдовательно чрезъ a, b, c. Въ такомъ случаѣ уравненія сторонъ AC и BC будутъ



Фиг. 27.

$$\frac{y}{c}-\frac{x}{a}=1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{c}+\frac{x}{b}=1.$$

Если назовемъ перемѣнную высоту NP вписаннаго прямоугольника, которая представляетъ собою ординату точекъ N и N', буквою m, то изъ послѣднихъ уравненій получимъ для абсциссъ этихъ точекъ слѣдующія выраженія:

$$x_1=\frac{a(m-c)}{c} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{b(c-m)}{c}.$$

Отсюда заключаемъ, что координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста будутъ

$$y=\frac{m}{2} \quad \text{и} \quad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(a-b)(m-c)}{2c}.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ m, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$2cx=(a-b)(2y-c),$$

которое, по раздѣленіи обѣихъ частей на $(b-a)c$, приметъ видъ

$$\frac{2x}{b-a}+\frac{2y}{c}=1.$$

Оно представляетъ прямую, проходящую чрезъ средины основанія AB и высоты OC даннаго треугольника.

91. Характеръ зависимости уравненія прямой отъ неопредѣленнаго параметра можетъ служить указаніемъ, какимъ образомъ прямая измѣняетъ свое положеніе при измѣненіи этого параметра. Такъ, если коэффиціенты уравненія прямой

$$Ax + By + C = 0$$

содержатъ неопредѣленную величину m въ первой степени, т. е.

$$A = A_1 m + A_2, \quad B = B_1 m + B_2, \quad C = C_1 m + C_2,$$

то прямая эта проходитъ чрезъ постоянную точку. Дѣйствительно, въ томъ случаѣ уравненіе прямой принимаетъ видъ

$$(A_1 x + B_1 y + C_1)\, m + (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

и при всякомъ значеніи m представляетъ прямую, проходящую чрезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

положеніе которыхъ не зависитъ отъ m. Слѣдовательно, при измѣненіи перемѣнной m прямая перемѣщается, вращаясь около этой точки.

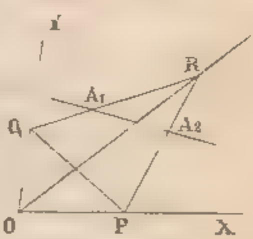
92. Воспользуемся послѣднимъ замѣчаніемъ для доказательства слѣдующаго предложенія.

Если три вершины треугольника перемѣщаются по даннымъ прямымъ, проходящимъ чрезъ одну точку, а двѣ его стороны вращаются около двухъ данныхъ точекъ, то третья сторона будетъ перемѣщаться, вращаясь также около нѣкоторой точки.

Пусть данныя прямыя, на которыхъ должны находиться вершины треугольника PQR, будутъ OP, OQ, OR (фиг. 28). Примемъ двѣ первыя изъ нихъ за оси координатъ. Въ такомъ случаѣ уравненіе прямой OR будетъ

$$y = mx,$$

гдѣ m данная величина.



Фиг. 28.

Если обозначимъ, далѣе, координаты данныхъ точекъ A_1 и A_2, около которыхъ вращаются стороны QR и PR треугольника, чрезъ (a_1, b_1) и (a_2, b_2), а координаты вершины R чрезъ (α, β), то будемъ имѣть, что сторона PR, какъ проходящая чрезъ точки A_2 и R, выразится уравненіемъ

$$(b_2 - \beta)\, x - (a_2 - \alpha)\, y + a_2 \beta - b_2 \alpha = 0.$$

Точно также уравненіе стороны QR будетъ

$$(b_1 - \beta)\, x - (a_1 - \alpha)\, y + a_1 \beta - b_1 \alpha = 0.$$

Полагая въ первомъ изъ этихъ уравненій $y=0$, а во второмъ $x=0$, получимъ слѣдующія выраженія для отрѣзковъ OP и OQ:

$$OP = x = \frac{b_2\alpha - a_2\beta}{b_2 - \beta} \quad \text{и} \quad OQ = y = \frac{a_1\beta - b_1\alpha}{a_1 - \alpha}.$$

Слѣдовательно, уравненіе стороны PQ, какъ отсѣкающей на осяхъ координатъ эти отрѣзки, будетъ

$$\frac{(b_2-\beta)x}{b_2\alpha - a_2\beta} + \frac{(a_1-\alpha)y}{a_1\beta - b_1\alpha} = 1.$$

Такъ какъ α и β суть двѣ неопредѣленныя величины, связанныя между собою зависимостью

$$\beta = m\alpha,$$

то послѣднее уравненіе, по умноженіи обѣихъ его частей на α, можно представить такъ:

$$\frac{b_2 - m\alpha}{b_2 - ma_2}\,x + \frac{a_1 - \alpha}{ma_1 - b_1}\,y - \alpha = 0.$$

Въ этомъ видѣ уравненіе содержитъ неопредѣленную величину α въ первой степени, а потому и заключаемъ, что прямая PQ проходитъ чрезъ постоянную точку, именно чрезъ точку пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ уравненіями:

$$\frac{b_2 x}{b_2 - ma_2} + \frac{a_1 y}{ma_1 - b_1} = 0$$

и

$$\frac{mx}{b_2 - ma_2} + \frac{y}{ma_1 - b_1} + 1 = 0.$$

93. Иногда условія, опредѣляющія искомое геометрическое мѣсто, бываютъ такого рода, что уравненіе этого мѣста находится быстрѣе или въ болѣе простомъ видѣ по отношенію къ выбранной соотвѣтственнымъ образомъ полярной системѣ координатъ. Это бываетъ, напр., тогда, когда точки геометрическаго мѣста опредѣляются, какъ лежащія на прямыхъ, исходящихъ изъ одной данной точки, и притомъ разстоянія ихъ отъ этой точки легко получаются въ видѣ общаго выраженія. Естественно въ такомъ случаѣ эту данную точку принять за полюсъ полярной системы координатъ.

Возьмемъ для примѣра слѣдующую задачу.

Одна вершина перемѣннаго треугольника неподвижна, другая перемѣщается по данной прямой; найти геометрическое мѣсто третьей вершины въ предположеніи, что всѣ три угла треугольника извѣстны по величинѣ.

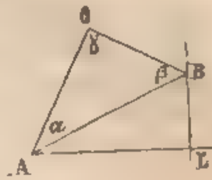
Обозначимъ внутренніе углы треугольника ABC послѣдовательно чрезъ α, β, γ и положимъ, что вершина A неподвижна, а вершина B

должна лежать на прямой BL (фиг. 29). Примемъ далѣе точку A за полюсъ полярной системы координатъ, а перпендикуляръ изъ нея на данную прямую BL за полярную ось. Относительно этой системы координаты вершины C будутъ:

$$r = AC \quad \text{и} \quad \varphi = \angle CAL,$$

а координаты вершины B:

$$r' = AB \quad \text{и} \quad \varphi' = \angle BAL.$$



Фиг. 29.

Между этими величинами существуютъ, очевидно, слѣдующія соотношенія:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi' + \alpha,$$

откуда

$$r' = r\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad \text{и} \quad \varphi' = \varphi - \alpha.$$

По условію задачи углы α, β, γ должны считаться извѣстными и, кромѣ того, должно быть извѣстно разстояніе AL данной точки отъ данной прямой. Обозначая это разстояніе буквою p, будемъ имѣть для координатъ точки B соотношеніе

$$p = r'\cos\varphi',$$

имѣющее мѣсто при всякомъ положеніи этой точки на прямой BL.

Внеся сюда вмѣсто r' и φ' ихъ предыдущія выраженія чрезъ r и φ, получимъ

$$p = r\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cos(\varphi - \alpha),$$

или

$$\frac{p\sin\beta}{\sin\gamma} = r\cos(\alpha - \varphi).$$

Это уравненіе представляетъ зависимость между координатами точки C и выражаетъ прямую (см. стр. 55), которая и есть искомое геометрическое мѣсто.

§ 4. Мнимыя точки и прямыя.

94. Изъ самаго понятія о координатахъ слѣдуетъ, что всякому положенію точки на плоскости соотвѣтствуютъ нѣкоторыя дѣйствительныя алгебраическія величины координатъ, и обратно, какія бы дѣйствительныя алгебраическія значенія ни приписывались координатамъ, онѣ опредѣляютъ нѣкоторую непремѣнно существующую на плоскости точку. Всѣми возможными сочетаніями дѣйствительныхъ величинъ абсциссы и дѣйствительныхъ величинъ ординаты исчерпываются, слѣдовательно, всѣ возможныя точки плоскости. Между тѣмъ при рѣшеніи

геометрическихъ задачъ посредствомъ алгебраическаго анализа, т. е. при отысканіи неизвѣстныхъ геометрическихъ величинъ изъ алгебраическихъ уравненій, для координатъ искомой точки могутъ получаться величины *мнимыя*. Такимъ координатамъ, на основаніи сейчасъ сказаннаго, уже не могутъ соотвѣтствовать реально существующія точки плоскости; такія координаты не имѣютъ, слѣдовательно, реальнаго геометрическаго значенія.

Если, однако, полученныя какимъ-либо образомъ мнимыя координаты принять за данныя, служащія для рѣшенія какого-нибудь вопроса, то въ результатѣ, рѣшающемъ вопросъ, искомыя величины могутъ оказаться дѣйствительными, имѣющими вполнѣ опредѣленное и реальное геометрическое значеніе, такъ же точно, какъ еслибы данными вопроса были дѣйствительныя координаты.

На этомъ основаніи въ Аналитической Геометріи признается полезнымъ и вполнѣ соотвѣтствующимъ обобщающему характеру этой науки вводить въ разсмотрѣніе не только дѣйствительныя точки, т. е. опредѣляемыя дѣйствительными координатами, но и точки, имѣющія координаты мнимыя. Ихъ называютъ *мнимыми точками*.

Понятіе о мнимой точкѣ есть совершенно абстрактное, для составленія котораго вполнѣ отвлекаются отъ первоначальнаго, такъ сказать, нагляднаго геометрическаго представленія точки и удерживаютъ только аналитически вполнѣ характеризующее ее свойство быть опредѣляемой посредствомъ алгебраическихъ значеній координатъ.

95. Самый общій видъ мнимаго количества есть, какъ извѣстно,

$$a+b\sqrt{-1},$$

гдѣ a и b количества дѣйствительныя. Такое выраженіе называется полнымъ мнимымъ количествомъ или *комплексною величиною*. Двѣ комплексныя величины

$$a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad a-b\sqrt{-1},$$

различающіяся между собою только знакомъ коэффиціента при $\sqrt{-1}$, называются *сопряженными*.

Точка M есть мнимая, когда координаты ея x и y выражаются такъ:

$$x=a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y=c+d\sqrt{-1},$$

гдѣ дѣйствительныя величины a, b, c и d могутъ имѣть какое угодно значеніе, и только въ случаѣ когда b и d одновременно равняются нулю, эта точка будетъ дѣйствительною.

Двѣ мнимыя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), которыхъ абсциссы, такъ же какъ и ординаты, суть сопряженныя комплексныя величины, называются также сопряженными между собою. Слѣдовательно, полагая, что координаты первой точки суть

$$x_1=a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y_1=c+d\sqrt{-1},$$

будемъ имѣть, что координаты сопряженной съ нею мнимой точки суть.

$$x_2 = a - b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y_2 = c - d\sqrt{-1}.$$

96. *Средина разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками есть точка дѣйствительная.*

Въ самомъ дѣлѣ опредѣляя координаты средины разстоянія между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), такъ же какъ еслибы эти точки были дѣйствительныя (см. стр. 10), находимъ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(a + b\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1})}{2} = a,$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(c + d\sqrt{-1}) + (c - d\sqrt{-1})}{2} = c.$$

Прямая, проходящая чрезъ двѣ сопряженныя мнимыя точки, есть дѣйствительная.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), какъ извѣстно, имѣетъ видъ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставивъ сюда вмѣсто x_1, y_1, x_2, y_2 ихъ предыдущія выраженія, получимъ

$$\frac{(x - a) - b\sqrt{-1}}{-2b\sqrt{-1}} = \frac{(y - c) - d\sqrt{-1}}{-2d\sqrt{-1}}$$

или, по сокращеніи,

$$\frac{x - a}{b} = \frac{y - c}{d}.$$

Это есть уравненіе нѣкоторой реально существующей на плоскости прямой, которая по величинамъ a, b, c и d можетъ быть найдена построеніемъ.

Отношеніе разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками къ разстоянію между двумя другими такими же точками есть величина дѣйствительная.

Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе δ между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) выражается, какъ извѣстно, формулой

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}.$$

Подставляя сюда предыдущія выраженія координатъ сопряженныхъ мнимыхъ точекъ, получимъ

$$\delta = 2\sqrt{b^2 + d^2 + 2bd\cos\omega}\,.\sqrt{-1},$$

гдѣ множитель $\sqrt{b^2 + d^2 + 2bd\cos\omega}$, какъ представляющій разстояніе дѣйствительной точки (b, d) отъ начала координатъ, есть величина

дѣйствительная. По раздѣленіи же всего произведенія на такое же, представляющее разстояніе между двумя другими сопряженными мнимыми точками, мнимый множитель $\sqrt{-1}$ сократится.

97. Мы видѣли, что всякая прямая на плоскости выражается уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0$$

при дѣйствительныхъ значеніяхъ его коэффиціентовъ и, обратно, каковы-бы ни были дѣйствительныя алгебраическія величины A, B, C, это уравненіе выражаетъ нѣкоторую реально существующую на плоскости прямую. Но, отыскивая коэффиціенты уравненія прямой по какимъ-нибудь условіямъ, выраженнымъ аналитически, т. е. уравненіями, мы можемъ получить для нихъ значенія мнимыя. Такая прямая, уравненіе которой имѣетъ мнимые коэффиціенты, называется *мнимою прямою.*

Понятіе о мнимыхъ прямыхъ имѣетъ тотъ же характеръ и такое же значеніе, какъ и понятіе о мнимыхъ точкахъ.

Двѣ мнимыя прямыя, въ уравненіяхъ которыхъ соотвѣтственные коэффиціенты суть мнимыя сопряженныя количества, называются *сопряженными между собою.*

Общій видъ уравненія мнимой прямой есть

$$(A + A'\sqrt{-1})x + (B + B'\sqrt{-1})y + (C + C'\sqrt{-1}) = 0; \;.\;.\;(1)$$

уравненіе сопряженной съ нею мнимой прямой будетъ

$$(A - A'\sqrt{-1})x + (B - B'\sqrt{-1})y + (C - C'\sqrt{-1}) = 0 \;.\;.\;.\;(2)$$

Эти уравненія могутъ быть представлены еще такимъ образомъ:

$$(Ax + By + C) + \sqrt{-1}\,(A'x + B'y + C') = 0$$

и

$$(Ax + By + C) - \sqrt{-1}\,(A'x + B'y + C') = 0\,.$$

Отсюда видно, что первая часть каждаго изъ нихъ обращается въ нуль только тѣми дѣйствительными значеніями x и y, которыя представляютъ точку пересѣченія дѣйствительныхъ прямыхъ

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Слѣдовательно, на всякой мнимой прямой существуетъ единственная дѣйствительная точка, именно точка пересѣченія этой прямой съ сопряженною ей мнимою прямою.

98. Уравненіе всякой прямой, проходящей чрезъ данную точку (x_1, y_1), есть, какъ извѣстно,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

гдѣ A и B неопредѣленные коэффиценты.

Если данная точка есть мнимая, опредѣляемая координатами

$$x_1 = a + b\sqrt{-1} \qquad \text{и} \qquad y_1 = c + d\sqrt{-1}\,,$$

то это уравненіе принимаетъ видъ

$$A(x - a - b\sqrt{-1}) + B(y - c - d\sqrt{-1}) = 0$$

или
$$A(x - a) + B(y - c) - \sqrt{-1}\,(Ab + Bd) = 0$$

и представляетъ, вообще говоря, мнимую прямую. Только въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты A и B удовлетворяютъ условію

$$Ab + Bd = 0\,,$$

т. е.
$$A = dk \qquad \text{и} \qquad B = -bk\,,$$

это уравненіе обращается въ

$$d(x - a) - b(y - c) = 0$$

и представляетъ дѣйствительную прямую.

Слѣдовательно, чрезъ всякую мнимую точку проходитъ единственная дѣйствительная прямая, именно прямая, соединяющая эту точку съ сопряженною ей мнимою точкою.

99. Алгебраическія уравненія высшихъ порядковъ могутъ выражать совокупности прямыхъ линій. Это бываетъ, какъ извѣстно, тогда, когда первая часть такого уравненія, представленнаго въ видѣ

$$f(x, y) = 0\,,$$

разлагается на множители первой степени (см. стр. 22).

Возьмемъ для примѣра уравненіе второй степени и положимъ сперва, что оно содержитъ только одно неизвѣстное x. Общій видъ такого уравненія есть

$$Ax^2 + Bx + C = 0\,. \qquad (3)$$

Какъ извѣстно изъ Алгебры, это уравненіе имѣетъ два рѣшенія или корня, которые будутъ дѣйствительные и различные, когда $B^2 - 4AC > 0$, дѣйствительные и равные, когда $B^2 - 4AC = 0$, и оба мнимые и сопряженные, когда $B^2 - 4AC < 0$.

Обозначая эти два корня чрезъ x_1 и x_2, будемъ имѣть

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\,,$$

и уравненіе (3) можетъ быть представлено такъ:

$$A(x - x_1)(x - x_2) = 0\,.$$

Оно выражаетъ, слѣдовательно, совокупность двухъ прямыхъ, параллельныхъ оси ординатъ и выражающихся въ отдѣльности уравненіями

$$x - x_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x - x_2 = 0\,.$$

Эти прямыя будутъ также дѣйствительныя и различныя, или совпадающія, или, наконецъ, мнимыя сопряженныя, въ трехъ упомянутыхъ сейчасъ случаяхъ.

Подобнымъ же образомъ уравненіе второй степени, содержащее только неизвѣстное y, представляетъ двѣ прямыя, параллельныя оси абсциссъ, которыя также могутъ быть дѣйствительными, или мнимыми, или совпадающими.

100. Возьмемъ теперь однородное уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными, т. е. такое, которое содержитъ только члены второго измѣренія. Общій видъ такого уравненія есть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Если возьмемъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

и обозначимъ его корни чрезъ u_1 и u_2, т. е. положимъ

$$u_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

то будемъ имѣть тождество

$$Au^2 + Bu + C = A(u - u_1)(u - u_2).$$

Полагая въ немъ $u = \dfrac{x}{y}$ и помножая обѣ его части на y^2, получимъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A(x - u_1 y)(x - u_2 y).$$

Слѣдовательно, первая часть уравненія (4) разлагается на два множителя первой степени, а потому оно представляетъ также совокупность двухъ прямыхъ, выражаемыхъ въ отдѣльности уравненіями

$$x - u_1 y = 0 \qquad \text{и} \qquad x - u_2 y = 0$$

или

$$2Ax + (B - \sqrt{B^2 - 4AC})\,y = 0 \quad \text{и} \quad 2Ax + (B + \sqrt{B^2 - 4AC})\,y = 0.$$

Это двѣ прямыя, проходящія черезъ начало координатъ. Онѣ будутъ дѣйствительныя и различныя, когда $B^2 - 4AC > 0$, мнимыя сопряженныя, когда $B^2 - 4AC < 0$, и, наконецъ, дѣйствительныя и совпадающія, когда $B^2 - 4AC = 0$.

101. Каковы бы ни были двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (4), по коэффиціентамъ этого уравненія можетъ быть найденъ уголъ, ими образуемый. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ отдѣльно эти прямыя выражаются уравненіями

$$x - u_1 y = 0 \qquad \text{и} \qquad x - u_2 y = 0,$$

то, по извѣстной общей формулѣ для выраженія тангенса угла между двумя данными прямыми (см. стр. 44), будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(u_1 - u_2)\sin\omega}{(1 + u_1 u_2) + (u_1 + u_2)\cos\omega},$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ.

Изъ предыдущихъ же выраженій для u_1 и u_2 имѣемъ

$$u_1 - u_2 = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A},$$

$$u_1 + u_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{и} \quad u_1 u_2 = \frac{C}{A}.$$

Слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}\sin\omega}{(A+C) - B\cos\omega}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Отсюда видимъ, что уголъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4), будетъ прямой, когда

$$(A + C) - B\cos\omega = 0.$$

Когда же $B^2 - 4AC = 0$, то $\varphi = 0$ и, слѣдовательно, прямыя, какъ уже показано, совпадаютъ.

Если система координатъ прямоугольная, то необходимое и достаточное условіе перпендикулярности прямыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ (4), есть

$$C = -A.$$

102. Положимъ, что требуется найти прямую, дѣлящую пополамъ уголъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4) относительно прямоугольной системы координатъ.

Уравненія двухъ прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ уголъ между прямыми

$$x - u_1 y = 0 \quad \text{и} \quad x - u_2 y = 0,$$

имѣютъ, какъ извѣстно, видъ (см. стр. 51)

$$\frac{x - u_1 y}{\sqrt{1 + u_1^2}} + \frac{x - u_2 y}{\sqrt{1 + u_2^2}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x - u_1 y}{\sqrt{1 + u_1^2}} - \frac{x - u_2 y}{\sqrt{1 + u_2^2}} = 0.$$

Перемножая ихъ почленно, получимъ уравненіе второй степени

$$\frac{(x - u_1 y)^2}{1 + u_1^2} - \frac{(x - u_2 y)^2}{1 + u_2^2} = 0,$$

представляющее совокупность этихъ прямыхъ.

По уничтоженіи знаменателей и соединеніи подобныхъ членовъ, это уравненіе принимаетъ видъ

$$(u_2^2 - u_1^2)x^2 + 2(u_2 - u_1)(1 - u_1 u_2)xy - (u_2^2 - u_1^2)y^2 = 0$$

или

$$(u_1 + u_2)x^2 + 2(1 - u_1 u_2)xy - (u_1 + u_2)y^2 = 0,$$

и такъ какъ мы видѣли, что

$$u_1 + u_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{и} \quad u_1 u_2 = \frac{C}{A},$$

то это послѣднее уравненіе обращается, по умноженіи обѣихъ частей на $-A$, въ

$$Bx^2 + 2(C - A)xy - By^2 = 0.$$

На основаніи сказаннаго выше, заключаемъ, что это уравненіе представляетъ двѣ прямыя, взаимно перпендикулярныя и притомъ всегда дѣйствительныя, потому что

$$(C-A)^2+B^2,$$

при всякихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ A, B, C, есть величина положительная.

Итакъ, линіи, дѣлящія пополамъ углы между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4), будутъ дѣйствительныя даже и тогда, когда сами эти прямыя мнимыя.

103. Самый общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными есть

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Легко обнаружить условіе, при которомъ оно также представляетъ совокупность двухъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая его относительно неизвѣстнаго y, получимъ

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}}{2C}$$

или

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)}}{2C} \; . \; (7)$$

Для того, чтобы это уравненіе представляло прямую и, слѣдовательно, имѣло видъ

$$y=mx+n,$$

необходимо и достаточно, чтобы выраженіе, находящееся во второй части подъ радикаломъ, было полнымъ квадратомъ, а это, какъ извѣстно, будетъ тогда, когда

$$(BE-2CD)^2=(B^2-4AC)(E^2-4CF) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (7) обращается въ

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm(\sqrt{B^2-4AC}\cdot x+\sqrt{E^2-4CF})}{2C}$$

или

$$(B\mp\sqrt{B^2-4AC})x+2Cy+(E\mp\sqrt{E^2-4CF})=0 \quad . \; . \; (9)$$

и включаетъ въ себѣ уравненія двухъ прямыхъ, совокупность которыхъ выражается общимъ уравненіемъ (6) при условіи (8).

Такъ какъ изъ этого условія видно, что двучлены

$$B^2-4AC \qquad \text{и} \qquad E^2-4CF,$$

при дѣйствительныхъ коэффиціентахъ уравненія (6), имѣютъ одинаковые знаки, то и заключаемъ изъ уравненія (9), что прямыя, выражаемыя имъ или, что все то же, уравненіемъ (6), будутъ дѣйствительныя, когда $B^2-4AC>0$, и мнимыя сопряженныя, когда $B^2-4AC<0$. При $B^2-4AC=0$ эти прямыя совпадаютъ.

104. Условіе (8), по раскрытіи скобокъ и сокращеніи всѣхъ членовъ на $-2C$, принимаетъ видъ

$$2(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - B^2F) = 0.$$

Здѣсь первая часть есть, очевидно, опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} = \Delta.$$

Этотъ опредѣлитель, который, будучи приравненъ нулю, даетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы общее уравненіе второй степени (6) представляло совокупность двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ прямыхъ, называется *дискриминантомъ* этого уравненія.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

СОКРАЩЕННЫЙ СПОСОБЪ И НАЧАЛА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

§ 1. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ прямой линіи.

105. При разсмотрѣніи нѣсколькихъ линій совмѣстно часто бываетъ возможно рѣшать различные вопросы и выводить нѣкоторыя общія заключенія, не обращая вниманія на частныя свойства уравненій, выражающихъ эти линіи. Въ такихъ случаяхъ уравненіе линіи представляютъ обыкновенно въ сокращенномъ видѣ

$$f=0$$

и разсуждаютъ надъ знакомъ f лишь подъ условіемъ существованія нѣкоторыхъ общихъ свойствъ для означаемаго имъ выраженія. Это составляетъ основаніе и сущность такъ называемаго сокращеннаго способа, простѣйшее примѣненіе котораго можно видѣть въ слѣдующемъ.

106. Пусть $f_1=0$ и $f_2=0$ будутъ уравненія двухъ линій одного и того же порядка m. Составивъ уравненіе

$$f_1-kf_2=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

гдѣ k есть нѣкоторая постоянная величина, легко видѣть, что оно также степени m и притомъ удовлетворяется всѣми значеніями неизвѣстныхъ, обращающими въ нуль одновременно многочлены f_1 и f_2. Слѣдовательно, уравненіе (1) представляетъ линію m-го порядка, проходящую черезъ всѣ точки пересѣченія линій

$$f_1=0 \quad \text{и} \quad f_2=0.$$

Это заключеніе не зависитъ отъ частныхъ свойствъ послѣднихъ линій и имѣетъ мѣсто, какого-бы порядка онѣ ни были.

При неопредѣленномъ k уравненіе (1) выражаетъ цѣлую систему линій, имѣющихъ однѣ и тѣ же точки пересѣченія. Такую систему называютъ *пучкомъ* линій. Каждому значенію параметра k соотвѣтствуетъ опредѣленная линія пучка. Линіи $f_1=0$ и $f_2=0$ принадлежатъ также этому пучку, и соотвѣтствующія имъ значенія параметра суть $k=0$ и $k=\infty$.

107. Положимъ теперь, что даны двѣ прямыя линіи SL_1 и SL_2, отнесенныя къ прямоугольной системѣ координатъ (фиг. 30), и пусть

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

будутъ представленныя сокращенно ихъ уравненія въ нормальной формѣ, такъ что

$$A_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1$$

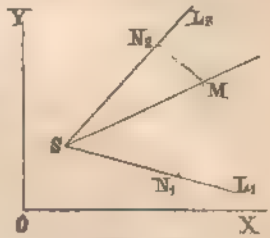
и

$$A_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2.$$

Въ этомъ случаѣ въ уравненіи

$$A_1 - kA_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

параметръ k имѣетъ простое геометрическое значеніе, которое обнаруживается слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ на прямой, выражаемой этимъ уравненіемъ, какую-нибудь точку $M(x_1, y_1)$. Подставивъ въ него координаты этой точки, получимъ тождество, изъ котораго находимъ



Фиг. 30.

$$k = \frac{A_1}{A_2} = \frac{x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 - p_1}{x_1\cos\alpha_2 + y_1\sin\alpha_2 - p_2}.$$

Члены этого отношенія представляютъ, какъ извѣстно, длины перпендикуляровъ MN_1 и MN_2, опущенныхъ изъ точки M на прямыя SL_1 и SL_2. Но изъ треугольниковъ SMN_1 и SMN_2 имѣемъ

$$MN_1 = SM\sin MSN_1$$

и

$$MN_2 = SM\sin MSN_2.$$

Слѣдовательно,

$$k = \frac{MN_1}{MN_2} = \frac{\sin MSN_1}{\sin MSN_2}$$

или, означая черезъ λ_1 и λ_2 углы, составляемые прямой (3) съ прямыми (2),

$$k = \frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}.$$

Итакъ, постоянное k означаетъ отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая (3) дѣлитъ уголъ между данными прямыми (2).

108. Данныя прямыя, пересѣкаясь въ S, образуютъ при этой точкѣ смежные углы, дополняющіе другъ друга до 180^0. Очевидно, что для всѣхъ положеній прямой (3) внутри одного и того же изъ этихъ угловъ постоянное k сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ. Напротивъ того, для двухъ какихъ-нибудь положеній этой прямой внутри двухъ названныхъ смежныхъ угловъ значенія постояннаго k имѣютъ разные знаки.

Если $k = \pm 1$, то $\sin\lambda_1 = \pm\sin\lambda_2$. Слѣдовательно, при $k = +1$ имѣемъ $\lambda_1 = \lambda_2$, а при $k = -1$ имѣемъ $\lambda_1 = \pi - \lambda_2$. Это значитъ, что прямыя, выражаемыя уравненіями

$$A_1 - A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 = 0,$$

суть бисектры двухъ угловъ, образуемыхъ прямыми

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0,$$

т. е. дѣлятъ эти углы пополамъ.

109. Если положимъ, что

$$U_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_2 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

суть уравненія данныхъ прямыхъ въ общемъ видѣ, такъ что

$$U_1 = A_1 x + B_1 y + C_1$$

и

$$U_2 = A_2 x + B_2 y + C_2,$$

то значеніе постояннаго k въ уравненіи

$$U_1 - k U_2 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

будетъ нѣсколько иное. Въ самомъ дѣлѣ, означая черезъ p_1 и p_2 длины перпендикуляровъ изъ начала координатъ на прямыя (4), а черезъ α_1 и α_2 углы этихъ перпендикуляровъ съ осью абсциссъ, будемъ имѣть, какъ извѣстно,

$$\frac{U_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1$$

и

$$\frac{U_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2.$$

Раздѣливъ одно изъ этихъ равенствъ на другое, получимъ

$$\frac{U_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{U_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1}{x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2} = \frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2},$$

откуда

$$k = \frac{U_1}{U_2} = m \frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2},$$

гдѣ

$$m = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ параметръ k означаетъ то же отношеніе синусовъ, умноженное на постоянный множитель, постоянный въ томъ смыслѣ, что онъ не измѣняется отъ измѣненія направленія прямой (5).

110. Если три прямыя

$$U_1 = 0, \; U_2 = 0, \; U_3 = 0$$

проходятъ черезъ одну точку, то въ уравненіи

$$U_1 - k U_2 = 0$$

мы можемъ дать параметру k такое значеніе, при которомъ оно будетъ представлять прямую $U_3 = 0$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ пер-

вые части уравненій $U_1 - kU_2 = 0$ и $U_3 = 0$ могутъ различаться только постояннымъ множителемъ, то должно быть

$$U_1 - kU_2 = lU_3$$

или

$$U_1 - kU_2 - lU_3 = 0.$$

Это тождество, т. е. равенство, имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x и y, является, такимъ образомъ, условіемъ или признакомъ, что три прямыя проходятъ черезъ одну точку. Помноживъ обѣ его части на какое-нибудь постоянное p_1 и положивъ $-kp_1 = p_2$ и $-lp_1 = p_3$, дадимъ ему видъ

$$p_1U_1 + p_2U_2 + p_3U_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Слѣдовательно, можно сказать, что три прямыя проходятъ черезъ одну точку, когда существуютъ три такія постоянныя количества p_1, p_2, p_3, что сумма произведеній ихъ на первыя части уравненій этихъ прямыхъ тождественно равняется нулю.

Въ примѣненіяхъ сокращеннаго способа къ прямымъ линіямъ признакъ этотъ особенно удобенъ, какъ можно видѣть изъ слѣдующихъ простыхъ доказательствъ извѣстныхъ предложеній о треугольникѣ.

111. *Бисектры трехъ угловъ треугольника проходятъ черезъ одну точку.*

Пусть M_1, M_2, M_3 будутъ вершины треугольника. Положимъ, что уравненія въ нормальной формѣ сторонъ его M_2M_3, M_1M_3 и M_1M_2 будутъ послѣдовательно:

$$A_1 = 0, \; A_2 = 0, \; A_3 = 0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія бисектровъ будутъ, какъ мы видѣли,

$$A_2 \pm A_3 = 0, \; A_3 \pm A_1 = 0, \; A_1 \pm A_2 = 0$$

Сумма первыхъ частей уравненій

$$A_2 - A_3 = 0, \; A_3 - A_1 = 0, \; A_1 - A_2 = 0$$

равняется нулю тождественно.

Это значитъ, что къ нимъ прилагается предыдущій признакъ, полагая

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1.$$

Если же возьмемъ уравненія:

$$A_2 + A_3 = 0, \; A_3 + A_1 = 0, \; A_1 - A_2 = 0,$$

или

$$A_2 + A_3 = 0, \; A_3 - A_1 = 0, \; A_1 + A_2 = 0,$$

или

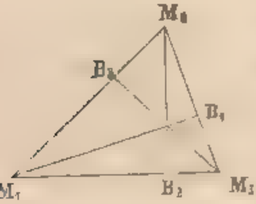
$$A_2 - A_3 = 0, \; A_3 + A_1 = 0, \; A_1 + A_2 = 0,$$

то къ нимъ прилагается предыдущій признакъ, принимая одинъ изъ множителей p_1, p_2, p_3 за -1, а два другіе за $+1$.

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что существуютъ четыре точки, въ одной изъ которыхъ пересѣкаются бисектры внутреннихъ угловъ, а въ каждой изъ остальныхъ бисектры одного внутренняго и двухъ внѣшнихъ угловъ.

112. *Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника на противоположныя стороны, проходятъ черезъ одну точку.*

Сохраняя для вершинъ и сторонъ треугольника прежнее обозначеніе, назовемъ внутренніе углы его послѣдовательно черезъ (M_1), (M_2), (M_3). Уравненіе перпендикуляра M_1B_1 (фиг. 31) будетъ



Фиг. 31.

$$A_2 - kA_3 = 0,$$

гдѣ
$$k = \frac{\sin B_1 M_1 M_3}{\sin B_1 M_1 M_2}.$$

Но изъ треугольниковъ $M_1 B_1 M_3$ и $M_1 B_1 M_2$ имѣемъ

$$\sin B_1 M_1 M_3 = \cos(M_3)$$

и
$$\sin B_1 M_1 M_2 = \cos(M_2),$$

вслѣдствіе чего уравненіе прямой $M_1 B_1$ принимаетъ видъ

$$A_2 - \frac{\cos(M_3)}{\cos(M_2)} A_3 = 0.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что уравненія перпендикуляровъ M_2B_2 и M_3B_3 суть:

$$A_3 - \frac{\cos(M_1)}{\cos(M_3)} A_1 = 0$$

и
$$A_1 - \frac{\cos(M_2)}{\cos(M_1)} A_2 = 0.$$

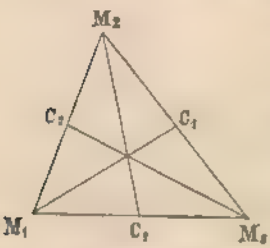
Къ этимъ тремъ уравненіямъ прилагается предыдущій признакъ, полагая

$$p_1 = \cos(M_2),\ p_2 = \cos(M_3),\ p_3 = \cos(M_1),$$

что и доказываетъ предложеніе.

113. *Медіаны, т. е. прямыя, соединяющія вершины треугольника съ срединами противоположныхъ, сторонъ, проходятъ черезъ одну точку.*

Пусть C_1, C_2, C_3 будутъ средины сторонъ треугольника (фиг. 32). Уравненіе прямой $M_1 C_1$ будетъ



Фиг. 32.

$$A_2 - kA_3 = 0,$$

гдѣ
$$k = \frac{\sin C_1 M_1 M_3}{\sin C_1 M_1 M_2}.$$

Но изъ треугольниковъ $M_1 C_1 M_3$ и $M_1 C_1 M_2$ имѣемъ

$$\frac{C_1 M_3}{C_1 M_1} = \frac{\sin C_1 M_1 M_3}{\sin(M_3)} \quad \text{и} \quad \frac{C_1 M_2}{C_1 M_1} = \frac{\sin C_1 M_1 M_2}{\sin(M_2)},$$

и такъ какъ $C_1M_3 = C_1M_2$, то

$$\frac{\sin C_1M_1M_3}{\sin(M_3)} = \frac{\sin C_1M_1M_2}{\sin(M_2)},$$

вслѣдствіе чего уравненіе прямой M_1C_1 принимаетъ видъ

$$A_2 - \frac{\sin(M_3)}{\sin(M_2)}A_3 = 0.$$

Точно также для прямыхъ M_2C_2 и M_3C_3 находимъ уравненія:

$$A_3 - \frac{\sin(M_1)}{\sin(M_3)}A_1 = 0$$

и

$$A_1 - \frac{\sin(M_2)}{\sin(M_1)}A_2 = 0.$$

Изъ того, что сумма произведеній первыхъ частей этихъ трехъ уравненій послѣдовательно на $\sin(M_2)$, $\sin(M_3)$ и $\sin(M_1)$ равняется тождественно нулю, заключаемъ о справедливости предложенія.

114. Изъ тождества (6) получается, какъ слѣдствіе, условіе пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ, которое было дано выше (см. стр. 45). Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ (6) вмѣсто U_1, U_2, U_3 означаемые ими многочлены, будемъ имѣть по приведеніи

$$(A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3)x + (B_1p_1 + B_2p_2 + B_3p_3)y + (C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3) = 0.$$

Но для того чтобы это было возможно при всякихъ значеніяхъ x и y, должно быть

$$A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0,$$
$$B_1p_1 + B_2p_2 + B_3p_3 = 0,$$
$$C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 = 0.$$

Существованіе же величинъ p_1, p_2, p_3, удовлетворяющихъ этимъ равенствамъ, возможно только при условіи совмѣстимости трехъ однородныхъ уравненій, которое, какъ извѣстно (см. стр. 30), должно заключаться въ слѣдующемъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

115. *Если два треугольника $M_1M_2M_3$ и $N_1N_2N_3$ расположены такъ, что стороны ихъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, то прямыя, соединяющія ихъ соотвѣтственныя вершины, проходятъ черезъ одну точку.*

Положимъ, что стороны перваго треугольника выражаются уравненіями

$$U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ U_3 = 0,$$

и пусть $V = 0$ будетъ уравненіе прямой, на которой находятся три точки пересѣченія сторонъ треугольниковъ. Въ такомъ случаѣ уравненія сторонъ второго треугольника могутъ быть представлены такъ:

$$V - k_1U_1 = 0, \quad V - k_2U_2 = 0, \quad V - k_3U_3 = 0,$$

гдѣ k_1, k_2, k_3 вполнѣ опредѣленныя постоянныя величины.

Такъ какъ при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x и y

$$(V - k_1 U_1) - (V - k_2 U_2) = k_2 U_2 - k_1 U_1,$$

то заключаемъ, что уравненіе

$$k_2 U_2 - k_1 U_1 = 0$$

выражаетъ прямую, проходящую, какъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U_1 = 0$ и $U_2 = 0$, такъ и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V - k_1 U_1 = 0$ и $V - k_2 U_2 = 0$. Это есть, слѣдовательно, уравненіе прямой, соединяющей вершины M_3 и N_3 данныхъ треугольниковъ.

Точно также находимъ, что уравненія прямыхъ $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ будутъ

$$k_3 U_3 - k_2 U_2 = 0$$

и

$$k_1 U_1 - k_3 U_3 = 0.$$

Изъ того, что сумма первыхъ частей этихъ трехъ уравненій тождественно равняется нулю, и убѣждаемся, что прямыя, ими выражаемыя, проходятъ черезъ одну точку.

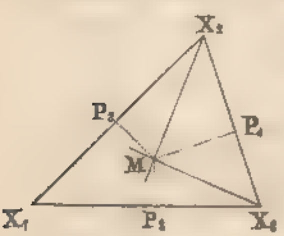
Легко доказать такимъ же образомъ и обратное предложеніе.

Треугольники, имѣющіе такое расположеніе, называются *гомологическими*; при этомъ точка, въ которой сходятся прямыя, соединяющія ихъ вершины, именуется *центромъ гомологіи*, а прямая, на которой пересѣкаются ихъ стороны,—*осью гомологіи*.

§ 2. Трилинейныя координаты.

116. Если намъ извѣстно на плоскости положеніе трехъ прямыхъ линій, не проходящихъ черезъ одну точку, то положеніе всякой точки плоскости можетъ быть опредѣляемо тремя однородными величинами, пропорціональными разстояніямъ этой точки отъ этихъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть относительно какой-нибудь прямоугольной системы координатъ три данныя прямыя, составляющія треугольникъ $X_1 X_2 X_3$ (фиг. 33), выражаются уравненіями въ нормальной формѣ:



Фиг. 33.

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

и пусть h_1, h_2, h_3 будутъ послѣдовательно разстоянія нѣкоторой точки M отъ этихъ прямыхъ. Называя черезъ x_1, x_2, x_3 три однородныя величины, пропорціональныя этимъ разстояніямъ, будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} = \frac{x_3}{h_3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{и} \quad \frac{h_1}{h_3} = \frac{x_1}{x_3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Двѣ прямыя X_3M и X_2M, проходящія черезъ вершины треугольника $X_1X_2X_3$ и пересѣкающіяся въ точкѣ M, выражаются, какъ мы знаемъ, уравненіями

$$A_1 - kA_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 - lA_3 = 0,$$

при чемъ постоянныя k и l имѣютъ слѣдующія значенія:

$$k = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{и} \quad l = \frac{MP_1}{MP_3} = \frac{h_1}{h_3}.$$

Сличая эти равенства съ равенствами (3), видимъ, что по даннымъ величинамъ x_1, x_2, x_3 опредѣляются вполнѣ величины k и l. Этими же послѣдними опредѣляются прямыя X_3M и X_2M, а съ тѣмъ вмѣстѣ и точка ихъ пересѣченія M.

117. Три однородныя величины x_1, x_2, x_3, которыми, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется положеніе точки M, называются *трилинейными координатами* этой точки. Такъ какъ положеніе точки зависитъ только отъ отношеній этихъ величинъ между собою, то онѣ могутъ быть какого угодно рода. Проще всего подъ ними понимать отвлеченныя числа.

Три прямыя X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1, положеніе которыхъ, при опредѣленіи точки трилинейными координатами, считается извѣстнымъ, составляютъ въ этомъ случаѣ систему координатъ и называются *осями координатъ*. Самый треугольникъ $X_1X_2X_3$ называютъ *координатнымъ треугольникомъ*.

Легко видѣть изъ сказаннаго, что для всѣхъ точекъ, лежащихъ на какой-нибудь изъ осей, одна изъ координатъ равняется нулю. Это значитъ, что условія

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

характеризуютъ послѣдовательно три оси координатъ.

Каждая изъ вершинъ координатнаго треугольника имѣетъ двѣ координаты, равныя нулю [1]). Равенство нулю всѣхъ трехъ координатъ ни для какой точки плоскости невозможно.

118. Если начало координатъ прямолинейной или декартовой системы, къ которой первоначально были отнесены стороны координатнаго треугольника, находится внутри его, то, согласно извѣстному правилу знаковъ для разстоянія точки отъ прямой (см. стр. 50), трилинейныя координаты каждой точки, находящейся также внутри этого треугольника, имѣютъ одинаковые знаки. Зная же, что, съ переходомъ точки съ одной стороны прямой на другую, направленіе ея разстоянія отъ этой прямой измѣняется, легко понять, что въ каждой изъ остальныхъ частей плоскости, на которыя она дѣлится тремя осями координатъ, двѣ изъ координатъ имѣютъ одинаковые знаки, а третья имъ противоположный.

[1]) Между осями координатъ не должно быть двухъ параллельныхъ между собой.

Разсматривая трилинейную систему координатъ независимо отъ первоначальной декартовой, можно ту часть плоскости, въ которой всѣ три координаты каждой точки имѣютъ одинаковые знаки, выбирать по произволу, чрезъ что знаки координатъ всѣхъ другихъ точекъ плоскости уже вполнѣ опредѣлятся.

119. На первый взглядъ можетъ показаться, что трилинейная система координатъ представляетъ лишь осложненіе декартовой, такъ какъ вмѣсто двухъ координатъ, употребляемыхъ въ послѣдней, въ ней для той же цѣли употребляется три. На самомъ же дѣлѣ, пользуясь трилинейною системой, можно достигать значительныхъ упрощеній изслѣдованій, въ особенности, когда эти изслѣдованія носятъ общій характеръ и прилагаются къ линіямъ алгебраическимъ. Причины этого заключаются въ слѣдующемъ.

Хотя трилинейныхъ координатъ точки три, но, какъ замѣчено выше, ихъ можно разсматривать, какъ отвлеченныя числа. Въ декартовой же системѣ абсцисса и ордината суть длины, выраженныя въ опредѣленныхъ единицахъ, и только тогда опредѣляютъ точку, когда единица дана.

Трилинейныя координаты точки, какъ величины, долженствующія быть лишь пропорціональными извѣстнымъ разстояніямъ, могутъ быть умножаемы или раздѣляемы на одну и ту же величину безъ измѣненія опредѣляемой ими точки, подобно тому, какъ это можно дѣлать съ тремя коэффиціентами общаго уравненія первой степени, опредѣляющаго прямую. Въ этомъ прежде всего усматривается сходство между прямои линіей и точкой по отношенію къ опредѣляемости, и, кромѣ того, этимъ можно пользоваться для упрощенія аналитическихъ преобразованій и вычисленій.

Выборомъ осей координатъ часто пользуются для упрощенія аналитическихъ формулъ и дѣйствій надъ ними, и такъ какъ въ случаѣ трилинейной системы координатъ осей три, то это упрощеніе бываетъ возможно вести дальше, чѣмъ при употребленіи декартовой системы.

Наконецъ, самое важное преимущество трилинейныхъ координатъ заключается въ томъ, что при употребленіи ихъ всѣ алгебраическія линіи выражаются уравненіями однородными, вслѣдствіе чего всѣ аналитическія операціи надъ этими уравненіями подчиняются болѣе однообразнымъ законамъ.

120. Покажемъ, напримѣръ, что прямая линія выражается въ трилинейныхъ координатахъ однороднымъ уравненіемъ первой степени. Общій видъ такого уравненія есть

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Замѣтимъ прежде всего, что въ уравненіяхъ (1), выражающихъ стороны координатнаго треугольника относительно нѣкоторой прямоугольной системы, первыя части имѣютъ слѣдующія значенія:

$$A_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1\,,$$
$$A_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2\,,$$
$$A_3 = x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3\,,$$

и если подразумѣвать подъ x и y координаты точки M, то будемъ имѣть:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = h_1\,,$$
$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = h_2\,,$$
$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = h_3\,.$$

Внеся эти выраженія для разстояній h_1, h_2, h_3 въ равенства (2), получимъ соотношенія:

$$\frac{x_1}{x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1} = \frac{x_2}{x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2} = \frac{x_3}{x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3}\,, \quad (5)$$

представляющія зависимость между трилинейными и декартовыми координатами одной и той же точки. Поэтому, подставляя въ уравненіе (4) на мѣсто перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 пропорціональныя имъ величины изъ послѣднихъ соотношеній и соединяя подобные члены, дадимъ ему видъ:

$$(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,x +$$
$$+ (a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3)\,y - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = 0\,.$$

Такъ какъ въ этомъ видѣ оно представляетъ относительно декартовой системы прямую, то такое же значеніе имѣетъ относительно трилинейной системы и уравненіе (4).

Для того, чтобы оно представляло какую угодно прямую, выражаемую въ декартовыхъ координатахъ общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0\,,$$

его коэффиціенты должны удовлетворять условіямъ:

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3 = Ak\,,$$
$$a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3 = Bk\,,$$
$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = -Ck\,,$$

изъ которыхъ, какъ изъ уравненій первой степени величины, пропорціональныя коэффиціентамъ a_1, a_2, a_3, могутъ быть найдены. При этомъ для нихъ не могутъ получиться безконечно большія значенія, потому что опредѣлитель этой системы уравненій

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \sin\alpha_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix}$$

не можетъ равняться нулю [1]).

[1]) Равенство нулю этого опредѣлителя есть условіе, при которомъ три прямыя $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, т. е. оси координатъ, проходятъ черезъ одну точку, чего, по условію, не должно быть.

Итакъ, всякая прямая выражается въ трилинейныхъ координатахъ уравненіемъ вида (4).

121. Назовемъ абсолютныя величины сторонъ координатнаго треугольника послѣдовательно черезъ d_1, d_2, d_3, и пусть S означаетъ его площадь. Соединивъ прямыми линіями вершины координатнаго треугольника съ какою-нибудь точкою M, получимъ три треугольника, для которыхъ стороны d_1, d_2, d_3 будутъ основаніями, а точка M общей вершиной. Площади этихъ треугольниковъ выразятся послѣдовательно черезъ

$$\frac{d_1 h_1}{2}, \quad \frac{d_2 h_2}{2}, \quad \frac{d_3 h_3}{2},$$

и въ случаѣ, когда точка M находится внутри координатнаго треугольника, очевидно, должно быть

$$d_1 h_1 + d_2 h_2 + d_3 h_3 = 2S \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Если точка M выйдетъ изъ внутренней области координатнаго треугольника, перейдя черезъ одну изъ сторонъ его, то одно изъ разстояній h_1, h_2, h_3 сдѣлается отрицательнымъ, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, и площадь S будетъ равняться суммѣ площадей двухъ изъ названныхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершину въ M, безъ площади того изъ нихъ, для котораго эта сторона служитъ основаніемъ.

Отсюда убѣждаемся, что соотношеніе (6) должно имѣть мѣсто при всякомъ положеніи точки M.

Но уравненіе

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

будучи однороднымъ вида (4), должно выражать нѣкоторую прямую.

Если для какой-нибудь точки этой прямой назовемъ черезъ r величину каждаго изъ отношеній (2), то будемъ имѣть:

$$x_1 = h_1 r, \quad x_2 = h_2 r, \quad x_3 = h_3 r \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Подставивъ эти координаты въ уравненіе (7), получимъ

$$(d_1 h_1 + d_2 h_2 + d_3 h_3) r = 0.$$

Такъ какъ на основаніи соотношенія (6) множитель $(d_1 h_1 + d_2 h_2 + d_3 h_3)$ не можетъ равняться нулю, то должно быть $r = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ разстояній h_1, h_2, h_3 должно быть безконечно большимъ, ибо въ противномъ случаѣ изъ равенствъ (8) мы имѣли бы $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, что невозможно.

Такимъ образомъ видимъ, что уравненіе (7) выражаетъ прямую, безконечно удаленную всѣми своими точками.

122. Положимъ теперь, что намъ даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Изъ нихъ находимъ

$$\frac{x_1}{m_2n_3 - m_3n_2} = \frac{x_2}{m_3n_1 - m_1n_3} = \frac{x_3}{m_1n_2 - m_2n_1}.$$

Этимъ опредѣляются величины x_1, x_2, x_3, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ, т. е. трилинейныя координаты точки пересѣченія данныхъ прямыхъ.

Если даны три прямыя линіи уравненіями:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0,$$
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0,$$

то условіе, при которомъ они проходятъ черезъ одну точку, получится, какъ результатъ исключенія изъ этихъ уравненій неизвѣстныхъ x_1, x_2, x_3. Это условіе будетъ, слѣдовательно,

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(m_2n_3 - m_3n_2)p_1 + (m_3n_1 - m_1n_3)p_2 + (m_1n_2 - m_2n_1)p_3 = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, когда третья прямая есть безконечно-удаленная, двѣ первыя прямыя, какъ пересѣкающіяся въ безконечно-удаленной точкѣ, должны быть параллельными между собою.

Отсюда заключаемъ, что условіе параллельности двухъ прямыхъ (9), отнесенныхъ къ трилинейной системѣ координатъ, для которой стороны координатнаго треугольника равны d_1, d_2, d_3, выражается равенствомъ

$$(m_2n_3 - m_3n_2)d_1 + (m_3n_1 - m_1n_3)d_2 + (m_1n_2 - m_2n_1)d_3 = 0. \quad . \quad (10)$$

Если обозначимъ внутренніе углы координатнаго треугольника последовательно черезъ (X_1), (X_2), (X_3), то, какъ извѣстно,

$$\frac{d_1}{\sin(X_1)} = \frac{d_2}{\sin(X_2)} = \frac{d_3}{\sin(X_3)}.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе безконечно удаленной прямой (7) и условіе параллельности двухъ прямыхъ (10) принимаютъ видъ:

$$x_1 \sin(X_1) + x_2 \sin(X_2) + x_3 \sin(X_3) = 0$$

и

$$(m_2n_3 - m_3n_2)\sin(X_1) + (m_3n_1 - m_1n_3)\sin(X_2) + (m_1n_2 - m_2n_1)\sin(X_3) = 0.$$

123. Это послѣднее условіе можно вывести также изъ условія параллельности для декартовой системы

$$AB' - BA' = 0,$$

подставляя на мѣсто A, B, A', B' соотвѣтствующіе коэффиціенты уравненій, въ которыя преобразуются уравненія (9) по замѣнѣ x_1, x_2, x_3 ихъ выраженіями черезъ x и y. Результатъ этой подстановки будетъ

$$(m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2 + m_3 \cos\alpha_3)(n_1 \sin\alpha_1 + n_2 \sin\alpha_2 + n_3 \sin\alpha_3) -$$
$$-(m_1 \sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2 + m_3 \sin\alpha_3)(n_1 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\alpha_2 + n_3 \cos\alpha_3) = 0$$

или, по преобразованіи,

$$(m_1n_2 - m_2n_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + (m_3n_1 - m_1n_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_3) +$$
$$+(m_2n_3 - m_3n_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0.$$

Здѣсь $(\alpha_2 - \alpha_1)$ есть уголъ между перпендикулярами къ двумъ сторонамъ координатнаго треугольника. Слѣдовательно, онъ или равняется углу (X_3) между этими сторонами, или дополняетъ его до 180°. Въ обоихъ случаяхъ $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin(X_3)$. На томъ же основаніи имѣемъ

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_3) = \sin(X_2) \qquad \text{и} \qquad \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \sin(X_1).$$

Вслѣдствіе этого предыдущее равенство принимаетъ видъ найденнаго выше.

124. Подобнымъ же образомъ условіе перпендикулярности для декартовой прямоугольной системы

$$AA' + BB' = 0$$

преобразуется въ

$$(m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2 + m_3 \cos\alpha_3)(n_1 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\alpha_2 + n_3 \cos\alpha_3) +$$
$$+(m_1 \sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2 + m_3 \sin\alpha_3)(n_1 \sin\alpha_1 + n_2 \sin\alpha_2 + n_3 \sin\alpha_3) = 0$$

или, по перемноженіи,

$$m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 + (m_1n_2 + m_2n_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) +$$
$$+(m_3n_1 + m_1n_3)\cos(\alpha_1 - \alpha_3) + (m_2n_3 - m_3n_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_2) = 0.$$

Въ томъ случаѣ, когда начало координатъ декартовой системы находится внутри координатнаго треугольника трилинейной, всѣ три угла $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\alpha_1 - \alpha_3)$, $(\alpha_3 - \alpha_2)$ равняются внѣшнимъ угламъ этого треугольника и, слѣдовательно,

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -\cos(X_3)$$
$$\cos(\alpha_1 - \alpha_3) = -\cos(X_2)$$
$$\cos(\alpha_3 - \alpha_2) = -\cos(X_1).$$

Вслѣдствіе этого условіе перпендикулярности прямыхъ (9) принимаетъ видъ

$$m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 - (m_1n_2 + m_2n_1)\cos(X_3) -$$
$$-(m_3n_1 + m_1n_3)\cos(X_2) - (m_2n_3 + m_3n_2)\cos(X_1) = 0.$$

125. Данное выше опредѣленіе трилинейныхъ координатъ, выражаемое равенствами (2), можно подвергнуть обобщенію, условившись понимать подъ ними величины, пропорціональныя не самимъ разстояніямъ точки отъ трехъ осей, а произведеніямъ этихъ разстояній на

нѣкоторыя постоянныя количества. Равенства (2) замѣняются въ такомъ случаѣ равенствами:

$$\frac{x_1}{\mu_1 h_1} = \frac{x_2}{\mu_2 h_2} = \frac{x_3}{\mu_3 h_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Постоянныя μ_1, μ_2, μ_3 называютъ *параметрами отношенія.*

Очевидно, что всѣ указанныя выше особенности трилинейныхъ координатъ сохраняются и при этомъ ихъ обобщеніи, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, является возможность пользоваться выборомъ значеній для параметровъ отношенія съ цѣлью упрощенія аналитическихъ преобразованій и выраженій.

Можно, напримѣръ, выбрать μ_1, μ_2, μ_3 такъ, чтобы данная произвольно точка имѣла данныя координаты.

Если положимъ въ равенствахъ (11)

$$h_1 = h_2 = h_3,$$

то будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{\mu_1} = \frac{x_2}{\mu_2} = \frac{x_3}{\mu_3}.$$

Слѣдовательно, параметры отношенія суть координаты центра круга, вписаннаго въ координатный треугольникъ.

Если же въ равенствахъ (11) положимъ

$$x_1 = x_2 = x_3,$$

то будемъ имѣть

$$\mu_1 h_1 = \mu_2 h_2 = \mu_3 h_3,$$

откуда видимъ, что параметры отношенія обратно пропорціональны разстояніямъ отъ осей той точки, для которой всѣ три координаты равны.

Полагая $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, возвратимся къ прежнему опредѣленію трилинейныхъ координатъ.

Если примемъ за параметры отношенія величины, пропорціональныя сторонамъ координатнаго треугольника, или положимъ

$$\frac{\mu_1}{\sin(X_1)} = \frac{\mu_2}{\sin(X_2)} = \frac{\mu_3}{\sin(X_3)},$$

то координаты всякой точки будутъ величины, пропорціональныя площадямъ трехъ треугольниковъ, для которыхъ эта точка есть общая вершина, а стороны координатнаго треугольника основанія. Такія координаты называются *барицентрическими.*

Безконечно удаленная прямая выражается въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

126. Уравненіе всякой алгебраической линіи въ декартовыхъ координатахъ можно сдѣлать однороднымъ, замѣняя въ немъ x и y отно-

шеніями $\frac{\xi}{\zeta}$ и $\frac{\eta}{\zeta}$ и умножая обѣ его части на ζ^m, гдѣ m есть степень уравненія. Такъ, напримѣръ, полагая

$$x = \frac{\xi}{\zeta} \quad \text{и} \quad y = \frac{\eta}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

въ общемъ уравненіи прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

дадимъ ему видъ

$$A\frac{\xi}{\zeta} + B\frac{\eta}{\zeta} + C = 0$$

или, по умноженіи на ζ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Такое преобразованіе представляетъ въ сущности не что иное, какъ введеніе явнымъ образомъ подъ обозначеніемъ ζ той единицы, въ которой черезъ x и y выражаются прямолинейныя координаты. Полагая $\zeta = 1$, возвращаемся снова къ декартовой системѣ.

Величины ξ, η, ζ, вводимыя такимъ образомъ, иногда называютъ *однородными координатами*. Не трудно показать, что онѣ, а слѣдовательно и декартовы координаты, представляютъ частный случай трилинейныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что ξ, η, ζ суть координаты точекъ относительно нѣкоторой трилинейной системы, будемъ имѣть, что три оси этой системы опредѣляются въ отдѣльности условіями:

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 0.$$

Но изъ равенствъ (12) видно, что два первыя условія, независимо отъ послѣдняго, равнозначущи съ

$$x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0;$$

послѣднее же, независимо отъ двухъ первыхъ, возможно только при

$$x = \infty \quad \text{и} \quad y = \infty.$$

Это означаетъ, что двѣ изъ осей разсматриваемой трилинейной системы совпадаютъ съ осями декартовой системы; третья же есть прямая безконечно удаленная.

Чтобы найти параметры отношенія разсматриваемой системы, положимъ

$$\xi = \eta = \zeta.$$

Въ такомъ случаѣ изъ равенствъ (12) получимъ

$$x = y = 1.$$

Слѣдовательно, точка, для которой три координаты равны между собой, находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ изъ осей. Разстояніе же ея отъ третьей есть безконечно большое.

Припоминая, что параметры отношенія должны быть обратно пропорціональны этимъ разстояніямъ, получимъ

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\mu_1}{\mu_3} = \infty,$$

откуда

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{и} \quad \mu_3 = 0.$$

Итакъ, декартова система координатъ представляетъ частный случай трилинейной системы, когда одна изъ осей послѣднеи есть безконечно удаленная и, въ то же время, соотвѣтственный этой оси параметръ отношенія равняется нулю, два же другіе параметра отношенія равны между собою.

§ 3. Начала проективной геометріи.

127. Методъ координатъ въ томъ видѣ, какъ мы его изложили въ предыдущемъ, основывается на разсмотрѣніи точки, какъ элемента всѣхъ возможныхъ геометрическихъ фигуръ.

Координаты служатъ для опредѣленія каждой точки въ отдѣльности; системы же точекъ, подчиненныя общему условію и составляющія въ совокупности то, что называютъ геометрическими мѣстами или линіями, выражаются уравненіями.

Сама плоскость, на которой разсматриваются и изучаются фигуры, представляется при этомъ, какъ система всѣхъ возможныхъ помѣщающихся на ней точекъ, изъ которыхъ посредствомъ алгебраическихъ символовъ и уравненій выдѣляются лишь нѣкоторыя въ конечномъ или безконечномъ числѣ.

Одновременно съ этимъ воззрѣніемъ и, такъ сказать, въ параллель къ нему, можетъ быть составлено другое на основаніи слѣдующихъ соображеній.

128. Выражая прямую линію общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0,$$

мы видимъ, что она опредѣляется тремя величинами

$$u_1, u_2, u_3,$$

пропорціональными его коэффиціентамъ A, B, C, точно такъ же, какъ тремя трилинейными координатами опредѣляется точка на плоскости.

Величины u_1, u_2, u_3 мы можемъ поэтому называть координатами прямой и, съ тѣмъ вмѣстѣ, самыя прямыя принимать за элементы, изъ которыхъ составляются разсматриваемыя и изучаемыя фигуры.

Всякое уравненіе, однородное относительно u_1, u_2, u_3 или, что все то же, всякое уравненіе, представляющее аналитическую зависимость между отношеніями s и t двухъ изъ этихъ величинъ къ третьей $\left(\text{напримѣръ } s = \frac{u_1}{u_3},\ t = \frac{u_2}{u_3}\right)$, выдѣляетъ изъ всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости систему прямыхъ, непрерывно слѣдующихъ одна

за другой и могущихъ быть разсматриваемыми, какъ послѣдовательныя положенія прямой, непрерывно движущейся по плоскости.

Подобно тому, какъ точка, перемѣщаясь по плоскости, описываетъ линію, такъ прямая, при непрерывномъ своемъ движеніи по плоскости, *огибаетъ* нѣкоторую линію, оставаясь къ ней касательною. Поэтому можно сказать, что всякое уравненіе, содержащее, какъ перемѣнныя величины, координаты прямой, опредѣляетъ систему прямыхъ, огибающихъ нѣкоторую линію, или, что все то же, самую линію, огибаемую этими прямыми.

Одна и та же линія можетъ быть выражена или уравненіемъ, въ которомъ перемѣнныя суть координаты ея точекъ, или уравненіемъ, въ которомъ перемѣнныя суть координаты огибающихъ ее касательныхъ. Разсмотрѣніе прямой, какъ элемента фигуръ, опредѣляемаго координатами, принято поэтому называть методомъ касательныхъ координатъ (coordonnées tangentielles).

129. Посмотримъ, что выражаетъ уравненіе первой степени въ такихъ координатахъ, т. е. уравненіе

$$Mu_1 + Nu_2 + Pu_3 = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ M, N, P суть извѣстныя постоянныя величины, а u_1, u_2, u_3 перемѣнныя координаты прямой, т. е. величины, пропорціональныя коэффиціентамъ уравненія

$$Ax + By + C = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

представляющаго относительно нѣкоторой декартовой системы любую прямую на плоскости.

Такъ какъ

$$\frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}\,,$$

то данное уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$MA + NB + PC = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и представляетъ условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія (2). Въ силу этого условія уравненіе (2) можетъ быть представлено такъ

$$P(Ax + By) - (MA + NB) = 0$$

или
$$A(Px - M) + B(Py - N) = 0$$

или
$$(Px - M) + k(Py - N) = 0\,,$$

гдѣ
$$k = \frac{B}{A} = \frac{u_2}{u_1}\,,$$

и, вслѣдствіе неопредѣленности k, оно выражаетъ, очевидно, любую прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$Px - M = 0 \quad \text{и} \quad Py - N = 0.$$

Такимъ образомъ видимъ, что уравненіемъ (1) или, что все то же, условіемъ (3) выдѣляется, изъ всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости, пучекъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ опредѣленную точку. Иначе говоря, имъ опредѣляется эта точка.

Итакъ, когда координатами опредѣляется на плоскости точка, то уравненіе первой степени относительно перемѣнныхъ, означающихъ координаты, выражаетъ прямую. Когда же координатами опредѣляется прямая, то уравненіе первой степени, въ которомъ перемѣнныя суть эти координаты, выражаетъ точку.

Алгебраическія уравненія высшихъ степеней, какъ въ тѣхъ, такъ и въ другихъ координатахъ, выражаютъ кривыя линіи. При этомъ, подобно тому, какъ, по степенямъ уравненій въ обыкновенныхъ координатахъ, линіи раздѣляются на порядки, такъ, по степенямъ уравненій въ касательныхъ координатахъ, онѣ подраздѣляются на *классы*. Линіи одного и того же порядка могутъ быть различныхъ классовъ и обратно.

130. Возможность принимать за элементы плоскихъ фигуръ прямыя линіи, точно такъ же какъ и точки, и притомъ взаимная опредѣляемость точекъ чрезъ прямыя и обратно, составляютъ основаніе особаго геометрическаго принципа, называемаго *закономъ двойственности* или *взаимности*.

Выше было сказано (см. стр. 19), что изученіе геометріи при посредствѣ алгебраическаго анализа сводится на изученіе аналитическихъ соотношеній (уравненій, тождествъ) въ связи съ ихъ геометрическимъ истолкованіемъ. Теперь мы видимъ, что одному и тому же аналитическому выводу можно дать два различныя истолкованія, смотря по тому, будутъ ли величинами, означающими координаты, опредѣляться точки или прямыя. Эти два истолкованія представляютъ два различныя геометрическія заключенія или предложенія, которыя принято называть *взаимными*, такъ какъ они взаимно переходятъ одно въ другое посредствомъ только замѣны точекъ прямыми и обратно.

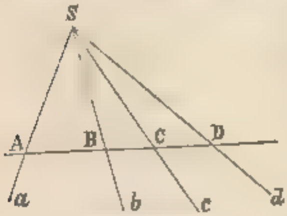
То же самое относится, очевидно, и къ самой постановкѣ вопросовъ и задачъ.

131. Система всѣхъ возможныхъ точекъ на плоскости обладаетъ тою особенностью, что для опредѣленія каждой ея точки въ отдѣльности необходимо дать два отношенія однородныхъ величинъ или двѣ величины (координаты), выраженныя въ извѣстныхъ единицахъ. То же самое имѣетъ мѣсто и для системы всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости. Обѣ эти системы называются поэтому системами *двухъ измѣреній*.

Всѣ точки, принадлежащія какой-нибудь линіи, или всѣ прямыя, огибающія линію (касательныя), представляютъ, напротивъ, системы *одного измѣренія*, такъ какъ въ нихъ для опредѣленія каждаго элемента требуется одно только отношеніе или одна величина, выраженная въ соотвѣтствующихъ единицахъ.

Простѣйшія изъ системъ одного измѣренія суть: *рядъ* всѣхъ возможныхъ точекъ на прямой и *пучекъ* всѣхъ возможныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку.

132. Если двѣ прямыя Sa и Sb (фиг. 34) принадлежатъ пучку и выражаются уравненіями $U=0$ и $V=0$, то, какъ мы видѣли, уравненіе всякой прямой Sc, принадлежащей тому же пучку, т. е. проходящей черезъ точку S, будетъ $U-kV=0$,



Фиг. 34.

гдѣ
$$k=m\frac{\sin aSc}{\sin cSb},$$
причемъ m есть постоянный множитель, не зависящій отъ положенія прямой Sc. Величиною k опредѣляется вполнѣ положеніе прямой Sc въ пучкѣ S, а потому различныя ея значенія можно разсматривать, какъ координаты прямыхъ, принадлежащихъ этому пучку, или, какъ говорятъ, лучей его.

Если мы возьмемъ еще одинъ лучъ Sd въ пучкѣ S, выражаемый уравненіемъ

$$U-lV=0,$$

то отношеніе $\frac{k}{l}$ или

$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb}:\frac{\sin aSd}{\sin dSb} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

уже не будетъ зависѣть отъ постояннаго m. Оно называется *сложнымъ* или *ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ лучей* Sa, Sb, Sc, Sd. Очевидно, что величиною его (и притомъ независимо ни отъ какихъ постоянныхъ) опредѣляется положеніе каждаго изъ этихъ четырехъ лучей, когда положеніе трехъ остальныхъ извѣстно.

133. Въ предыдущемъ два луча Sa и Sb были, такъ сказать, начальными или основными, по отношенію къ которымъ два другіе луча Sc и Sd опредѣлялись величинами k и l. Возьмемъ теперь четыре какіе-нибудь луча, опредѣляемые величинами k, l, p, q, т. е. выражаемые уравненіями

$$U-kV=0,\ U-lV=0,\ U-pV=0,\ U-qV=0,$$

и постараемся найти ихъ сложное отношеніе.

Принимая два первые изъ этихъ лучей за начальные, т. е. полагая

$$U-kV=U' \quad \text{и} \quad U-lV=V',$$

будемъ имѣть

$$U=\frac{lU'-kV'}{l-k} \quad \text{и} \quad V=\frac{U'-V'}{l-k}.$$

Вслѣдствіе этого уравненія двухъ остальныхъ лучей будутъ:

$$lU' - kV' - p(U' - V') = 0$$

и

$$lU' - kV' - q(U' - V') = 0$$

или

$$U' - \frac{k-p}{l-p} V' = 0 \quad \text{и} \quad U' - \frac{k-q}{l-q} V' = 0.$$

Согласно же предыдущему, сложное отношеніе (4) разсматриваемыхъ четырехъ лучей должно равняться частному отъ раздѣленія множителей при V' въ этихъ уравненіяхъ. Слѣдовательно, это сложное отношеніе выразится слѣдующимъ образомъ чрезъ величины k, l, p, q:

$$\frac{k-p}{l-p} : \frac{k-q}{l-q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

134. Если на прямой линіи мы имѣемъ двѣ точки A и B (фиг. 34), то, какъ мы знаемъ (см. стр. 9), за величину, опредѣляющую положеніе какой-угодно третьей точки C на этой прямой, т. е. за координату этой точки, можно принять отношеніе отрѣзковъ AC и CB. Для большей общности къ этому отношенію можетъ быть присоединенъ нѣкоторый постоянный множитель m, не зависящій отъ положенія точки C. Называя величины, опредѣляющія положеніе двухъ точекъ C и D, чрезъ k и l, будемъ имѣть

$$k = m\frac{AC}{CB} \quad \text{и} \quad l = m\frac{AD}{DB}.$$

Отношеніе этихъ величинъ

$$\frac{k}{l} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

не зависитъ, слѣдовательно, отъ постояннаго m.

Это отношеніе принято называть *сложнымъ* или *ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ* на прямой. Величиной его опредѣляется, очевидно, каждая изъ этихъ четырехъ точекъ, когда извѣстно положеніе трехъ остальныхъ.

Для четырехъ какихъ-нибудь точекъ на прямой, опредѣляемыхъ координатами k, l, p, q, сложное отношеніе будетъ выражаться также формулою (5). Полагая, напримѣръ, что этими величинами опредѣляются послѣдовательно точки A, B, C, D относительно нѣкоторыхъ двухъ начальныхъ или основныхъ точекъ M и N, будемъ имѣть

$$k = m\frac{MA}{AN},\quad l = m\frac{MB}{BN},\quad p = m\frac{MC}{CN},\quad q = m\frac{MD}{DN},$$

откуда и получимъ

$$\frac{k-p}{l-p} : \frac{k-q}{l-q} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

135. Если четыре прямыя пучка Sa, Sb, Sc, Sd пересѣчемъ какою-нибудь прямою (фиг. 34), то сложное отношеніе четырехъ точекъ A,

B, C, D, получаемыхъ въ пересѣченіи, равняется сложному отношенію четырехъ лучей пучка. Это свойство было извѣстно еще древнимъ геометрамъ, но особенно важное значеніе оно получило лишь въ новой проективной геометріи. Въ справедливости его можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Изъ треугольниковъ ASC, CSB, ASD и DSB имѣемъ:

$$\frac{AC}{SC}=\frac{\sin aSc}{\sin CAS}, \quad \frac{CB}{SC}=\frac{\sin cSb}{\sin CBS},$$
$$\frac{AD}{SD}=\frac{\sin aSd}{\sin DAS}, \quad \frac{DB}{SD}=\frac{\sin dSb}{\sin DBS}.$$

По раздѣленіи перваго изъ этихъ равенствъ на второе и третьяго на четвертое получимъ

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\sin aSc}{\sin cSb}\cdot\frac{\sin CBS}{\sin CAS} \quad \text{и} \quad \frac{AD}{DB}=\frac{\sin aSd}{\sin dSb}\cdot\frac{\sin DBS}{\sin DAS},$$

и такъ какъ здѣсь вторые множители вторыхъ частей равны между собою, то, раздѣливъ одно равенство на другое, будемъ имѣть

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{\sin aSc}{\sin cSb}:\frac{\sin aSd}{\sin dSb},$$

что и нужно было доказать.

Доказанное предложеніе позволяетъ намъ заключить, что, съ одной стороны, величина сложнаго отношенія четырехъ точекъ, получаемыхъ при пересѣченіи пучка прямою, не зависитъ отъ положенія этой сѣкущей, а съ другой, величина сложнаго отношенія прямыхъ, соединяющихъ четыре точки прямой линіи съ какою-нибудь точкою, не зависитъ отъ положенія этой послѣдней.

136. Въ томъ случаѣ, когда сложное отношеніе четырехъ точекъ на прямой или сложное отношеніе четырехъ лучей пучка равняется -1, говорятъ, что эти точки или эти лучи составляютъ *гармоническую группу*. Гармоническую группу точекъ называютъ также *гармоническимъ рядомъ*, а гармоническую группу лучей—*гармоническимъ пучкомъ*. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что при пересѣченіи гармоническаго пучка прямою получается гармоническій рядъ, и что, соединяя точки гармоническаго ряда съ какою-нибудь точкой плоскости, получаемъ гармоническій пучекъ.

Полагая, что четыре точки A, B, C, D составляютъ гармоническій рядъ, будемъ имѣть по самому опредѣленію

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1,$$

откуда

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, точки C и D дѣлятъ разстояніе между точками A и B въ одинаковомъ отношеніи, но такъ какъ эти отношенія имѣютъ разные знаки, то одна изъ точекъ C и D находится внутри отрѣзка AB, а другая внѣ его. Точки C и D называютъ при этомъ *дѣлящими* отрѣзокъ AB *гармонически*.

Представивъ послѣднее равенство въ видѣ

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{CB}{DB}$$

или

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD},$$

мы заключаемъ, что точки A и B въ свою очередь дѣлятъ отрѣзокъ CD гармонически.

Такимъ образомъ видимъ, что гармоническій рядъ состоитъ изъ двухъ паръ точекъ, при чемъ отрѣзокъ между точками каждой пары дѣлится точками другой пары въ одинаковомъ отношеніи или гармонически.

Изъ равенства (7) видно также, что когда точки A и B, составляющія одну пару гармоническаго ряда, неподвижны, а точка C перемѣщается внутри отрѣзка AB, то четвертая гармоническая точка D будетъ перемѣщаться внѣ этого отрѣзка и притомъ въ противоположномъ направленіи. При совпаденіи точки C съ A или B, точка D также совпадаетъ съ нею. Если же точка C дѣлитъ отрѣзокъ AB пополамъ, то точка D есть безконечно удаленная (см. стр. 10).

137. Въ силу указаннаго выше соотношенія между гармоническими рядами и пучками, четыре луча гармоническаго пучка должны также составлять двѣ пары; при этомъ также говорятъ, что уголъ между лучами одной пары дѣлится гармонически лучами другой. Изъ двухъ лучей, дѣлящихъ гармонически данный уголъ, одинъ помѣщается, очевидно, внутри этого угла, а другой внѣ его, т. е. внутри угла, съ нимъ смежнаго.

Соотношеніе между углами, образуемыми четырьмя лучами Sa, Sb, Sc, Sd гармоническаго пучка, состоитъ въ слѣдующемъ:

$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb} : \frac{\sin aSd}{\sin dSb} = -1$$

или

$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb} = -\frac{\sin aSd}{\sin dSb}.$$

Если уравненія двухъ лучей пучка суть

$$U = 0 \quad \text{и} \quad V = 0,$$

а уравненія двухъ другихъ лучей

$$U - kV = 0 \quad \text{и} \quad U - lV = 0,$$

то заключаемъ, что пучекъ будетъ гармоническій, когда

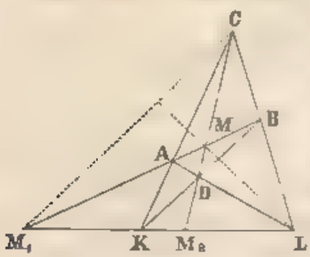
$$\frac{k}{l} = -1 \qquad \text{или} \qquad k + l = 0.$$

Отсюда усматриваемъ въ частности, что стороны угла и два его биссектра составляютъ гармоническій пучекъ.

138. Если на плоскости даны четыре точки A, B, C, D, между которыми нѣтъ трехъ, лежащихъ на одной прямой (фиг. 35), то прямыхъ, соединяющихъ ихъ между собою, будетъ шесть:

$$AB, \ CD, \ AC, \ BD, \ AD, \ BC.$$

Фигура, составляемая этими точками и прямыми, называется *полнымъ четыреугольникомъ*. Данныя точки суть его вершины, а прямыя, ихъ соединяющія,— его стороны. Двѣ изъ сторонъ, не проходящія чрезъ одну и ту же вершину, называютъ противоположными, а точку ихъ пересѣченія *діагональною точкою*. Такихъ точекъ, очевидно, три: K, L, M.



Фиг 35.

Во всякомъ полномъ четыреугольникѣ двѣ противоположныя стороны и двѣ прямыя, соединяющія точку ихъ пересѣченія съ двумя другими діагональными точками, составляютъ гармоническій пучекъ.

Это свойство выражаютъ еще такъ:

Діагональныя точки полнаго четыреугольника раздѣляютъ гармонически углы между его противоположными сторонами.

Покажемъ, напримѣръ, что уголъ ALC дѣлится гармонически прямыми LM и LK.

Пусть прямыя LA, LC и AC выражаются послѣдовательно уравненіями

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Въ такомъ случаѣ, полагая, что уравненія прямыхъ LM и AB суть

$$U' = 0 \qquad \text{и} \qquad V' = 0,$$

будемъ имѣть тождественно

$$U' = U - kV \qquad \text{и} \qquad V' = U - lW.$$

Полагая же

$$U' - V' = W'$$

и замѣчая, что

$$U' - V' = lW - kV,$$

легко видѣть, что уравненіе

$$W' = 0$$

выражаетъ прямую, проходящую, съ одной стороны, черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U' = 0$ и $V' = 0$, т. е. точку M, а съ другой, че-

...зъ точку пересѣченія прямыхъ $V=0$ и $W=0$, т. е. C. Эта прямая есть, слѣдовательно, CD.

Далѣе, уравненіе

$$W'-U=0,$$

тождественное, очевидно, съ

$$V'-kV=0,$$

выражаетъ прямую BD, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U=0$ и $W'=0$, т. е. D, и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V=0$ и $V'=0$, т. е. B.

Наконецъ, уравненіе

$$(V'-kV)+lW=0,$$

тождественное, очевидно, съ

$$U-kV=0,$$

выражаетъ прямую LK, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V'+kV=0$ и $W=0$, т. е. K, и черезъ точку пересѣченія прямыхъ AL и BL, т. е. L.

Такимъ образомъ видимъ, что четыре прямыя LA, LC, LM и LK выражаются послѣдовательно уравненіями

$$U=0, \quad V=0, \quad U-kV=0, \quad U+kV=0,$$

а это и показываетъ, согласно сказанному выше, что онѣ образуютъ пучекъ гармоническій.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что уголъ, образуемый прямыми AC и BD, раздѣляется гармонически точками L и M, а уголъ, образуемый прямыми AB и CD, точками K и L.

139. Если на плоскости даны четыре прямыя AC, AD, BC, BD (фиг. 35), между которыми нѣтъ трехъ, проходящихъ черезъ одну точку, то точекъ пересѣченія каждыхъ двухъ изъ нихъ будетъ шесть, именно: A, B, C, D, K, L.

Фигура, составляемая этими элементами, называется *полнымъ четырехсторонникомъ*. Данныя прямыя суть его стороны, а точки ихъ пересѣченія его вершины. Двѣ вершины, не лежащія на одной и той же сторонѣ, называются противоположными; прямыя же, ихъ соединяющія—*діагоналями*. Такихъ прямыхъ, очевидно, три; точки ихъ пересѣченія суть M, M_1, M_2.

На каждой діагонали полнаго четырехсторонника двѣ противоположныя вершины и двѣ точки пересѣченія съ другими діагоналями составляютъ гармоническую группу.

Это свойство выражается иначе такъ:

Діагонали полнаго четырехсторонника раздѣляютъ гармонически разстоянія между его вершинами.

Чтобы убѣдиться, напримѣръ, что точки K, L, M_1, M_2 составляютъ гармоническій рядъ, примемъ четыре точки A, B, K, L за вершины полнаго четыреугольника. Такъ какъ діагональныя точки этого четыреугольника суть M_1, C, D, то заключаемъ, на основаніи предыдущаго, что пучекъ прямыхъ CK, CL, CM_1 и CD есть гармоническій. Отсюда же слѣдуетъ, что и рядъ точекъ K, L, M_1, M_2, какъ получаемый при пересѣченіи этого пучка прямою KL, есть также гармоническій.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что ряды A, B, M, M_1 и C, D, M, M_2 суть гармоническіе.

Доказанныя гармоническія свойства полныхъ четыреугольниковъ и четырехсторонниковъ, такъ же какъ и сами эти фигуры, представляются взаимными между собою и могутъ служить примѣрами для уясненія закона двойственности.

140. Если какой-нибудь пучекъ прямыхъ пересѣчемъ двумя прямыми, не принадлежащими ему, то каждый изъ двухъ рядовъ точекъ, получаемыхъ при пересѣченіи, можетъ быть разсматриваемъ, какъ *центральная проекція* или *перспектива* другого. При этомъ каждой точкѣ одного ряда будетъ соотвѣтствовать опредѣленная и единственная точка другого, и сложное отношеніе любыхъ четырехъ точекъ одного ряда будетъ равняться сложному отношенію соотвѣтственныхъ точекъ другого.

Всякія двѣ системы одного измѣренія, связанныя между собою такою зависимостью, какимъ бы образомъ эта послѣдняя ни устанавливалась, называются *проективно-соотвѣтственными* или просто *проективными между собой* [1]). Проективно-соотвѣтственными могутъ быть, слѣдовательно, также два пучка прямыхъ или пучекъ прямыхъ и рядъ точекъ.

141. Равенство сложныхъ отношеній будучи, характеристическимъ признакомъ проективнаго соотвѣтствія, въ свою очередь есть только слѣдствіе однозначности этой зависимости, т. е. того ея свойства, что каждому элементу одной системы соотвѣтствуетъ (алгебраически) только одинъ элементъ другой.

Въ силу этого свойства двѣ величины x и x', опредѣляющія положенія элементовъ въ той и другой системѣ, должны быть связаны алгебраическимъ уравненіемъ первой степени по отношенію къ каждой, т. е. уравненіемъ вида

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Если возьмемъ въ одной системѣ четыре элемента, опредѣляемые величинами k, l, p, q, и положимъ, что соотвѣтственные имъ элементы

[1]) Самая зависимость называется *проективнымъ соотвѣтствіемъ*. Кромѣ того, ее называютъ *гомографіей*, а также *коллинеаціей*.

другой системы опредѣляются величинами k', l', p', q', то будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} Akk' + Bk + Ck' + D = 0 \\ All' \; + Bl + Cl' + D = 0 \\ App' + Bp + Cp' + D = 0 \\ Aqq' + Bq + Cq' + D = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Помножая первое изъ этихъ равенствъ на $Ap' + B$, а третье на $Ak' + B$ и вычитая результаты, получимъ

$$(Ak'+B)(Ap'+B)(k-p)+(Ap'+B)(Ck'+D)-(Ak'+B)(Cp'+D)=0,$$

откуда

$$(Ak'+B)(Ap'+B)(k-p)=(AD-CB)(k'-p').$$

Точно такъ же изъ второго и третьяго равенствъ получимъ

$$(Al'+B)(Ap'+B)(l-p)=(AD-CB)(l'-p').$$

Раздѣливъ почленно эти послѣднія равенства, найдемъ

$$\frac{Ak'+B}{Al'+B}\cdot\frac{k-p}{l-p}=\frac{k'-p'}{l'-p'}.$$

Подобнымъ же образомъ, пользуясь первымъ, вторымъ и четвертымъ изъ равенствъ (9), будемъ имѣть

$$\frac{Ak'+B}{Al'+B}\cdot\frac{k-q}{l-q}=\frac{k'-q'}{l'-q'}.$$

Изъ этого и предыдущаго равенства, наконецъ, находимъ по раздѣленіи

$$\frac{k-p}{l-p}:\frac{k-q}{l-q}=\frac{k'-p'}{l'-p'}:\frac{k'-q'}{l'-q'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Этотъ выводъ, представляющій равенство сложныхъ отношеній соотвѣтственныхъ элементовъ, есть не что иное, какъ результатъ исключенія коэффиціентовъ A, B, C, D изъ уравненій (9), а потому его можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} kk', & k, & k', & 1 \\ ll', & l, & l', & 1 \\ pp', & p, & p', & 1 \\ qq', & q, & q', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тождественность этого соотношенія съ (10) не трудно провѣрить.

142. Посредствомъ уравненія (8) вполнѣ опредѣляется зависимость между x и x', т. е. проективное соотвѣтствіе между двумя системами одного измѣренія, когда извѣстны величины, пропорціональныя коэффиціентамъ A, B, C, D. Эти же величины опредѣляются изъ трехъ первыхъ равенствъ группы (9), когда даны три пары величинъ k и k', l и l', p и p'.

Это показываетъ, что проективное соотвѣтствіе вполнѣ опредѣляется или устанавливается посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ.

143. Проективнымъ соотвѣтствіемъ могутъ быть связаны не только элементы двухъ различныхъ системъ, но и элементы одной и той же системы. Мы можемъ, напримѣръ, предположить, что двѣ прямыя, между точками которыхъ имѣетъ мѣсто проективное соотвѣтствіе, совпадаютъ между собою, вслѣдствіе чего соотвѣтственными будутъ точки одной и той же прямой, разсматриваемыя, однако, какъ принадлежащія двумъ различнымъ рядамъ. То же самое можно сказать о двухъ пучкахъ, когда ихъ центры совпадаютъ [1]).

Во всѣхъ этихъ случаяхъ, такъ же какъ и для различныхъ системъ, соотвѣтствіе опредѣляется посредствомъ уравненія (8) или равенства сложныхъ отношеній (10). Но, при соотвѣтствіи между элементами одной и той же системы, x и x' въ уравнении (8) могутъ означать координаты соотвѣтственныхъ элементовъ относительно однихъ и тѣхъ же начальныхъ или основныхъ элементовъ. Если при этомъ предположимъ, что $x = x'$, то будемъ имѣть, что соотвѣтственные элементы совпадаютъ.

Такой элементъ, который совпадаетъ съ своимъ соотвѣтствующимъ называется *двойнымъ*.

При $x = x'$ уравненіе (8) обращается въ

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0$$

и въ этомъ видѣ опредѣляетъ двойные элементы. Такъ какъ оно второй степени, то даетъ для x два дѣйствительныя или мнимыя значенія. Отсюда заключаемъ, что двойныхъ элементовъ не можетъ быть болѣе двухъ или что ихъ вообще два, но они могутъ быть дѣйствительными или мнимыми.

Такъ, напримѣръ, при проективномъ соотвѣтствіи между точками прямой, на ней существуютъ двѣ (дѣйствительныя или мнимыя) двойныя точки, и, при проективномъ соотвѣтствіи между лучами пучка, въ немъ существуютъ два двойные луча.

144. Когда на прямой линіи разсматриваются два проективно-соотвѣтственные ряда, то каждую точку этой прямой можно принимать за точку того или другого ряда, такъ что соотвѣтственныхъ ей точекъ будетъ, вообще говоря, двѣ. Если же какой-нибудь точкѣ прямой соотвѣтствуетъ одна и та же точка въ обоихъ рядахъ или, другими словами, если двѣ точки соотвѣтствуютъ другъ другу независимо отъ того, къ какому ряду каждую изъ нихъ относимъ, то ихъ называютъ *сопряженными*.

---

[1]) Центромъ пучка называютъ точку, въ которой пересѣкаются всѣ составляющія его прямыя.

Предполагая, что n и n' суть координаты двухъ сопряженныхъ точекъ, мы будемъ имѣть, что уравненіе (8) должно удовлетворяться какъ при $x = n$ и $x' = n'$, такъ и при $x = n'$, $x' = n$, т. е. должно быть

$$Ann' + Bn + Cn' + D = 0$$

и

$$Ann' + Bn' + Cn + D = 0\,,$$

откуда, по вычитаніи,

$$(B - C)(n - n') = 0$$

и если только n не равняется n', т. е. разсматриваемыя точки не совпадаютъ, то $B = C$. Уравненіе (8) обращается, слѣдовательно, въ

$$Axx' + B(x + x') + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и такъ какъ въ этомъ видѣ оно симметрично относительно x и x', то каждыя двѣ точки, опредѣляемыя этими величинами, должны быть сопряженными.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что при проективномъ соотвѣтствіи между точками прямой или вовсе не существуетъ сопряженныхъ точекъ (кромѣ двойныхъ), или всѣ соотвѣтственныя между собою точки суть сопряженныя.

Соотвѣтствіе этого послѣдняго рода называется *инволюціоннымъ соотвѣтствіемъ* или просто *инволюціей*. Очевидно, что оно можетъ имѣть мѣсто и между элементами другихъ системъ первой степени.

145. Посредствомъ уравненія (11) вполнѣ опредѣляется инволюція, когда извѣстны величины, пропорціональныя коэффиціентамъ A, B, D.

Это позволяетъ заключить, что инволюція опредѣляется или устанавливается двумя парами сопряженныхъ элементовъ, и что между шестью величинами, опредѣляющими положеніе трехъ паръ сопряженныхъ элементовъ, должно существовать опредѣленное соотношеніе.

Полагая, что эти величины суть k и k', l и l', m и m', будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} Akk' + B(k + k') + D = 0 \\ All' + B(l + l') + D = 0 \\ Amm' + B(m + m') + D = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Если вычтемъ второе изъ этихъ равенствъ изъ перваго, то получимъ

$$A(kk' - ll') + B(k + k' - l - l') = 0$$

или

$$(Ak' + B)k - Bl' = (Al' + B)l - Bk'\,,$$

откуда, отнимая отъ обѣихъ частей по $Ak'l'$, найдемъ

$$(Ak' + B)(k - l') = (Al' + B)(l - k')\,.$$

Подобнымъ же образомъ второе и третье изъ равенствъ (12) даютъ

$$(Al'+B)(l-m')=(Am'+B)(m-l'),$$

и такъ же точно изъ перваго и третьяго изъ равенствъ (12) получимъ

$$(Am'+B)(m-k')=(Ak'+B)(k-m').$$

Перемноживъ почленно три последнія равенства, найдемъ по сокращеніи

$$(k-l')(l-m')(m-k')=(l-k')(m-l')(k-m')$$

или

$$\frac{(k-l')(l-m')(m-k')}{(k'-l)(l'-m)(m'-k)}=-1\,, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

что и представляетъ упомянутое соотношеніе. Такъ какъ оно есть результатъ исключенія изъ равенствъ (12) коэффиціентовъ A, B, D, то должно быть равнозначуще съ

$$\begin{vmatrix} kk', & k+k', & 1 \\ ll', & l+l', & 1 \\ mm', & m+m', & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Тождественность этихъ двухъ соотношеній легко можетъ быть провѣрена.

146. Положимъ, что мы имѣемъ шесть прямыхъ линій, составляющихъ пучекъ и выражаемыхъ уравненіями:

$$\left.\begin{matrix} U-kV=0, & U-k'V=0 \\ U-lV=0, & U-l'V=0 \\ U-mV=0, & U-m'V=0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Перемножая ихъ первыя части по двѣ, получимъ три многочлена второй степени:

$$\begin{aligned} (U-kV)(U-k'V) &= U^2-(k+k')\,UV+kk'V^2, \\ (U-lV)(U-l'V) &= U^2-(l+l')\,UV+ll'V^2, \\ (U-mV)(U-m'V) &= U^2-(m+m')\,UV+mm'V^2. \end{aligned}$$

Если допустимъ, что сумма произведеній этихъ многочленовъ на нѣкоторые постоянные множители p, q, r тождественно равняется нулю, то не трудно убѣдиться, что шесть разсматриваемыхъ прямыхъ составляютъ три пары сопряженныхъ лучей инволюціоннаго пучка.

Въ самомъ дѣлѣ, допускаемое тождество

$$p(U-kV)(U-k'V)+q(U-lV)(U-l'V)+r(U-mV)(U-m'V)=0 \ldots (16)$$

можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$U^2(p+q+r)-UV[p(k+k')+q(l+l')+r(m+m')]+$$
$$+V^2(pkk'+qll'+rmm')=0\,,$$

и для того, чтобы оно имѣло мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ, необходимо должно быть

$$\left.\begin{array}{c} p+q+r=0 \\ p(k+k')+q(l+l')+r(m+m')=0 \\ pkk'+qll'+rmm'=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

Эти же послѣднія равенства, которыя можно разсматривать, какъ три однородныя уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными p, q, r, возможны совмѣстно (см. стр. 30) только при условіи

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 \\ k+k' & , & l+l' & , & m+m' \\ kk' & , & ll' & , & mm' \end{vmatrix} = 0,$$

тождественномъ съ (14) или (13), которыми, какъ показано, и выражается инволюціонное соотвѣтствіе.

Очевидно, что и обратно, при условіи, что шесть прямыхъ (15) составляютъ инволюцію, т. е. при существованіи соотношенія (14) или (13), имѣютъ мѣсто равенства (17), а съ тѣмъ вмѣстѣ и тождество (16).

Послѣднее можетъ, слѣдовательно, также служить признакомъ или условіемъ, при которомъ прямыя (15) составляютъ инволюцію.

При помощи этого признака мы можемъ, напримѣръ, убѣдиться, что три пары лучей, дѣлящихъ гармонически одинъ и тотъ же уголъ, составляютъ инволюцію.

Если стороны угла выражаются уравненіями $U=0$ и $V=0$, то уравненія этихъ трехъ паръ лучей будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} U-kV=0,\ U+kV=0 \\ U-lV=0,\ U+lV=0 \\ U-mV=0,\ U+mV=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Условіе (16) принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ

$$p(U^2-k^2V^2)+q(U^2-l^2V^2)+r(U^2-m^2V^2)=0$$

и, очевидно, удовлетворяется тождественно при

$$p=l^2-m^2,\ q=m^2-k^2,\ r=k^2-l^2.$$

Въ томъ же можно убѣдиться, замѣчая, что уравненія (18) представляютъ частный случай уравненій (15), когда

$$k'=-k,\ l'=-l,\ m'=-m,$$

а въ такомъ случаѣ существованіе соотношеній (13) и (14) очевидно.

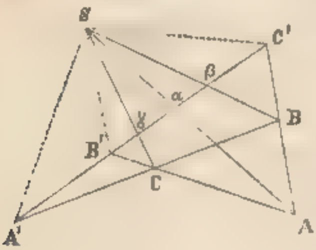
Изъ сказаннаго заключаемъ также, что и пары точекъ, дѣлящихъ гармонически отрѣзокъ между двумя данными точками, составляютъ инволюцію.

147. Покажемъ въ заключеніе, что шесть прямыхъ линій, соединяющихъ произвольную точку плоскости съ шестью вершинами полнаго четырехсторонника, составляютъ инволюціонный пучекъ.

Пусть стороны разсматриваемаго четырехсторонника BA', AB', AC' и $A'C'$ (фиг. 36) выражаются послѣдовательно уравненіями:

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,,\ U_4=0\,,$$

и пусть, кромѣ того, уравненія трехъ прямыхъ, соединяющихъ произвольную точку S съ тремя точками A', B', C', въ которыхъ четвертая сторона пересѣкаетъ три остальныя, будутъ послѣдовательно



Фиг. 36.

$$V_1=0\,,\ V_2=0\,,\ V_3=0\ \ .\ .\ (19)$$

Въ такомъ случаѣ должны существовать три такія постоянныя величины k, l и m, что будемъ имѣть тождественно

$$V_1=U_4-kU_1\,,\ V_2=U_4-lU_2\,,\ V_3=U_4-mU_3\,.$$

Такъ какъ при этомъ

$$V_2-V_3=mU_3-lU_2\,,$$

$$V_3-V_1=kU_1-mU_3\,,$$

$$V_1-V_2=lU_2-kU_1\,,$$

то убѣждаемся, что три уравненія

$$V_2-V_3=0\,,\ V_3-V_1=0\,,\ V_1-V_2=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

представляютъ прямыя, соединяющія точку S съ тремя точками A, B, C пересѣченія прямыхъ

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,.$$

Если перемножимъ попарно первыя части уравненій (19) и (20), то будемъ имѣть тождественно

$$V_1(V_2-V_3)+V_2(V_3-V_1)+V_3(V_1-V_2)=0\,.$$

Слѣдовательно, эти уравненія удовлетворяютъ условію (16) при $p=q=r=1$, а потому выражаемые ими лучи пучка S составляютъ инволюцію.

Сопряженными лучами будутъ, очевидно, тѣ, которые проходятъ черезъ противоположныя вершины A и A', B и B', C и C'.

148. Изъ сказаннаго легко убѣдиться также, что шесть точекъ, въ которыхъ стороны полнаго четыреугольника пересѣкаются произвольною прямою, составляютъ инволюцію.

Въ самомъ дѣлѣ, мы предполагали въ предыдущемъ, что стороны четырехсторонника и точка S (фиг. 36) взяты произвольно; но очевидно, что для построенія той же самой фигуры можно взять произвольно четыре точки A, B, C, S и прямую $A'C'$. Принимая эти четыре точки за вершины полнаго четыреугольника, будемъ имѣть, что его стороны пересѣкаются прямою $A'C'$ въ тѣхъ же шести точкахъ α, β, γ, A', B', C', въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ пучекъ S, по доказанному инволюціонный. Отсюда слѣдуетъ, что и эти шесть точекъ также составляютъ инволюцію.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ОБЩІЯ СВОЙСТВА ЛИНІЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Предварительныя замѣчанія.

149. Линіи второго порядка суть простѣйшія и, вмѣстѣ съ тѣмъ, наиболѣе изученныя изъ алгебраическихъ *кривыхъ* Еще въ глубокой древности онѣ были изучаемы греческими философами и геометрами, какъ получающіяся отъ пересѣченія различными плоскостями прямого круглаго конуса. Это составляетъ причину, по которой имъ и въ настоящее время дается названіе *коническихъ сѣченій*. Первое извѣстное систематическое сочиненіе объ этихъ кривыхъ принадлежитъ Аполлонію, ученому александрійской школы, жившему около 247 года до Р. Х. Съ возникновеніемъ Аналитической Геометріи и введеніемъ метода координатъ, изученіе коническихъ сѣченій сдѣлалось наиболѣе легкимъ, и теорія этихъ кривыхъ пріобрѣла такую общность, какой не могла имѣть до того времени.

150. Самый общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными есть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При данной прямолинейной системѣ координатъ это уравненіе представляетъ вполнѣ опредѣленную линію только тогда, когда въ немъ коэффиціенты A, B, ... F имѣютъ вполнѣ опредѣленныя алгебраическія значенія. Разсматриваемое въ предположеніи, что коэффиціенты его суть какія угодно алгебраическія величины, это уравненіе можетъ относительно всякой прямолинейной системы координатъ представлять любую линію второго порядка, а потому и называется *общимъ уравненіемъ* этихъ кривыхъ. Понятно, что всѣ заключенія, выводимыя изъ него въ этомъ предположеніи, будутъ относиться ко всѣмъ возможнымъ линіямъ второго порядка и будутъ, слѣдовательно, представлять *общія свойства* этихъ линій.

Когда линія второго порядка должна быть найдена по какимъ-нибудь геометрическимъ условіямъ, то, предполагая, согласно сейчасъ

сказанному, что эта линія выражается уравненіемъ (1), мы будемъ имѣть дѣло съ опредѣленіемъ, по даннымъ условіямъ, коэффиціентовъ этого уравненія.

Но такъ какъ значеніе уравненія (1) не измѣняется отъ умноженія всѣхъ его коэффиціентовъ на одну и ту же постоянную величину, то вопросъ сводится къ нахожденію какихъ-либо шести величинъ, пропорціональныхъ коэффиціентамъ A, B, ... F, или, что все то же, къ нахожденію отношеній какихъ-нибудь пяти изъ этихъ коэффиціентовъ къ шестому. Эти отношенія суть, слѣдовательно, *параметры* линіи второго порядка (см. стр. 45), и потому можно сказать, что общее уравненіе линій второго порядка зависитъ отъ пяти параметровъ.

Если линія второго порядка проходитъ черезъ начало координатъ, то въ уравненіи (1) послѣдній коэффиціентъ F долженъ равняться нулю. Если же линія не проходитъ черезъ начало координатъ, то, раздѣляя обѣ части уравненія (1) на F, мы можемъ послѣдній коэффиціентъ сдѣлать равнымъ единицѣ. Уравненіе линіи второго порядка можетъ, слѣдовательно, быть разсматриваемо въ этомъ случаѣ въ видѣ

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0,$$

гдѣ A', B', ... E' суть отношенія пяти первыхъ коэффиціентовъ уравненія (1) къ послѣднему.

151. *Линія второго порядка вполнѣ опредѣляется пятью принадлежащими ей точками.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ даны пять точекъ: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и (x_5, y_5). Предполагая, что линія второго порядка, проходящая чрезъ эти точки, выражается уравненіемъ (1), и подставляя въ него на мѣсто неизвѣстныхъ x и y координаты каждой изъ данныхъ точекъ, мы получимъ пять равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Относительно коэффиціентовъ A, B ... F эти равенства суть однородныя уравненія первой степени, а потому изъ нихъ (см. стр. 30) величины, пропорціональныя этимъ коэффиціентамъ, могутъ быть найдены. При этомъ для каждаго отношенія двухъ какихъ-нибудь коэффиціентовъ получается единственное значеніе. Такимъ образомъ, предложеніе доказано.

Изъ сказаннаго видимъ, между прочимъ, что уравненіе линіи второго порядка, проходящей чрезъ пять данныхъ точекъ, получается, какъ результатъ исключенія коэффиціентовъ A, B ... F изъ шести уравненій (1) и (2).

Въ частныхъ случаяхъ, при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между координатами данныхъ точекъ, изъ уравненій (2) могутъ получаться неопредѣленныя значенія для отношеній искомыхъ коэффиціентовъ. Это показываетъ, что пять данныхъ точекъ, вполнѣ достаточныя для опредѣленія проходящей чрезъ нихъ кривой второго порядка по своему числу, могутъ быть недостаточны для этой цѣли по своему расположенію.

152. Предположимъ теперь, что кривая второго порядка дана, и постараемся найти точки ея пересѣченія съ прямою.

Пусть данная кривая выражается общимъ уравненіемъ (1) и пусть уравненіе разсматриваемой прямой будетъ взято въ видѣ

$$y = mx + n \qquad (3)$$

Чтобы найти координаты искомыхъ точекъ, нужно эти уравненія рѣшить совмѣстно.

Исключая изъ нихъ неизвѣстное y, получимъ

$$Ax^2 + Bx(mx+n) + C(mx+n)^2 + Dx + E(mx+n) + F = 0$$

или

$$Mx^2 + Nx + P = 0, \qquad (4)$$

гдѣ полагается

$$M = A + Bm + Cm^2,$$
$$N = (B + 2Cm)n + (D + Em),$$
$$P = Cn^2 + En + F.$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія мы имѣемъ квадратное уравненіе (4). Каждой найденной изъ него абсциссѣ соотвѣтствуетъ единственная ордината, которая опредѣлится изъ уравненія (3).

Уравненіе (4), смотря по значенію его коэффиціентовъ M, N, P можетъ имѣть или два дѣйствительные, или два мнимые корня. Такими же въ соотвѣтственныхъ случаяхъ будутъ и искомыя точки пересѣченія. Не дѣлая различія между этими случаями, можно сказать, что *линія второго порядка пересѣкается всякою прямою въ двухъ* (дѣйствительныхъ или мнимыхъ) *точкахъ*.

153. Когда двѣ точки пересѣченія дѣйствительныя и различныя, то прямая (3) называется сѣкущей, а отрѣзокъ ея между точками пересѣченія — *хордою*.

Когда уравненіе (4) имѣетъ равные корни, то двѣ точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, хорда исчезаетъ или равняется нулю. Въ этомъ случаѣ прямая (3) называется *касательною* къ кривой (1).

Такъ какъ мнимые корни всякаго квадратнаго уравненія съ одною неизвѣстною суть величины сопряженныя, то и точки пересѣченія кривой второго порядка съ прямою въ томъ случаѣ, когда онѣ мнимыя, будутъ сопряженными (см. стр. 66). Хотя дѣйствительнаго пересѣченія въ этомъ случаѣ не происходитъ и, слѣдовательно, не полу-

чается дѣйствительной хорды, но, тѣмъ не менѣе, можно говорить о хордѣ, образуемой прямою (3), какъ о нѣкоторой алгебраической величинѣ, и мы знаемъ уже (см. стр. 67), что средина такой хорды, какъ средина разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками, есть всегда точка дѣйствительная.

154. Если случится, что въ уравненіи (4) коэффиціентъ M равняется нулю и, слѣдовательно, угловой коэффиціентъ въ уравненіи прямой (3) удовлетворяетъ условію

$$A+Bm+Cm^2=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то будемъ имѣть

$$Nx+P=0\,,$$

откуда опредѣляется только одна точка пересѣченія. Но не трудно показать, что въ этомъ случаѣ другая точка пересѣченія прямой (3) съ кривой (1) будетъ безконечно удаленною (см. стр. 10).

Въ самомъ дѣлѣ, рѣшеніе уравненія (4) представляется, какъ извѣстно, въ видѣ

$$x=\frac{-N\pm\sqrt{N^2-4MP}}{2M}.$$

Но такъ какъ при всякихъ значеніяхъ M, N и P имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{-N+\sqrt{N^2-4MP}}{2M}=\frac{2P}{-N-\sqrt{N^2-4MP}}$$

и

$$\frac{-N-\sqrt{N^2-4MP}}{2M}=\frac{2P}{-N+\sqrt{N^2-4MP}},$$

то этому рѣшенію можно дать видъ

$$x=\frac{2P}{-N\mp\sqrt{N^2-4MP}},$$

откуда видно, что при $M=0$ одно изъ значеній x есть $x=-\frac{P}{N}$, а другое $x=\frac{2P}{0}=\infty$.

Такъ какъ условіе (5) не содержитъ вовсе n, то при этомъ условіи линія второго порядка, выражаемая общимъ уравненіемъ, пересѣкается въ безконечно удаленной точкѣ не только прямою (3), но и всякою прямою, съ ней параллельною.

Изъ сказаннаго легко заключить, что при $A=0$ линія, выражаемая уравненіемъ (1), пересѣкается въ безконечно удаленной точкѣ всѣми прямыми, параллельными оси абсциссъ, а при $C=0$ всѣми прямыми, параллельными оси ординатъ.

155 Уравненіе (3) представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ, когда въ немъ $n=0$ и когда, слѣдовательно, оно имѣетъ видъ

$$y=mx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Для того, чтобы эта прямая встрѣчала кривую (1) въ безконечно удаленной точкѣ, нужно дать угловому коэффиціенту значеніе, удовлетворяющее условію (5).

Но изъ условія (5), какъ квадратнаго уравненія относительно m, получается для этой величины два значенія дѣйствительныя или мнимыя. Это показываетъ, что чрезъ начало координатъ проходятъ всегда двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, пересѣкающія кривую второго порядка въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

Чтобы найти уравненія этихъ прямыхъ, нужно величину m, опредѣленную изъ условія (5), внести въ уравненіе (6), или обратно; иначе говоря, нужно исключить m изъ этихъ двухъ уравненій.

Результатомъ исключенія будетъ уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

которое, какъ мы уже знаемъ (см. стр. 70), представляетъ совокупность двухъ прямыхъ дѣйствительныхъ и различныхъ, когда $B^2-4AC>0$, дѣйствительныхъ и совпадающихъ, когда $B^2-4AC=0$, и, наконецъ, мнимыхъ, когда $B^2-4AC<0$.

Итакъ, однородное уравненіе, которое получаемъ, приравнивая нулю три члена второго измѣренія въ общемъ уравненіи линіи второго порядка, выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ начало координатъ и встрѣчающихъ эту линію въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

156. Такъ какъ принимается, что на каждой прямой безконечно удаленная точка единственна (см. стр. 10), то всѣ параллельныя прямыя, встрѣчающія линію второго порядка въ безконечности, имѣютъ съ нею одну и ту же общую безконечно удаленную точку. Отсюда слѣдуетъ, что линія второго порядка не можетъ имѣть другихъ безконечно удаленныхъ точекъ кромѣ тѣхъ, въ которыхъ она пересѣкается прямыми, проходящими черезъ начало координатъ. Это показываетъ, что линія второго порядка не можетъ имѣть болѣе двухъ безконечно удаленныхъ точекъ.

Смотря по числу дѣйствительныхъ безконечно удаленныхъ точекъ, линіи второго порядка раздѣляются на три рода: 1) *эллипсы*, не имѣющіе вовсе безконечно удаленныхъ точекъ, 2) *гиперболы*, имѣющія двѣ различныя безконечно удаленныя точки, и 3) *параболы*, имѣющія двѣ совпадающія безконечно удаленныя точки.

На основаніи предыдущаго видимъ, что общее уравненіе второй степени (1) должно представлять эллипсъ, когда $B^2 - 4AC < 0$, гиперболу, когда $B^2 - 4AC > 0$, и параболу, когда $B^2 - 4AC = 0$.

Ниже мы разсмотримъ болѣе подробно значенія общаго уравненія въ этихъ трехъ случаяхъ.

157. Для того, чтобы прямая (3) была касательною къ кривой второго порядка, выражаемой общимъ уравненіемъ, нужно, чтобы уравненіе (4), опредѣляющее абсциссы точекъ пересѣченія этихъ линій, имѣло равные корни, что, какъ извѣстно, можетъ имѣть мѣсто только при условіи

$$N^2 - 4MP = 0$$

или

$$[(B+2Cm)n+(D+Em)]^2=4(A+Bm+Cm^2)(Cn^2+En+F), \quad . \quad . \quad (7)$$

которое, слѣдовательно, и можетъ быть разсматриваемо, какъ условіе соприкосновенія.

Въ предположеніи, что прямая проходитъ черезъ начало координатъ это условіе обращается въ

$$(D+Em)^2 = 4(A+Bm+Cm^2)F$$

или

$$(E^2-4CF)m^2+2(DE-2BF)m+(D^2-4AF)=0\ . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Изъ него, какъ квадратнаго уравненія относительно m, получаются для этой величины два дѣйствительныя или мнимыя значенія. Это показываетъ, что черезъ начало координатъ проходятъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя касательныя ко всякой линіи второго порядка.

Такъ какъ всякая точка плоскости можетъ быть принята за начало координатъ и относительно всякой системы координатъ линія второго порядка выражается уравненіемъ вида (1), то заключаемъ изъ сказаннаго, что *чрезъ всякую точку проходятъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя касательныя къ какой угодно линіи второго порядка.*

Отсюда слѣдуетъ, что въ касательныхъ координатахъ (см. стр. 90) линіи второго порядка должны выражаться также уравненіями второй степени. Это значитъ, что *всякая линія второго порядка есть въ то же время второго класса* (см. стр. 91).

158. Чтобы получить уравненія касательныхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, нужно величину m, опредѣленную изъ условія (8), подставить въ уравненіе прямой

$$y = mx,$$

или обратно. Другими словами, нужно исключить m изъ этихъ двухъ уравненій. Результатъ исключенія представляется въ видѣ однороднаго уравненія

$$(D^2-4AF)x^2+2(DE-2BF)xy+(E^2-4CF)y^2=0,$$

выражающаго совокупность этихъ двухъ касательныхъ.

Изъ этого уравненія видимъ, что двѣ касательныя изъ начала координатъ будутъ дѣйствительныя, когда

$$(DE-2BF)^2 > (D^2-4AF)(E^2-4CF),$$

и мнимыя, когда

$$(DE-2BF)^2 < (D^2-4AF)(E^2-4CF).$$

Въ случаѣ, когда

$$(DE-2BF)^2 = (D^2-4AF)(E^2-4CF) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

обѣ эти касательныя совпадаютъ и потому можно сказать, что чрезъ начало координатъ проходитъ въ этомъ случаѣ только одна касательная къ линіи (1).

Равенству (9), которое, такимъ образомъ, есть условіе существованія только одной касательной, проходящей черезъ начало координатъ, можно дать видъ

$$F(4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F)=0.$$

Оно можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда

$$F=0,$$

или когда

$$4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F=0.$$

Въ первомъ изъ этихъ случаевъ, линія, выражаемая уравненіемъ (1), проходитъ черезъ начало координатъ или, другими словами, точка, черезъ которую проводится касательная, лежитъ на самой кривой.

Во второмъ же случаѣ, какъ было показано выше (см. стр. 73), вообще уравненіе (1) представляетъ совокупность двухъ прямыхъ. Чтобы пояснить этотъ случай, замѣтимъ, что подъ касательной мы разумѣемъ такую прямую, которая съ линіей, выражаемой уравненіемъ (1), имѣетъ двѣ совпадающія общія точки. Когда уравненіе (1) выражаетъ двѣ прямыя, то прямая, проходящая черезъ начало координатъ и встрѣчающая ихъ въ двухъ совпадающихъ точкахъ, будетъ, очевидно, одна. Это есть прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ. Исключеніе представляетъ только тотъ случай, когда обѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (1), сами совпадаютъ, и когда условіе (8) имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи m.

§ 2. Центръ и діаметры.

159. Мы видѣли выше, что для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія линіи второго порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

съ прямою

$$y=mx+n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

служитъ уравненіе

$$Mx^2+Nx+P=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

гдѣ

$$\left.\begin{array}{l} M = A + Bm + Cm^2 \\ N = (B + 2Cm)n + (D + Em) \\ P = Cn^2 + En + F \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Предположимъ, что сѣкущая прямая (2) проходитъ черезъ начал координатъ и, слѣдовательно, $n = 0$.

Если при этомъ двѣ точки пересѣченія ея съ кривою (1) будутъ симметричны относительно начала координатъ (см. стр. 6), то корни уравненія (3) должны имѣть равныя абсолютныя величины и противоположные знаки.

Это можетъ быть только тогда, когда въ этомъ уравненіи коэффиціентъ N равняется нулю, т. е., какъ видно изъ (4), когда

$$D + Em = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Это послѣднее равенство есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ хорда, образуемая прямой

$$y = mx,$$

имѣетъ средину въ началѣ координатъ или дѣлится въ началѣ координатъ пополамъ.

160. Когда $D = 0$ и $E = 0$, то это условіе выполняется, каково бы ни было m, т. е. каково бы ни было направленіе хорды. Это позволнетъ сдѣлать слѣдующее заключеніе:

Если въ уравненіи, представляющемъ линію второго порядка, не существуетъ членовъ съ первыми степенями неизвѣстныхъ, то всѣ хорды, проходящія черезъ начало координатъ, дѣлятся въ немъ пополамъ.

Очевидно, что справедливо и обратное заключеніе, потому что условіе (5) можетъ выполняться при всякомъ m только тогда, когда $D = 0$ и $E = 0$.

Точка, въ которой дѣлятся пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды кривой второго порядка, называется *центромъ* этой кривой. Можно, слѣдовательно, сказать, что центръ кривой второго порядка есть точка, относительно которой всѣ точки этой линіи расположены симметрично.

161. Предыдущимъ заключеніемъ можно воспользоваться, чтобы найти центръ линіи второго порядка, данной общимъ уравненіемъ (1).

Для этого положимъ, что точка, которой координаты суть

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b,$$

есть центръ, и измѣнимъ систему координатъ такъ, чтобы начало новой системы находилось въ этой точкѣ и оси были параллельны прежнимъ. Формулы такого преобразованія координатъ будутъ:

$$x = x' + a \quad \text{и} \quad y = y' + b,$$

и, слѣдовательно, уравненіе кривой (1) обратится въ

$$A(x'+a)^2+B(x'+a)(y'+b)+C(y'+b)^2+D(x'+a)+E(y'+b)+F=0$$

или

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Aa+Bb+D)x'+(Ba+2Cb+E)y'+$$
$$+Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0.$$

На основаніи предыдущаго, въ этомъ уравненіи не должно существовать членовъ съ первыми степенями неизвѣстныхъ, т. е. должно быть

$$2Aa+Bb+D=0 \quad \text{и} \quad Ba+2Cb+E=0.$$

Это значитъ, что координаты a и b центра относительно первоначальной системы координатъ должны удовлетворять двумъ уравненіямъ первой степени:

$$2Ax+By+D=0 \quad \text{и} \quad Bx+2Cy+E=0. \quad \ldots \quad (6)$$

Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности выражаетъ прямую, и центръ есть, слѣдовательно, точка пересѣченія этихъ прямыхъ.

Такъ какъ точка пересѣченія всякихъ двухъ прямыхъ есть единственная, то заключаемъ, что *всякая линія второго порядка можетъ имѣть только одинъ центръ.*

162. Рѣшая совмѣстно уравненія (6), получимъ для координатъ центра слѣдующія выраженія чрезъ коэффиціенты уравненія кривой

$$a=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}, \quad b=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

Эти выраженія представляютъ конечныя и опредѣленныя величины, когда $B^2-4AC<0$ или когда $B^2-4AC>0$. Если же $B^2-4AC=0$, то величины эти суть безконечно большія. На этомъ основаніи всѣ кривыя второго порядка раздѣляются на два отдѣла: 1) кривыя *центральныя*, имѣющія опредѣленный центръ, и 2) кривыя, *не имѣющія центра* или, точнѣе говоря, имѣющія центромъ безконечно удаленную точку.

Къ первому отдѣлу принадлежатъ всѣ эллипсы и гиперболы, ко второму только параболы.

Наконецъ, возможенъ случай неопредѣленнаго центра, когда оба уравненія (6) выражаютъ одну и ту же прямую (см. стр. 45) и когда, слѣдовательно, каждая точка этой прямой имѣетъ свойства центра. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) представляетъ не кривую линію, а совокупность двухъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ неопредѣленности выраженій для a и b имѣемъ

$$2CD-BE=0, \; 2AE-BD=0, \; B^2-4AC=0 \quad \ldots \quad (7)$$

Помножая первое изъ этихъ равенствъ на $-D$, второе на $-E$, третье на $-2F$ и складывая результаты, получимъ

$$2(4ACF-CD^2-AE^2+BDE-B^2F)=0,$$

а это, какъ извѣстно, и есть то условіе, при которомъ уравненіе (1) выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ (см. стр. 73).

163. Если изъ двухъ послѣднихъ равенствъ (7) опредѣлимъ C и E и подставимъ въ уравненіе (1), то это послѣднее, по умноженіи всѣхъ коэффиціентовъ на $4A$, приметъ видъ

$$4A^2x^2+4ABxy+B^2y^2+4ADx+2BDy+4AF=0$$

или

$$(2Ax+By)^2+2D(2Ax+By)+4AF=0$$

или

$$(2Ax+By+D)^2-(D^2-4AF)=0.$$

Здѣсь первая часть разлагается на два множителя первой степени, которые, будучи приравнены отдѣльно нулю, дадутъ два уравненія первой степени.

$$2Ax+By+D+\sqrt{D^2-4AF}=0$$

и

$$2Ax+By+D-\sqrt{D^2-4AF}=0,$$

представляющія двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, параллельныя съ прямой, выражаемой уравненіями (6).

Итакъ, въ случаѣ неопредѣленнаго центра, двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ второй степени, параллельны между собою.

164. Мы видѣли (см. стр. 110), что совокупность двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка, проходящихъ чрезъ начало координатъ, выражается уравненіемъ

$$(D^2-4AF)x^2+2(DE-2BF)xy+(E^2-4CF)y^2=0.$$

Въ томъ случаѣ, когда начало координатъ находится въ центрѣ и когда, слѣдовательно, $D=E=0$, это уравненіе обращается въ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

которое, какъ было показано выше (см. стр. 109), представляетъ совокупность двухъ прямыхъ, встрѣчающихъ кривую въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Отсюда заключаемъ, что двѣ прямыя линіи, проходящія черезъ центръ кривой второго порядка и встрѣчающія ее въ безконечности, суть касательныя къ этой кривой въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Такія прямыя называются *ассимптотами*.

Изъ предыдущаго легко заключить, что ассимптоты гиперболы суть дѣйствительныя прямыя, а ассимптоты эллипса мнимыя.

165. Обозначимъ черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концовъ хорды, образуемой прямою (2), т. е. точекъ, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ кривую (1). Въ такомъ случаѣ координаты средины этой хорды опредѣлятся по формуламъ:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Но абсциссы x_1 и x_2 суть, какъ мы знаемъ, корни уравненія (3), а потому по свойству квадратныхъ уравненій, должно быть

$$x_1 + x_2 = -\frac{N}{M}$$

или, по замѣнѣ M и N ихъ значеніями,

$$x_1 + x_2 = -\frac{(B + 2Cm)n + (D + Em)}{A + Bm + Cm^2},$$

откуда для абсциссы средины хорды получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$x = -\frac{(B + 2Cm)n + (D + Em)}{2(A + Bm + Cm^2)} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

Такъ какъ соотвѣтствующая ордината можетъ быть опредѣлена изъ уравненія прямой (2), то для нея получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$y = -\frac{(B + 2Cm)mn + (D + Em)m}{2(A + Bm + Cm^2)} + n,$$

которое, по приведеніи къ одному знаменателю и соединеніи подобныхъ членовъ, принимаетъ видъ

$$y = \frac{(2A + Bm)n - (D + Em)m}{2(A + Bm + Cm^2)} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

166. Если помножимъ выраженіе (8) на $(2A + Bm)$, а выраженіе (9) на $(B + 2Cm)$ и результаты сложимъ, то получимъ соотношеніе

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y = -(D + Em)$$

или $$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) = 0, \quad \ldots \ldots (10)$$

не содержащее вовсе n и потому имѣющее мѣсто при всякомъ значеніи этого коэффиціента.

Но уравненіе (2) при данномъ m и неопредѣленномъ n выражаетъ всѣ возможныя прямыя, имѣющія данное направленіе и, слѣдовательно, параллельныя между собою. Соотношеніе (10) представляетъ поэтому зависимость между координатами срединъ всѣхъ хордъ, параллельныхъ между собою: оно есть, слѣдовательно, уравненіе геометрическаго мѣста срединъ всѣхъ этихъ хордъ. Такъ какъ оно первой степени, то заключаемъ, что *средины всѣхъ хордъ, параллельныхъ между собою, лежатъ на одной прямой.*

Такая прямая называется *діаметромъ* линіи второго порядка.

Изъ сказаннаго видимъ, что уравненіе (10) есть общее уравненіе діаметра.

167. Уравненіе (10) при всякомъ значеніи m представляетъ вполнѣ опредѣленную прямую, исключая того случая, когда

$$2A + Bm = B + 2Cm = D + Em = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) выражаетъ, какъ показано выше, совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ.

Мы можемъ поэтому сказать, что *въ кривыхъ второго порядка всякому направленію хордъ соотвѣтствуетъ единственный и опредѣленный діаметръ.*

Представляя уравненіе (10) въ видѣ

$$y = m'x + n',$$

мы будемъ имѣть, что угловой коэффиціентъ діаметра выражается слѣдующимъ образомъ:

$$m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Отсюда видимъ, что съ измѣненіемъ направленія хордъ измѣняется, вообще говоря, и направленіе діаметра.

Исключеніе представляетъ только тотъ случай, когда $B^2 - 4AC = 0$, т. е. когда кривая второго порядка не имѣетъ центра.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \quad \text{или} \quad \frac{2A}{B} = \frac{Bm}{2Cm},$$

откуда

$$\frac{2A + Bm}{B + 2Cm} = \frac{2A}{B},$$

слѣдовательно,

$$m' = -\frac{2A}{B}.$$

Направленіе діаметра не зависитъ, такимъ образомъ, отъ направленія хордъ. Это значитъ, что *всѣ діаметры кривой второго порядка, не имѣющей центра, параллельны между собою.*

168. При условіи $B^2 - 4AC = 0$ уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

представляющее двѣ прямыя, встрѣчающія линію второго порядка (1) въ безконечности, обращается, по умноженіи обѣихъ частей на $4A$, въ

$$(2Ax + By)^2 = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{2A}{B}x.$$

Это есть прямая, имѣющая направленіе діаметровъ. Слѣдовательно, всѣ діаметры кривой, не имѣющей центра, встрѣчаютъ ее въ безконечности.

Отвлекаясь отъ безконечно удаленныхъ точекъ, можно поэтому сказать, что *каждый изъ діаметровъ кривой, не имѣющей центра, пересѣкаетъ эту кривую только въ одной точкѣ.*

Относительно кривыхъ центральныхъ тѣмъ же свойствомъ обладаютъ прямыя, параллельныя ассимптотамъ.

169. Общее уравненіе діаметра (10)

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) = 0$$

можетъ быть представлено еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$(2Ax + By + D) + m(Bx + 2Cy + E) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

откуда видимъ, что всякій діаметръ проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$2Ax + By + D = 0$$

и

$$Bx + 2Cy + E = 0.$$

Эта точка, какъ мы уже знаемъ, есть центръ кривой, и потому заключаемъ, что *всѣ діаметры всякой центральной линіи второго порядка проходятъ черезъ ея центръ.*

Уравненіе (12) обращается въ

$$2Ax + By + D = 0$$

при $m = 0$ и въ

$$Bx + 2Cy + E = 0$$

при $m = \infty$. Слѣдовательно, прямыя, выражаемыя этими уравненіями, суть также діаметры, и легко понять, что первый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя оси абсциссъ, а второй всѣ хорды, параллельныя оси ординатъ.

170. Соотношеніе (11), представляющее зависимость между угловыми коэффиціентами хордъ и соотвѣтствующаго имъ діаметра, можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ:

$$2A + B(m + m') + 2Cmm' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Такъ какъ въ этомъ видѣ оно симметрично относительно m и m', т. е. не измѣняется отъ взаимнаго перемѣщенія этихъ величинъ, то заключаемъ, что, при измѣненіи направленія хордъ въ направленіе діаметра, это послѣднее измѣняется въ первоначальное направленіе хордъ. Всякому діаметру соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, другой діаметръ, проходящій черезъ средины хордъ, параллельныхъ первому, и въ то же время параллельный хордамъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ первый.

Такіе два діаметра, изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, называютъ *сопряженными.*

Для всякой центральной линіи второго порядка существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ. Соотношеніе (13) можетъ, слѣдовательно, быть разсматриваемо, какъ представляющее зависимость между угловыми коэффиціентами двухъ какихъ бы то ни было сопряженныхъ діаметровъ центральной линіи, выражаемой уравненіемъ (1).

171. Въ томъ случаѣ, когда уравненіе, представляющее кривую второго порядка, не содержитъ члена съ произведеніемъ перемѣнныхъ, т. е. когда $B = 0$, діаметры кривой, параллельные осямъ координатъ, будутъ сопряженные. Въ самомъ дѣлѣ, соотношеніе (13) обращается въ этомъ случаѣ въ

$$A + Cmm' = 0,$$

откуда и видно, что, при $m = 0$, $m' = \infty$ или обратно. Это слѣдуетъ также изъ того, что при $B = 0$ уравненія

$$2Ax + By + D = 0 \quad \text{и} \quad Bx + 2Cy + E = 0,$$

представляющія два діаметра, которые проходятъ чрезъ средины хордъ, параллельныхъ осямъ координатъ, обращаются въ

$$2Ax + D = 0 \quad \text{и} \quad 2Cy + E = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что когда въ уравненіи кривой второго порядка (1)

$$B = D = E = 0,$$

т. е. когда это уравненіе имѣетъ видъ

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,$$

оси координатъ суть два сопряженные діаметра, и обратно: относительно осей координатъ, совпадающихъ съ двумя сопряженными діаметрами, линія второго порядка выражается уравненіемъ этого вида.

172. Если діаметръ кривой второго порядка перпендикуляренъ къ хордамъ, черезъ средины которыхъ онъ проходитъ, то его называютъ *осью* или *главнымъ діаметромъ* этой кривой, а точки, въ которыхъ онъ пересѣкаетъ кривую, ея *вершинами*.

Для центральной кривой такому діаметру соотвѣтствуетъ, очевидно, другой, сопряженный съ нимъ и обладающій тѣмъ же свойствомъ. Поэтому найти оси центральной кривой значитъ найти сопряженные діаметры, перпендикулярные между собою.

Если оси координатъ, къ которымъ отнесена линія второго порядка, прямоугольныя, то перпендикулярность между сопряженными діаметрами, которыхъ угловые коэффиціенты суть m и m', выразится условіемъ

$$mm' = -1.$$

Вслѣдствіе этого зависимость (13) между этими коэффиціентами обратится въ

$$2A + B(m + m') - 2C = 0,$$

откуда

$$m + m' = \frac{2(C - A)}{B}.$$

Имѣя, такимъ образомъ, сумму и произведеніе коэффиціентовъ m и m', мы можемъ опредѣлить ихъ, какъ корни квадратнаго уравненія

$$Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе при всякихъ значеніяхъ A, B и C имѣетъ дѣйствительные и различные корни, то заключаемъ, что *всякая центральная кривая второго порядка имѣетъ двѣ дѣйствительныя оси.*

Послѣднее квадратное уравненіе не даетъ опредѣленныхъ значеній для m только въ томъ случаѣ, когда $B=0$ и $A=C$. Мы увидимъ вскорѣ, что въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) выражаетъ кругъ, для котораго, какъ извѣстно, всякій діаметръ имѣетъ свойства оси.

173. Когда центръ кривой находится въ началѣ координатъ, то уравненіе всякаго діаметра будетъ,

$$y=mx.$$

Исключая m изъ этого и предыдущаго уравненія, получимъ однородное уравненіе

$$Bx^2+2(C-A)xy-By^2=0,$$

представляющее совокупность двухъ осей кривой.

Выше мы имѣли случай убѣдиться (см. стр. 71), что этимъ уравненіемъ выражаются два бисектра угловъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ

$$Ax^2-Bxy+Cy^2=0.$$

Отсюда заключаемъ, что *оси центральной кривой второго порядка дѣлятъ пополамъ углы между ассимптотами.*

174. Для кривыхъ, не имѣющихъ центра, очевидно, не существуетъ и сопряженныхъ діаметровъ, потому что всѣ діаметры такой кривой имѣютъ одно и то же направленіе.

Легко видѣть, однако, что всякая такая кривая имѣетъ ось и, притомъ, только одну.

Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы діаметръ былъ осью кривой, нужно, чтобы выполнялось условіе перпендикулярности его къ соотвѣтствующимъ ему хордамъ.

Замѣчая же, что для линій, не имѣющихъ центра, угловой коэффиціентъ діаметра есть

$$m'=\frac{2A}{B},$$

будемъ имѣть, что это условіе перпендикулярности въ случаѣ прямоугольной системы координатъ есть

$$m\frac{2A}{B}=1,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ хордъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ.

Отсюда находимъ, что

$$m=\frac{B}{2A},$$

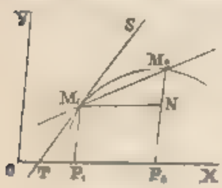
чѣмъ опредѣляется направленіе хордъ, соотвѣтствующихъ оси. Подставляя же это значеніе m въ общее уравненіе (10) діаметровъ, получимъ уравненіе самой оси [1]).

175. Двѣ точки плоскости, лежащія на одномъ перпендикулярѣ къ какой-нибудь данной прямой и на одинаковыхъ отъ нея разстояніяхъ, называются *симметричными* относительно этой прямой. Если какая-нибудь фигура обладаетъ свойствомъ, что каждой ея точкѣ соотвѣтствуетъ другая точка, принадлежащая также этой фигурѣ и симметричная съ первой относительно нѣкоторой прямой, то эту прямую называютъ *осью симметріи* фигуры, а самое фигуру *симметричною* относительно этой оси.

Замѣчая, что для всякой кривой второго порядка концы хорды, соотвѣтствующей ея оси, симметричны относительно этой послѣдней, мы можемъ заключить, что всякая такая кривая симметрична относительно каждой изъ своихъ осей или что *оси кривой второго порядка суть ея оси симметріи.*

§ 3. Касательныя и поляры.

176. Для того чтобы прямая линія была касательною къ какой-нибудь кривой второго порядка, нужно, какъ мы видѣли, чтобы хорда, образуемая этою прямою, равнялась нулю. На этомъ основаніи подъ касательною къ кривой въ данной точкѣ M_1 (фиг. 37) слѣдуетъ понимать прямую TS, представляющую собою предѣльное положеніе сѣкущей M_1M_2, вращающейся около данной точки до тѣхъ поръ, пока другая ея точка M_2 пересѣченія съ кривой не придетъ въ совпаденіе съ данной M_1.



Фиг. 37

Положимъ, что кривая второго порядка выражается общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будутъ координаты двухъ точекъ M_1 и M_2 этой кривой.

Уравненіе сѣкущей, встрѣчающей кривую въ этихъ двухъ точкахъ, будетъ, какъ извѣстно (см. стр. 46),

[1]) Когда кривая второго порядка имѣетъ безконечно удаленный центръ, то къ числу ея діаметровъ, т. е. прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ, должна быть отнесена прямая, всѣ точки которой суть безконечно удаленныя. Эта прямая имѣетъ свойства діаметра, сопряженнаго съ каждымъ другимъ діаметромъ, а потому ее можно также разсматривать, какъ ось кривой. Можно, слѣдовательно, сказать, что кривая съ безконечно удаленнымъ центромъ имѣетъ, такъ же какъ и центральная, двѣ оси, но одна изъ нихъ есть безконечно удаленная всѣми своими точками.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

или
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

гдѣ первый множитель второй части есть отношеніе отрѣзковъ M_2N и M_1N, обращающихся въ нуль, когда точка M_2 совпадаетъ съ M_1.

Такъ какъ точки M_1 и M_2 принадлежатъ кривой, то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left.\begin{aligned} &Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ \text{и}\quad &Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

изъ которыхъ находимъ

$$A(x_2^2 - x_1^2) + B(x_2y_2 - x_1y_1) + C(y_2^2 - y_1^2) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1) = 0.$$

Это послѣднее равенство, очевидно, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$(x_2 - x_1)[A(x_2 + x_1) + By_2 + D] + (y_2 - y_1)[Bx_1 + C(y_2 + y_1) + E] = 0,$$

откуда

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A(x_2 + x_1) + By_2 + D}{Bx_1 + C(y_2 + y_1) + E}.$$

Вслѣдствіе этого предыдущему уравненію сѣкущей можно дать видъ

$$y - y_1 = -\frac{A(x_2 + x_1) + By_2 + D}{Bx_1 + C(y_2 + y_1) + E}(x - x_1).$$

Такъ какъ оно имѣетъ мѣсто при всякомъ положеніи точекъ M_1 и M_2 на кривой, а слѣдовательно и тогда, когда эти точки совпадаютъ, то, полагая

$$x_2 = x_1 \quad \text{и} \quad y_2 = y_1,$$

получимъ изъ него уравненіе касательной

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Оно можетъ быть упрощено слѣдующимъ образомъ.

Уничтожая знаменателя, получимъ

$$(2Ax_1 + By_1 + D)(x - x_1) + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)(y - y_1) = 0$$

или

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y =$$
$$= 2Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1.$$

Прибавляя же къ обѣимъ частямъ

$$Dx_1 + Ey_1 + 2F$$

и принимая во вниманіе первое изъ равенствъ (2), будемъ имѣть

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0. \quad . \ (4)$$

Здѣсь x и y суть координаты любой точки касательной, а x_1 и y_1 координаты точки прикосновенія. Слѣдуетъ замѣтить, что уравненіе

(4) симметрично относительно этихъ координатъ, т. е. оно не измѣняется отъ взаимной перестановки однихъ координатъ на мѣсто другихъ.

177. Уравненіе сѣкущей, встрѣчающей кривую (1) въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2), можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$A(x - x_1)(x - x_2) + B(x - x_1)(y - y_2) + C(y - y_1)(y - y_2) =$$
$$= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по раскрытіи скобокъ, члены второго измѣренія сокращаются, то это уравненіе есть первой степени и потому представляетъ прямую. Такъ какъ, далѣе, это уравненіе, въ виду тождествъ (2), удовлетворяется координатами x_1, y_1 и x_2, y_2, то прямая, имъ выражаемая, проходитъ черезъ эти точки.

Слѣдовательно, полагая въ послѣднемъ уравненіи $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, получимъ уравненіе касательной въ слѣдующемъ видѣ:

$$A(x - x_1)^2 + B(x - x_1)(y - y_1) + C(y - y_1)^2 =$$
$$= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Отсюда, раскрывая скобки и соединяя подобные члены, легко получить и уравненіе (4).

178. Мы видѣли (см. стр. 117), что уравненіе діаметра кривой (1) имѣетъ видъ

$$(2Ax + By + D) + m(Bx + 2Cy + E) = 0,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ хордъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ.

Если положимъ, что точка (x_1, y_1) есть одинъ изъ концовъ этого діаметра, т. е. точка, въ которой онъ встрѣчаетъ кривую, то будемъ имѣть

$$(2Ax_1 + By_1 + D) + m(Bx_1 + 2Cy_1 + E) = 0,$$

откуда

$$m = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}.$$

Но изъ уравненія (3) видно, что это есть угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ (x_1, y_1).

Слѣдовательно, *касательныя въ концахъ какого-нибудь діаметра кривой второго порядка параллельны хордамъ, средины которыхъ находятся на этомъ діаметрѣ.*

179. Если кривая второго порядка, не имѣющая центра, отнесена къ такой системѣ координатъ, что ось абсциссъ совпадаетъ съ однимъ изъ діаметровъ, а ось ординатъ есть касательная въ концѣ этого діаметра, то уравненіе этой кривой принимаетъ весьма простой видъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ кривая проходитъ черезъ начало координатъ, то должно быть $F = 0$. Такъ какъ, далѣе, хорды, параллельныя оси ординатъ, дѣлятся осью абсциссъ пополамъ,

то каждой абсциссѣ должны соотвѣтствовать двѣ ординаты равныя, но противоположно направленныя. Это значитъ, что при каждомъ значеніи x изъ уравненія кривой должны получаться два значенія для y, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками, что возможно только тогда, когда уравненіе не содержитъ вовсе членовъ, въ которыхъ y входитъ въ первой степени. Слѣдовательно, должно быть $B=0$ и $E=0$.

Наконецъ, вслѣдствіе того, что кривая не имѣетъ центра, должно быть

$$B^2-4AC=0,$$

откуда при $B=0$, получаемъ $A=0$.

Итакъ, въ уравненіи кривой (1) четыре коэффиціента A, B, E и F будутъ равняться нулю, и потому уравненіе это принимаетъ видъ

$$Cy^2+Dx=0.$$

180. Прямая линія, перпендикулярная къ касательной и проходящая черезъ точку ея прикосновенія, называется *нормалью* къ кривой. Изъ уравненія касательной легко вывести общее уравненіе нормали.

Положимъ, что система координатъ прямоугольная, и пусть, какъ было и выше, координаты точки прикосновенія будутъ x_1 и y_1. Уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ эту точку, какъ извѣстно, имѣетъ видъ

$$y-y_1=a(x-x_1),$$

и если эта прямая перпендикулярна къ касательной, то должно быть

$$am=-1,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ касательной, равный, какъ мы видѣли, отношенію.

$$-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

Слѣдовательно,

$$a=\frac{Bx_1+2Cy_1+E}{2Ax_1+By_1+D},$$

и потому уравненіе нормали будетъ

$$y-y_1=\frac{Bx_1+2Cy_1+E}{2Ax_1+By_1+D}(x-x_1)$$

или

$$(2Ax_1+By_1+D)(y-y_1)-(Bx_1+2Cy_1+E)(x-x_1)=0.$$

181. Положимъ, что прямая, соединяющая двѣ данныя точки M_1 и M_2, которыхъ координаты суть x_1, y_1 и x_2, y_2, встрѣчаетъ кривую второго порядка въ нѣкоторой точкѣ M, и пусть отношеніе разстояній этой точки отъ данныхъ M_1 и M_2 будетъ $\frac{m}{n}$. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 8), координаты точки M опредѣлятся формулами:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію кривой, то будемъ имѣть

$$A\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right)^2 + B\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right)\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right) + C\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)^2 +$$
$$+ D\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right) + E\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right) + F = 0$$

или, по уничтоженіи знаменателей,

$$A(nx_1 + mx_2)^2 + B(nx_1 + mx_2)(ny_1 + my_2) + C(ny_1 + my_2)^2 +$$
$$+ D(nx_1 + mx_2)(m+n) + E(ny_1 + my_2)(m+n) + F(m+n)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и располагая первую часть по степенямъ m и n, дадимъ этому равенству видъ

$$S_1 n^2 + Pmn + S_2 m^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ положено для сокращенія:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = S_1,$$
$$Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = S_2,$$
$$(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = P.$$

Величины S_1 и S_2 суть, такимъ образомъ, результаты подстановки въ первую часть уравненія кривой координатъ точекъ M_1 и M_2. Что же касается величины P, то это есть результатъ замѣны въ первой части уравненія касательной перемѣнныхъ координатъ координатами одной изъ точекъ M_1 и M_2, а координатъ точки прикосновенія координатами другой.

182. Значеніемъ отношенія $\frac{m}{n}$ опредѣляется, какъ извѣстно (см. стр. 9), положеніе точки M на прямой M_1M_2. Изъ равенства (5), которое можетъ быть представлено такъ:

$$S_2\left(\frac{m}{n}\right)^2 + P\left(\frac{m}{n}\right) + S_1 = 0,$$

опредѣляются два значенія этого отношенія, соотвѣтствующія двумъ точкамъ пересѣченія прямой M_1M_2 съ кривою. И эти значенія будутъ равны между собою, когда

$$P^2 = 4S_1S_2$$

или

$$[(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F)]^2 -$$
$$- 4(Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F) \times$$
$$(Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F) = 0.$$

Послѣднее равенство есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ прямая, соединяющая точки M_1 и M_2, есть касательная къ кривой.

Если точка M_2 будетъ замѣнена какою-нибудь другою точкою, лежащею на той же касательной, то это условіе не нарушится. Отсюда заключаемъ, что уравненіе

$$\left.\begin{array}{r}[(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)]^2-\\ -4(Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F)\times\\ (Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)=0\end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad (6)$$

которое получаемъ изъ предыдущаго равенства, замѣняя данныя координаты x_2, y_2 неизвѣстными x, y, удовлетворяется подстановкою на мѣсто x и y координатъ какой угодно точки, лежащей на касательной, проходящей черезъ M_1.

Будучи второй степени, это уравненіе выражаетъ, слѣдовательно, совокупность двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка (1) изъ данной точки (x_1, y_1).

Въ частномъ случаѣ, при $x_1=0$ и $y_1=0$, это будутъ двѣ касательныя, проходящія черезъ начало координатъ, и уравненіе (6) обращается въ

$$(Dx+Ey+2F)^2-4F(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)=0$$

или

$$(D^2-4AF)x^2+2(DE-2BF)xy+(E^2-4CF)y^2=0,$$

что мы имѣли уже выше (см. стр. 110).

183. Уравненіе

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

выражаетъ, какъ мы видѣли, касательную къ кривой второго порядка (1), и въ немъ x_1, y_1 суть координаты точки прикосновенія. Это уравненіе будетъ представлять нѣкоторую прямую также и тогда, когда x_1, y_1 суть координаты какой-угодно точки плоскости. Прямая эта называется въ такомъ случаѣ *полярою* точки (x_1, y_1), а эта точка ея *полюсомъ* относительно кривой (1).

Отсюда слѣдуетъ прежде всего, что поляра точки лежащей на кривой, есть касательная въ этой точкѣ, и полюсъ касательной есть ея точка прикосновенія.

Далѣе, легко видѣть, что координаты точекъ пересѣченія прямой (7) съ кривой (1), т. е. значенія x и y, обращающія одновременно въ нуль многочлены

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)$$

и

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

удовлетворяютъ и уравненію (6). Это значитъ, что точки эти суть точки прикосновенія касательныхъ, выражаемыхъ уравненіемъ (6).

Итакъ, въ томъ случаѣ, когда черезъ данную точку проходятъ двѣ дѣйствительныя касательныя къ кривой второго порядка, поляра этой

точки есть прямая, соединяющая точки прикосновенія этихъ касательныхъ, или такъ называемая хорда прикосновенія.

Если касательныя изъ данной точки (x_1, y_1) суть мнимыя, то таковы же должны быть и точки прикосновенія. Слѣдовательно, поляра данной точки не будетъ въ этомъ случаѣ имѣть дѣйствительныхъ общихъ точекъ съ кривою, т. е. не будетъ пересѣкать ея.

Уравненіе (7), при $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, обращается въ

$$Dx + Ey + 2F = 0$$

и въ этомъ видѣ представляетъ поляру начала координатъ.

184. Если точка (x_2, y_2) лежитъ на полярѣ точки (x_1, y_1), то, какъ видно изъ (7), должно быть

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0$$

или

$$(2Ax_2 + By_2 + D)x_1 + (Bx_2 + 2Cy_2 + E)y_1 + (Dx_2 + Ey_2 + 2F) = 0$$

а это показываетъ, что точка (x_1, y_1) лежитъ на полярѣ точки (x_2, y_2).

Итакъ, если изъ двухъ данныхъ точекъ вторая лежитъ на полярѣ первой, то первая лежитъ на полярѣ второй. Другими словами, если одна изъ двухъ прямыхъ проходитъ черезъ полюсъ другой, то эта послѣдняя проходитъ черезъ полюсъ первой.

Такія двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются *сопряженными*. Точно также и двѣ прямыя, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ полюсъ другой, называются *сопряженными*.

Изъ сказаннаго видимъ также, что если прямая будетъ перемѣщаться, вращаясь около какой-нибудь своей точки, то ея полюсъ будетъ перемѣщаться по полярѣ этой точки, и, если точка будетъ двигаться по какой-нибудь прямой, то ея поляра будетъ вращаться около полюса этой прямой.

185. Если въ уравненіи (7) x_1 и y_1 означаютъ координаты центра кривой (1), то коэффиціенты при x и при y будутъ равняться нулю. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 40), прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, будетъ безконечно удаленною. Отсюда заключаемъ, что *центръ есть полюсъ безконечно удаленной прямой.*

Если точка (x_1, y_1) лежитъ на прямой

$$y = mx,$$

то уравненію поляры (7) можно дать видъ

$$[(2A + Bm)x_1 + D]x + [(B + 2Cm)x_1 + E]y + [(D + Em)x_1 + 2F] = 0$$

или

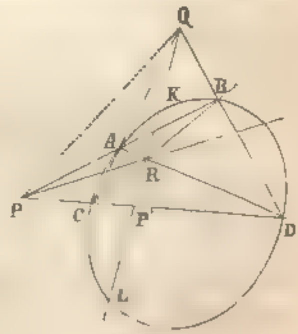
$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) + \frac{1}{x_1}(Dx + Ey + 2F) = 0.$$

При $x_1 = \infty$, т. е. когда (x_1, y_1) будетъ безконечно удаленною точкою прямыхъ, имѣющихъ m угловымъ коэффиціентомъ, это уравненіе обращается въ уравненіе діаметра

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) = 0 .$$

Отсюда заключаемъ, что *діаметры суть поляры безконечно удаленныхъ точекъ* и что *два сопряженные діаметра суть двѣ проходящія черезъ центръ сопряженныя прямыя.*

186. Положимъ теперь, что на линіи второго порядка даны четыре точки A, B, C, D (фиг. 38). Соединяя ихъ прямыми, получимъ полный четыреугольникъ, для котораго данныя точки суть вершины и для котораго точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ, или такъ называемыя діагональныя точки (см. стр. 96), суть P, Q, R.



Фиг. 38.

Не трудно убѣдиться, что каждая изъ этихъ послѣднихъ точекъ есть полюсъ прямой, соединяющей двѣ другія. Иначе говоря, каждая изъ сторонъ діагональнаго треугольника PQR есть поляра противоположной вершины.

Примемъ для этого прямую AB за ось ординатъ, а прямую CD за ось абсциссъ, и обозначимъ чрезъ p_1 и p_2 длины отрѣзковъ PC и PD, а чрезъ q_1 и q_2 длины отрѣзковъ PA и PB. Въ такомъ случаѣ прямыя AC и BD выразятся уравненіями

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 1 = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

а прямыя AD и BC уравненіями

$$\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_1} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_2} - 1 = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Отсюда видимъ, что прямая QR будетъ выражаться уравненіемъ

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} + \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 2 = 0$$

или

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} x + \frac{q_1 + q_2}{q_1 q_2} y - 2 = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

потому что первая часть этого уравненія есть въ одно и то же время и сумма первыхъ частей уравненій (8) и сумма первыхъ частей уравненій (9).

Если кривая второго порядка, проходящая черезъ точки A, B, C, D, выражается общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

то корни уравненія

$$Ax^2 + Dx + F = 0,$$

опредѣляющаго абсциссы ея точекъ пересѣченія съ осью x-овъ, будутъ p_1 и p_2, и потому

$$p_1 + p_2 = -\frac{D}{A} \quad \text{и} \quad p_1 p_2 = \frac{F}{A};$$

слѣдовательно,

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} = -\frac{D}{F}.$$

Корни же уравненія

$$Cy^2 + Ey + F = 0,$$

опредѣляющаго ординаты точекъ пересѣченія кривой съ осью y-овъ будутъ q_1 и q_2, и потому

$$q_1 + q_2 = -\frac{E}{C} \quad \text{и} \quad q_1 q_2 = \frac{F}{C},$$

откуда

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 q_2} = -\frac{E}{F}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что уравненію (10) прямой QR можно дать видъ

$$-\frac{D}{F}x - \frac{E}{F}y - 2 = 0$$

или

$$Dx + Ey + 2F = 0,$$

а это, какъ мы видѣли, есть уравненіе поляры начала координатъ т. е. точка P.

Точно такъ же можно убѣдиться, что прямая PR есть поляра точки Q, а прямая PQ поляра точки R.

Такой треугольникъ, каждая сторона котораго есть поляра противоположной вершины, называется *полярнымъ треугольникомъ* относительно кривой второго порядка.

Очевидно, что для всякой кривой второго порядка существуетъ безчисленное множество полярныхъ треугольниковъ. Одна изъ вершинъ такого треугольника можетъ быть взята произвольно; двѣ же остальныя суть какія-нибудь двѣ сопряженныя точки, лежащія на полярѣ первой.

187. По свойству полнаго четыреугольника четыре прямыя QP, QP', QC и QD составляютъ гармоническій пучекъ (см. стр. 96). Слѣдовательно, четыре точки P, P', C и D составляютъ гармоническій рядъ, при чемъ точки P и P' дѣлятъ гармонически отрѣзокъ CD, а точки C и D отрѣзокъ PP'. Изъ этихъ точекъ первая P можетъ быть разсматриваема, какъ произвольно взятая на плоскости, двѣ другія C

и D суть точки пересѣченія кривой съ какою-нибудь прямою, проходящею черезъ P; наконецъ, послѣдняя P' есть точка пересѣченія съ тою же прямою поляры точки P. Можно, слѣдовательно, сказать, что всякая прямая, проходящая черезъ какую-нибудь данную точку P, встрѣчаетъ ея поляру въ точкѣ, которая вмѣстѣ съ данною дѣлитъ гармонически хорду, образуемую этою прямою.

Такимъ образомъ видимъ, что поляру можно опредѣлять, какъ геометрическое мѣсто точекъ, которыя вмѣстѣ съ данною точкою дѣлятъ гармонически хорды, образуемыя прямыми, проходящими черезъ эту данную точку.

188. Если прямая линія, выражаемая общимъ уравненіемъ

$$Mx + Ny + P = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

есть поляра точки (x_1, y_1), то изъ этого уравненія и уравненія (7), какъ имѣющихъ одно и то же геометрическое значеніе, будемъ имѣть

$$\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{M} = \frac{Bx_1 + 2Cy_1 + E}{N} = \frac{Dx_1 + Ey_1 + 2F}{P}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2Ax_1 + By_1 + D &= kM, \\ Bx_1 + 2Cy_1 + E &= kN, \\ Dx_1 + Ey_1 + 2F &= kP, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

гдѣ k есть неопредѣленная величина.

Отсюда, какъ изъ уравненій первой степени, могутъ быть найдены величины x_1, y_1, т. е. координаты полюса данной прямой.

Если прямая (11) есть касательная къ кривой (1), то ея полюсъ есть точка прикосновенія, и потому координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравненію прямой, т. е. будемъ имѣть

$$Mx_1 + Ny_1 + P = 0.$$

Условіе совмѣстимости этого уравненія относительно x_1 и y_1 съ уравненіями (12) есть, слѣдовательно, условіе прикосновенія прямой (11) съ кривой (1). Какъ извѣстно (см. стр. 31), оно можетъ быть выражено равенствомъ

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D, & M \\ B, & 2C, & E, & N \\ D, & E, & 2F, & P \\ M, & N, & P, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая опредѣлителя первой части, мы можемъ представить его въ видѣ

$$(E^2 - 4CF)M^2 + 2(2BF - DE)MN + (D^2 - 4AF)N^2 + \\ + 2(2CD - BE)MP + 2(2AE - BD)NP + (B^2 - 4AC)P^2 = 0$$

или сокращенно

$$A'M^2 + B'MN + C'N^2 + D'MP + E'NP + F'P^2 = 0\,.$$

Если обозначимъ черезъ u_1, u_2, u_3 три величины, пропорціональныя коэффиціентамъ M, N, P уравненія (11), которыя, какъ извѣстно, можно разсматривать, какъ однородныя координаты прямой (см. стр. 89), то послѣднее уравненіе, принимая видъ

$$A'u_1^2 + B'u_1u_2 + C'u_2^2 + D'u_1u_3 + E'u_2u_3 + F'u_3^2 = 0\,,$$

будетъ выражать зависимость между координатами всѣхъ касательныхъ къ кривой второго порядка (1) и, слѣдовательно, будетъ уравненіемъ этой кривой въ касательныхъ координатахъ.

§ 4. Изслѣдованіе значеній уравненія второй степени.

189. Мы видѣли, что общее уравненіе второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

при различныхъ соотношеніяхъ между его коэффиціентами, можетъ имѣть различныя геометрическія значенія. Въ однихъ случаяхъ оно представляетъ кривую линію, не имѣющую безконечно удаленныхъ точекъ, въ другихъ кривую линію, имѣющую одну или двѣ такія точки (см. стр. 109). Могутъ быть случаи, когда оно представляетъ не кривую, а совокупность двухъ прямыхъ (см. стр. 72). Постараемся представить въ этомъ параграфѣ систематическое изслѣдованіе всѣхъ значеній уравненія (1).

На первое время будемъ предполагать, что въ этомъ уравненіи коэффиціентъ C при y^2 не равняется нулю. Случай, когда $C = 0$, мы разсмотримъ впослѣдствіи отдѣльно.

190. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно y, будемъ имѣть

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(B^2-4AC)x^2 - 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}}{2C}$$

и если обозначимъ радикалъ второй части буквою R и положимъ

$$B^2 - 4AC = H, \quad BE - 2CD = K, \quad E^2 - 4CF = L,$$

то будемъ имѣть

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm R}{2C}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ

$$R = \sqrt{Hx^2 + 2Kx + L}\,,$$

и, слѣдовательно,

$$R^2 = Hx^2 + 2Kx + L$$

или

$$R^2 = \frac{(Hx+K)^2 + (HL-K^2)}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Но $$HL - K^2 = (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF) - (BE - 2CD)^2 =$$
$$= 4C(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F) = 2C \cdot \triangle.$$

Здѣсь буквою $\triangle$ обозначенъ многочленъ

$$2(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F),$$

который можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix}$$

и который называется *дискриминантомъ* уравненія (1) (см. стр. 73).

Такимъ образомъ, равенство (3) принимаетъ видъ

$$R^2 = \frac{(Hx + K)^2 + 2C\triangle}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

или

$$R^2 = \frac{(Hx + K + \sqrt{-2C\triangle})(Hx + K - \sqrt{-2C\triangle})}{H}$$

или, наконецъ,

$$R^2 = H(x - x_1)(x - x_2), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

гдѣ

$$x_1 = \frac{-K - \sqrt{-2C\triangle}}{H} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-K + \sqrt{-2C\triangle}}{H} \quad \ldots \ldots (6)$$

191. Выраженіе (2) представляетъ значенія ординатъ точекъ разсматриваемой линіи, соотвѣтствующихъ произвольно взятой абсциссѣ. Для того, чтобы эти значенія были дѣйствительными, т. е. чтобы геометрическое мѣсто, выражаемое уравненіемъ (1), представляло систему точекъ, дѣйствительно существующихъ на плоскости, нужно, чтобы радикалъ R былъ величиною дѣйствительною, и, слѣдовательно, квадратъ его долженъ быть величиною положительной.

Такъ какъ значенія, которыя должны быть приписываемы перемѣнному x для того, чтобы выраженіе для R^2 давало величину положительную, обусловливаются значеніями коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), то будемъ разсматривать отдѣльно три случая: 1) когда H или $B^2 - 4AC$ есть величина отрицательная, 2) когда это есть величина положительная и 3) когда она равняется нулю.

192. Полагаемъ $H < 0$. Въ этомъ случаѣ коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки, и если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и эти коэффиціенты, то, какъ видно изъ равенства (4), R^2 не можетъ быть положительной величиною ни при какихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ перемѣннаго x. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ уравненіе (1), какъ не удовлетворяющееся никакими дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ, не выражаетъ никакой дѣйствительной линіи, или, какъ еще говорятъ, не имѣетъ вовсе дѣйствительнаго геометрическаго значенія.

*

Выраженіе (4) показываетъ также, что при $\triangle = 0$ величина R^2 не будетъ отрицательною только тогда, когда она равняется нулю, т. е. когда

$$x = -\frac{K}{H} = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Такъ какъ этому значенію x соотвѣтствуетъ единственное значеніе y, которое опредѣляется по формулѣ (2) и равняется

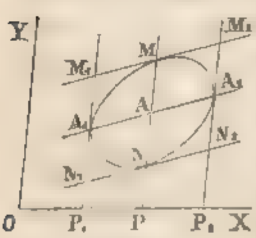
$$\frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},$$

то уравненіе (1) выражаетъ единственную дѣйствительную точку.

Мы видѣли выше (см. стр. 72), что при $\triangle = 0$ и $H < 0$ уравненіе (1) можетъ быть разсматриваемо, какъ выражающее двѣ мнимыя сопряженныя прямыя. Точка, опредѣляемая указанными сейчасъ координатами, есть дѣйствительная точка пересѣченія этихъ прямыхъ (см. стр. 68).

193. Если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ знакъ, обратный знаку коэффиціентовъ A и C, то R^2 будетъ положительною величиною при непрерывномъ рядѣ значеній перемѣннаго x, которыя, однако, заключаются между нѣкоторыми опредѣленными предѣлами. Уравненіе (1) будетъ выражать поэтому непрерывную дѣйствительную линію, помѣщающуюся внутри извѣстныхъ границъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ величины x_1 и x_2 въ равенствѣ (5), какъ показываютъ ихъ выраженія (6), суть дѣйствительныя и конечныя [1]). Такъ какъ во второй части равенства (5) первый множитель H есть величина отрицательная, то R^2 будетъ положительною величиною для всѣхъ тѣхъ значеній перемѣннаго x, при которыхъ два другіе множителя $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ имѣютъ разные знаки, т. е. для значеній x, заключающихся между конечными величинами x_1 и x_2.

Эти двѣ величины могутъ быть разсматриваемы, какъ абсциссы двухъ точекъ P_1 и P_2, лежащихъ на оси OX (фиг. 39), и если проведемъ черезъ эти точки прямыя M_1P_1 и M_2P_2, параллельныя оси OY, то будемъ имѣть, на основаніи сейчасъ сказаннаго, что каждая изъ точекъ, удовлетворяющихъ уравненію (1), а слѣдовательно, и вся выражаемая этимъ уравненіемъ линія, помѣщается между этими двумя прямыми.



Фиг. 39.

194. Пусть A_1A_2 будетъ прямая, выражаемая уравненіемъ

$$Bx + 2Cy + E = 0.$$

---

[1]) Эти величины суть корни квадратнаго уравненія $Hx^2 + 2Kx + L = 0$.

Мы уже знаемъ, что это есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY. Замѣчая, что изъ послѣдняго уравненія

$$y = \frac{-(Bx + E)}{2C},$$

и сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (2) ординатъ точекъ, принадлежащихъ кривой (1), мы убѣждаемся, что отношеніе

$$\frac{R}{C}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Hx^2 + 2Kx + L}}{C}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{H(x-x_1)(x-x_2)}}{C},$$

представляетъ длину хорды, образуемой какою-нибудь прямою, параллельною оси OY.

Хорда эта получаетъ наибольшую величину, когда произведеніе $(x - x_1)(x - x_2)$ будетъ наибольшимъ, а это, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто тогда, когда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

т. е. когда прямая, образующая эту хорду, дѣлитъ отрѣзокъ P_1P_2 пополамъ.

Концы этой хорды M и N будутъ, слѣдовательно, точками кривой, наиболѣе удаленными отъ діаметра A_1A_2, и потому вся кривая должна помѣщаться между прямыми, проведенными чрезъ M и N параллельно этому діаметру.

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ точки кривой находятся внутри параллелограмма $M_1M_2N_2N_1$ и, слѣдовательно, между ними нѣтъ безконечно удаленныхъ. Выше было сказано (см. стр. 109), что такая кривая называется *эллипсомъ*.

Легко видѣть, что точка A есть центръ этого эллипса, а прямая MN діаметръ, сопряженный съ діаметромъ A_1A_2.

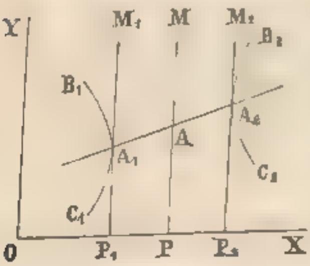
195. Положимъ теперь, что $H > 0$. Въ этомъ случаѣ коэффиціенты A и C могутъ имѣть или одинаковые или разные знаки. Если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ знакъ, противоположный знаку C, то величины x_1 и x_2 въ выраженіи для R^2, представляемомъ равенствомъ (5), суть дѣйствительныя, и такъ какъ первый множитель H этого выраженія въ настоящемъ случаѣ положительный, то R^2 будетъ положительною величиною лишь для значеній x, большихъ большей изъ величинъ x_1 и x_2 или меньшихъ меньшей изъ этихъ величинъ. Значеніямъ же x, заключающимся между x_1 и x_2, соотвѣтствуютъ, слѣдовательно, мнимыя значенія y.

Полагая, какъ и выше, что (фиг. 40)

$$OP_1 = x_1 \quad \text{и} \quad OP_2 = x_2,$$

будемъ имѣть, что между прямыми M_1P_1 и M_2P_2, параллельными оси OY, не существуетъ вовсе точекъ, принадлежащихъ разсматриваемой кривой.

Для непрерывнаго ряда значеній x, не заключающихся между x_1 и x_2, радикалъ R, а слѣдовательно и ордината y, получаетъ непрерывный рядъ дѣйствительныхъ значеній и, вмѣстѣ съ тѣмъ, при достаточно большой абсолютной величинѣ x, величина ординаты y можетъ сдѣлаться сколь угодно большою. Это показываетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей или вѣтвей $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$, изъ которыхъ каждая непрерывно простирается въ безконечность. Такая линія называется *гиперболою*, и мы видѣли (см. стр. 109), что ее слѣдуетъ разсматривать, какъ имѣющую двѣ различныя безконечно удаленныя точки.



Фиг. 40.

Прямая линія A_1A_2, выражаемая уравненіемъ

$$Bx + 2Cy + E = 0,$$

есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY и принадлежащія той или другой изъ двухъ вѣтвей кривой.

Прямая MP, параллельная оси OY и дѣлящая пополамъ отрѣзокъ P_1P_2, есть діаметръ, сопряженный съ A_1A_2, и точка A есть центръ кривой.

196. Если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ знакъ, одинаковый съ знакомъ коэффиціента C, то, какъ видно изъ равенства (4), R^2 будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ положительною величиною при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x. Это значитъ, что всѣ прямыя, параллельныя оси OY, пересѣкаютъ кривую въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ и, слѣдовательно, каждая изъ этихъ прямыхъ образуетъ хорду опредѣленной величины.

Длина этой хорды, такъ же какъ и въ предыдущемъ случаѣ, выражается отношеніемъ $\frac{R}{C}$ и, слѣдовательно, будетъ наименьшею, когда R получаетъ наименьшее значеніе, а это будетъ, очевидно, тогда, когда

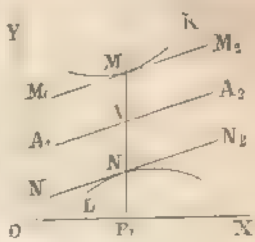
$$Hx + K = 0$$

или

$$x = -\frac{K}{H} = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Полагая, что OP_1 есть абсцисса, имѣющая эту величину (фиг. 41), а что MN есть соотвѣтствующая ей наименьшая изъ хордъ, паралельныхъ оси OY, будемъ имѣть, что M и N суть точки разсматриваемой кривой, наиболѣе близкія къ діаметру A_1A_2, выражаемому уравненіемъ

$$Bx+2Cy+E=0.$$



Фиг 41.

Отсюда слѣдуетъ, что между прямыми M_1M_2 и N_1N_2, параллельными этому діаметру и проходящими черезъ M и N, не существуетъ точекъ кривой, и такъ какъ, при непрерывномъ измѣнени x, обѣ соотвѣтствующія ординаты измѣняются также непрерывно и могутъ достигнуть сколь угодно большой величины, то заключаемъ, что и въ этомъ случаѣ линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей MK и NL, простирающихся въ безконечность. Слѣдовательно, она есть также гипербола.

Итакъ, въ случаѣ, когда $H>0$, уравненіе (1) представляетъ гиперболу, какую бы величину, отличную отъ нуля, ни имѣлъ дискриминантъ $\triangle$.

197. Если $\triangle=0$, то изъ равенства (4) имѣемъ

$$R^2=\frac{(Hx+K)^2}{H}.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$y=\frac{-(Bx+E)\sqrt{H}\pm(Hx+K)}{2C\sqrt{H}}$$

или

$$(Bx+2Cy+E)\sqrt{H}=\pm(Hx+K).$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ, когда $H>0$, оно включаетъ въ себѣ два различныя уравненія первой степени съ дѣйствительными коэффиціентами. Въ отдѣльности эти уравненія могутъ быть представлены такъ:

$$(B+\sqrt{H})x+2Cy+\left(E+\frac{K}{\sqrt{H}}\right)=0,$$

$$(B-\sqrt{H})x+2Cy+\left(E-\frac{K}{\sqrt{H}}\right)=0$$

и выражаютъ, очевидно, двѣ дѣйствительныя непараллельныя прямыя.

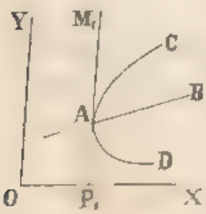
Величины

$$x=-\frac{K}{H}=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \quad \text{и} \quad y=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$$

суть координаты точки ихъ пересѣченія.

Итакъ, если $\triangle=0$, то уравненіе (1) при $H>0$ выражаетъ совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ (см. стр. 72).

198. Обратимся теперь къ случаю, когда $H = 0$.
Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть
$$R^2 = Kx - L = K\left(x - \frac{L}{K}\right).$$
Очевидно, что при $K > 0$ это выраженіе представляетъ положительную величину только тогда, когда $x > -\frac{L}{K}$, а при $K < 0$ только тогда, когда $x < -\frac{L}{K}$. Слѣдовательно, дѣйствительныя значенія ординатъ, опредѣляемыхъ изъ уравненія (2), соотвѣтствуютъ только значеніямъ x, большимъ $-\frac{L}{K}$ или только меньшимъ этой величины. Полагая, что OP_1 (фиг. 42) есть абсцисса, равная $-\frac{L}{K}$, будемъ имѣть, поэтому, что всѣ точки, принадлежащія разсматриваемой кривой, находятся только по одну сторону прямой M_1P_1, параллельной оси OY, а именно, вправо отъ этой прямой, когда $K - BE - 2CD$ есть величина положительная, и влѣво, когда это есть величина отрицательная.



Фиг. 42.

Въ обоихъ этихъ случаяхъ, при непрерывномъ измѣненіи x, начиная отъ $x = -\frac{L}{K}$, ординаты y измѣняются также непрерывно и могутъ сдѣлаться сколь угодно большими. Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, когда $H = 0$, линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ одной сплошной вѣтви CAD, простирающейся въ безконечность. Такая линія называется *параболой*. Мы видѣли выше (см. стр. 109), что ее слѣдуетъ разсматривать, какъ имѣющую двѣ совпадающія безконечно удаленныя точки.

Прямая AB, выражаемая уравненіемъ
$$Bx + 2Cy + E = 0,$$
есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY. Прямая же M_1P_1 есть касательная и точка A ея точка прикосновенія.

199. Изъ выраженія для $\triangle$ мы имѣемъ (см. стр. 131)
$$\triangle = \frac{HL - K^2}{2C},$$
откуда видно, что при $H = 0$ дискриминантъ $\triangle$ равняется нулю одновременно съ K. Но при $H = 0$ и $K = 0$ мы будемъ имѣть
$$R^2 = L$$
и, слѣдовательно,
$$y = \frac{-(Bx - E) \pm \sqrt{L}}{2C}$$

или

$$Bx+2Cy+E=\pm\sqrt{L}.$$

Здѣсь мы имѣемъ два уравненія первой степени

$$Bx+2Cy+E+\sqrt{L}=0$$

и

$$Bx+2Cy+E-\sqrt{L}=0,$$

различающіяся только постоянными членами и представляющія, слѣдовательно, двѣ параллельныя прямыя.

Эти прямыя будутъ дѣйствительныя и различныя, когда $L=E^2-4CF$ есть величина положительная, совпадающія, когда $L=0$, и мнимыя, когда $L<0$.

200. Мы предполагали во всемъ предыдущемъ, что коэффиціентъ C не равняется нулю. Намъ остается дополнить сказанное разсмотрѣніемъ противнаго случая.

Будемъ предполагать сперва, что при $C=0$ коэффиціентъ B не равняется нулю и, слѣдовательно, B^2-4AC есть величина положительная.

Уравненіе (1) обращается тогда въ

$$Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

откуда

$$y=-\frac{Ax^2+Dx+F}{Bx+E}$$

или

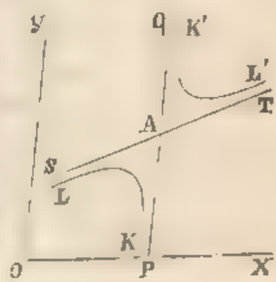
$$y=Mx+N+\frac{P}{Bx+E}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ

$$M=-\frac{A}{B},\ N=\frac{AE-BD}{B^2},\ P=\frac{BDE-AE^2-B^2F}{B^2}=\frac{\Delta}{2B^2}.$$

Пусть ST (фиг. 43) будетъ прямая, выражаемая уравненіемъ

$$y=Mx+N.$$



Фиг. 43.

Если P есть величина положительная, то, какъ видно изъ равенства (8), ординаты точекъ разсматриваемой кривой будутъ больше соотвѣтствующихъ ординатъ точекъ прямой ST для всѣхъ значеній x, большихъ $-\frac{E}{B}$. Напротивъ того, для значеній x, меньшихъ $-\frac{E}{B}$, ординаты точекъ прямой ST будутъ больше соотвѣтствующихъ ординатъ разсматриваемой кривой. Слѣдовательно, полагая, что OP есть абсцисса, равная $-\frac{E}{B}$, и прямая PQ парал-

лельна оси OY, будемъ имѣть, что вправо отъ этой прямой точки кривой находятся выше ST, а влѣво—ниже ST. Такъ какъ при $x = -\frac{E}{B}$ получаемъ $y = \infty$, то прямая PQ не имѣетъ съ кривой общихъ точекъ, кромѣ безконечно удаленной. Это показываетъ, что разсматриваемая кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей KL и $K'L'$, простирающихся въ безконечность и помѣщающихся въ двухъ противоположныхъ углахъ PAS и QAT, образуемыхъ прямыми PQ и ST. Слѣдовательно, это есть гипербола.

Такимъ же точно образомъ легко убѣдиться, что и при $P < 0$ разсматриваемая линія будетъ гипербола, вѣтви которой расположены въ двухъ другихъ противоположныхъ углахъ, образуемыхъ прямыми PQ и ST.

Если же $P = 0$ или, что все тоже, $\triangle = 0$, то уравненіе (7) обращается въ

$$(y - Mx - N)(Bx + E) = 0$$

и выражаетъ совокупность прямыхъ PQ и ST.

Изъ сказаннаго видно, что при $C = 0$ и $B > 0$, или $B < 0$, такъ же какъ и въ другихъ случаяхъ, когда $B^2 - 4AC > 0$, общее уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, если дискриминантъ $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ пересѣкающіяся прямыя, если $\triangle = 0$.

201. Если $C = 0$ и $B = 0$, то $B^2 - 4AC = 0$ и уравненіе (1) обращается въ

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Очевидно, что мы не можемъ предполагать въ немъ $A = 0$, потому что въ такомъ случаѣ оно не было бы второй степени.

Умножая обѣ его части на $4A$, получимъ

$$(2Ax + D)^2 + 4AEy + 4AF - D^2 = 0$$

или

$$(2Ax + D)^2 = 4AE\left(\frac{D^2 - 4AF}{4AE} - y\right).$$

Первая часть этого послѣдняго равенства есть положительная величина при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x. Поэтому заключаемъ, что, когда A и E имѣютъ одинаковые знаки, то ордината y должна быть меньше $\frac{D^2 - 4AF}{4AE}$; когда же A и E имѣютъ разные знаки, то должно быть $y > \frac{D^2 - 4AF}{4AE}$.

Слѣдовательно, въ томъ и другомъ случаѣ разсматриваемая линія находится по одну только сторону отъ прямой, параллельной оси OX, выражаемой уравненіемъ

$$y = \frac{D^2 - 4AF}{4AE}.$$

Такъ какъ при этомъ координаты точекъ кривой могутъ быть сколь угодно большими, то заключаемъ, что кривая состоитъ изъ одной простирающейся въ безконечность вѣтви и, слѣдовательно, есть парабола.

Замѣтимъ, что при $C=0$ и $B=0$ мы будемъ имѣть $\triangle=-2AE^2$, и если положимъ $\triangle=0$ и, слѣдовательно, $E=0$, то уравненіе (9) не будетъ вовсе содержать перемѣннаго y, и потому (см. стр. 69) будетъ выражать двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, параллельныя оси OY.

Такимъ образомъ видимъ, что при $C=0$ и $B=0$ уравненіе (1) имѣетъ тѣ же геометрическія значенія, какъ и въ другихъ случаяхъ, когда $B^2-4AC=0$.

202. Все вышесказанное представляетъ достаточно полное изслѣдованіе значеній общаго уравненія второй степени. Резюмируя полученные выводы, мы приходимъ къ заключенію, что различіе геометрическихъ значеній уравненія (1) обусловливается различіемъ алгебраическихъ значеній двухъ выраженій, составленныхъ изъ его коэффиціентовъ, именно выраженій:

$$H=B^2-4AC$$

и
$$\triangle=2(4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F).$$

Если $H<0$, то это уравненіе выражаетъ эллипсъ, когда $\triangle$ имѣетъ знакъ, противоположный знакамъ коэффиціентовъ A и C, одну только точку или двѣ мнимыя прямыя, когда $\triangle=0$, и вовсе не выражаетъ дѣйствительной линіи, когда $\triangle$ и A или C имѣютъ одинаковые знаки.

Если $H>0$, то уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, всякій разъ какъ $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ пересѣкающіяся прямыя, когда $\triangle=0$.

Если, наконецъ, $H=0$, то уравненіе (1) выражаетъ параболу, когда $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ параллельныя прямыя при $\triangle=0$.

§ 5. Упрощеніе уравненій второй степени.

203. Такъ какъ одна и та же линія второго порядка можетъ быть выражена различными уравненіями второй степени относительно различныхъ системъ координатъ, то, прежде чѣмъ приступить къ подробному изученію свойствъ этихъ линій, мы постараемся показать, какимъ образомъ могутъ быть найдены ихъ простѣйшія уравненія.

Выше было сказано (см. стр. 118), что уравненіе всякой центральной кривой принимаетъ видъ

$$Ax^2+Cy^2+F=0,$$

когда за оси координатъ приняты два какіе-нибудь сопряженные діаметра и въ частности оси кривой. Ближайшей нашей задачей будетъ отыска-

ніе коэффиціентовъ такого уравненія по коэффиціентамъ уравненія той же кривой относительно какой-нибудь системы координатъ.

Пусть дано уравненіе кривой въ видѣ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Преобразуя оси координатъ такъ, чтобы начало новой системы совпадало съ центромъ, а новыя оси координатъ были параллельны прежнимъ, мы получимъ для той же кривой уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F'=0 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ три первые коэффиціента тѣ же, какъ и въ данномъ уравненіи (1) и, слѣдовательно, опредѣленію подлежитъ только постоянный членъ F'.

Замѣтимъ, что если a и b суть координаты центра кривой относительно прежней системы, то должно быть (см. стр. 112 и 113)

$$2Aa+Bb+D=0 \; , \qquad Ba+2Cb+E=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

и

$$F'=Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F.$$

Послѣднее равенство можно представить въ видѣ

$$2F'=(2Aa+Bb+D)a+(Ba+2Cb+E)b+Da+Eb+2F.$$

и потому, на основаніи двухъ первыхъ,

$$2F'=Da+Eb+2F.$$

Подставивъ сюда величины a и b, опредѣленныя изъ (3), получимъ

$$2F'=\frac{D(2CD-BE)+E(2AE-BD)}{B^2-4AC}+2F,$$

откуда

$$F'=\frac{CD^2+AE^2-BDE+B^2F-4ACF}{B^2-4AC}=\frac{\Delta}{2(B^2-4AC)}.$$

Такимъ образомъ, всѣ коэффиціенты уравненія (2) будутъ извѣстны.

Приведеніе уравненія центральной кривой къ виду (2) называется **преобразованіемъ къ центру**.

204. Предыдущее равенство есть слѣдствіе общаго свойства линій второго порядка, состоящаго въ томъ, что отъ преобразованія координатъ, при которомъ оси сохраняютъ свое направленіе, дискриминантъ уравненія кривой не измѣняется.

Въ самомъ дѣлѣ, формулы такого преобразованія суть

$$x=x'+a \qquad \text{и} \qquad y=y'+b.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (1) обращается въ

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

гдѣ

$$D' = 2Aa + Bb + D, \qquad E' = Ba + 2Cb + E,$$

$$F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F.$$

Изъ послѣдняго равенства имѣемъ

$$2F' = (2Aa + Bb + D)a + (Ba + 2Cb + E)b + Da + Eb + 2F$$

или, на основаніи двухъ предыдущихъ,

$$2(F' - F) = (D + D')a + (E + E')b.$$

Подставивъ сюда на мѣсто a и b ихъ значенія, опредѣленныя изъ выраженій для D' и E', получимъ

$$F' - F = \frac{C(D^2 - D'^2) - B(DE - D'E') + A(E^2 - E'^2)}{B^2 - 4AC},$$

откуда

$$(4AC - B^2)F - AE^2 - CD^2 + BDE = (4AC - B^2)F' - AE'^2 - CD'^2 + BD'E'$$

или

$$\Delta = \Delta'.$$

Положивши здѣсь $D' = 0$ и $E' = 0$, получимъ предыдущее выраженіе для F'.

205. Положимъ теперь, что уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которомъ всѣ коэффиціенты извѣстны, выражаетъ центральную кривую относительно прямоугольной системы координатъ, имѣющей начало въ центрѣ, и постараемся найти уравненіе этой кривой относительно системы координатъ, совпадающей съ ея осями. Преобразованіе координатъ, которое для этого нужно сдѣлать и которое называется преобразованіемъ къ осямъ кривой, состоитъ въ переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой, получающейся вращеніемъ первой около начала на нѣкоторый уголъ α. Формулы для такого преобразованія будутъ, какъ извѣстно (см. стр. 13),

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

По внесеніи этихъ выраженій, уравненіе (4) обращается въ

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ

$$\left.\begin{array}{l} A' = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha \\ B' = 2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ C' = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

постоянный же членъ остается, очевидно, тотъ же самый.

Такъ какъ въ уравненіи (5), представляющемъ кривую, отнесенну къ ея осямъ, не должно существовать члена съ произведеніемъ x y (см. стр. 118), то должно быть

$$B' = 0$$

или

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$tg 2\alpha = \frac{B}{A - C} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Обозначая чрезъ α_0 положительный острый уголъ, удовлѣтворяющій этому условію, будемъ имѣть, что всѣ возможныя значенія α, имъ опредѣляемыя, заключаются въ выраженіи

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{k\pi}{2},$$

гдѣ k есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число.

Такъ какъ, повернувши систему взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ около ихъ точки пересѣченія на прямой уголъ, мы получаемъ ту же самую систему, то значеніями числа k обусловливается только выборъ наименованія новыхъ осей координатъ и направленій, въ которыхъ координаты считаются положительными.

Замѣтимъ, что условіе (7) не даетъ опредѣленныхъ значеній для α только тогда, когда $B = 0$ и $A = C$. Въ этомъ случаѣ, полагая

$$-\frac{F}{A} = a^2,$$

дадимъ уравненію (4) видъ

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

откуда слѣдуетъ, что оно можетъ представлять только кругъ (см. стр. 20).

206. Изъ равенствъ (6) легко получить соотношенія между коэффиціентами A, B, C съ одной стороны и коэффиціентами A', B', C' съ другой, не зависящія отъ угла α.

Въ самомъ дѣлѣ, сложивъ и вычтя первое и третье изъ этихъ равенствъ, находимъ

$$A' + C' = A + C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

и

$$A' - C' = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2B\sin\alpha\cos\alpha$$

или

$$A' - C' = (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha.$$

Въ то же время второе изъ равенствъ (6) можно представить въ видѣ

$$B' = (C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha.$$

Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ будемъ имѣть

$$(A'-C')^2+B'^2=(A-C)^2+B^2$$

или, въ виду равенства (8),

$$(A'-C')^2+B'^2-(A'+C')^2=(A-C)^2+B^2-(A+C)^2$$

и, по раскрытіи скобокъ,

$$B'^2-4A'C'=B^2-4AC \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9)$$

Такимъ образомъ видимъ, что, при переходѣ отъ прямоугольной системы координатъ къ другой, также прямоугольной, коэффиціенты A, B, C измѣняются такъ, что остаются неизмѣнными два слѣдующія выраженія:

$$A+C \quad \text{и} \quad B^2-4AC.$$

Если новыя оси координатъ суть оси кривой, то будемъ имѣть $B'=0$. Два же другіе коэффиціента A' и C' опредѣлятся изъ соотношеній (8) и (9), дающихъ ихъ сумму и произведеніе. Эти коэффиціенты будутъ, слѣдовательно, корнями квадратнаго уравненія

$$x^2-(A+C)x-\frac{B^2-4AC}{4}=0,$$

которые суть

$$\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}.$$

Такимъ образомъ, всѣ коэффиціенты уравненія (5), выражающаго разсматриваемую кривую относительно ея осей будутъ извѣстны.

207. Мы предполагали, что первоначальная система координатъ, относительно которой кривая выражается даннымъ уравненіемъ (4), есть прямоугольная. Если же она косоугольная, то мы можемъ прежде всего замѣнить ее какою-нибудь прямоугольною, напримѣръ такою, которая имѣетъ то же начало и ту же ось абсциссъ.

Формулы для перехода къ такой прямоугольной системѣ будутъ:

$$x=\frac{x'\sin\omega-y'\cos\omega}{\sin\omega}, \quad y=\frac{y'}{\sin\omega},$$

гдѣ ω есть нормальный уголъ первоначальной системы координатъ.

Внеся эти выраженія въ данное уравненіе (4), преобразуемъ его въ

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+F=0,$$

гдѣ

$$A'=A,\; B'=\frac{B-2A\cos\omega}{\sin\omega},$$

и

$$C'=\frac{A\cos^2\omega-B\cos\omega+C}{\sin^2\omega}.$$

Отсюда находимъ

$$\left.\begin{aligned} A' + C' &= \frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega} \\ B'^2 - 4A'C' &= \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Такъ какъ первыя части этихъ двухъ равенствъ сохраняютъ свои величины при всякой прямоугольной системѣ координатъ, то заключаемъ, что эти равенства имѣютъ мѣсто и тогда, когда въ нихъ подъ A', B', C' будемъ разумѣть коэффиціенты въ уравненіи кривой, отнесенной къ осямъ.

Въ такомъ случаѣ $B' = 0$ и, слѣдовательно,

$$A'C' = -\frac{B^2 - 4AC}{4\sin^2\omega}.$$

Коэффиціенты A' и C' опредѣляются, такимъ образомъ, по ихъ суммѣ и произведенію, какъ корни квадратнаго уравненія

$$x^2 - \frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega}\,x - \frac{B^2 - 4AC}{4\sin^2\omega} = 0,$$

которые суть

$$\frac{A + C - B\cos\omega \pm \sqrt{(A - C)^2\sin^2\omega + [B - (A + C)\cos\omega]^2}}{2\sin^2\omega}.$$

208. Равенства (10) имѣютъ мѣсто, какова бы ни была первоначальная косоугольная система координатъ, и такъ какъ уже доказано, что первыя части этихъ равенствъ не измѣняются при переходѣ отъ одной прямоугольной системы координатъ къ другой, также прямоугольной, то заключаемъ, что и вторыя части сохраняютъ свои величины при переходѣ отъ какой бы ни было прямолинейной системы координатъ ко всякой другой.

Слѣдовательно, если одна и та же кривая выражается относительно двухъ прямолинейныхъ системъ координатъ уравненіями

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F &= 0 \\ A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + F &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

то должно быть

$$\left.\begin{aligned} \frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega} &= \frac{A' + C' - B'\cos\omega'}{\sin^2\omega'} \\ \text{и} \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega} &= \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\omega'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

гдѣ ω и ω' суть нормальные углы соотвѣтственныхъ системъ координатъ.

Эти соотношенія включаютъ въ себѣ, какъ частные случаи, равенства (8), (9) и (10).

209. Соотношенія (12), выведенныя нами изъ ихъ частныхъ случаевъ, могутъ быть доказаны еще слѣдующимъ образомъ.

Изъ двухъ уравненій (11) одной и той же кривой имѣемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 .$$

Въ то же время, обозначая черезъ d разстояніе какой-нибудь точки отъ общаго начала обѣихъ системъ координатъ, будемъ имѣть, что квадратъ этого разстоянія выразится чрезъ координаты точки относительно той и другой системы слѣдующимъ образомъ:

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega' .$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ предыдущаго равенства произведеніе kd^2, гдѣ k есть произвольная конечная величина, мы можемъ представить его въ видѣ

$$\begin{gathered} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + k(x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega) = \\ = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + k(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega') \end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &(A + k)x^2 + (B + 2k\cos\omega)xy + (C + k)y^2 = \\ = &(A' + k)x'^2 + (B' + 2k\cos\omega')x'y' + (C' + k)y'^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (13)$$

Величина k можетъ быть выбрана такъ, чтобы первая часть этого послѣдняго равенства была точнымъ квадратомъ двучлена вида

$$Mx + Ny ,$$

что, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто, когда

$$(B + 2k\cos\omega)^2 = 4(A + k)(C + k) ,$$

и, слѣдовательно,

$$4\sin^2\omega\, k^2 + 4(A + C - B\cos\omega)k - (B^2 - 4AC) = 0 .$$

Но при этомъ условіи вторая часть равенства (13) есть также полный квадратъ, потому что она есть результатъ замѣны въ первой части координатъ x и y ихъ выраженіями вида

$$x = mx' + ny' , \qquad y = px' + qy' ,$$

представляющими формулы преобразованія координатъ.

Слѣдовательно, должно быть

$$4\sin^2\omega'\, k^2 + 4(A' + C' - B'\cos\omega')k - (B'^2 - 4A'C') = 0 .$$

Для того, чтобы послѣднія два условія могли имѣть мѣсто при одномъ и томъ же значеніи k, необходимо имѣть

$$\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega'} = \frac{A + C - B\cos\omega}{A' + C' - B'\cos\omega'} = \frac{B^2 - 4AC}{B'^2 - 4A'C'} ,$$

откуда непосредственно получаются равенства (12).

210. Обратимся теперь къ упрощенію уравненія кривыхъ, не имѣющихъ центра. Общее уравненіе (1) представляетъ такую кривую, когда въ немъ $B^2 - 4AC = 0$. Умноживъ обѣ его части на $4A$, мы можемъ поэтому представить его въ видѣ

$$(2Ax + By)^2 + 4A(Dx + Ey + F) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Положимъ, что система координатъ, относительно которой кривая выражается этимъ уравненіемъ, есть прямоугольная. Замѣнимъ эту систему другой также прямоугольной, имѣющей то же начало и, слѣдовательно, получающейся вращеніемъ первой системы на нѣкоторый уголъ α. Формулы для такого преобразованія будутъ:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (14) обращается въ

$$[(2A\cos\alpha + B\sin\alpha)x' + (B\cos\alpha - 2A\sin\alpha)y']^2 +$$
$$+ 4A[(D\cos\alpha + E\sin\alpha)x' + (E\cos\alpha - D\sin\alpha)y' + F] = 0.$$

Уголъ α можетъ быть выбранъ такъ, чтобы было

$$2A\cos\alpha + B\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2A}{B}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\alpha = \frac{-2A}{\sqrt{4A^2 + B^2}} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{4A^2 + B^2}}.$$

Въ такомъ случаѣ, послѣднее уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$Ny'^2 + Px' + Qy' + R = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

гдѣ

$$N = (B\cos\alpha - 2A\sin\alpha)^2 = 4A^2 + B^2 = 4A(A + C),$$

$$P = 4A(D\cos\alpha + E\sin\alpha) = \frac{4A(BD - 2AE)}{\sqrt{4A^2 + B^2}},$$

$$Q = 4A(E\cos\alpha - D\sin\alpha) = \frac{4A(BE + 2AD)}{\sqrt{4A^2 + B^2}}$$

и

$$R = 4AF.$$

Такимъ образомъ видимъ, что посредствомъ произведеннаго преобразованія координатъ въ уравненіи кривой уничтожаются два члена второго измѣренія, именно: членъ, содержащій произведеніе неизвѣстныхъ и членъ, содержащій квадратъ одного изъ неизвѣстныхъ.

Мы предполагали, что первоначальная система координатъ, относительно которой кривая выражается уравненіемъ (14), прямоугольная. Если же она косоугольная, то прежде всего ее можно замѣнить како-

нибудь прямоугольною, напр. такою, которая имѣетъ то же начало и ту же ось абсциссъ, какъ это было показано для центральныхъ кривыхъ (см. стр. 143). Отъ такого преобразованія видъ уравненія (14) не измѣняется.

211. Уравненіе (15) можетъ быть упрощено еще посредствомъ измѣненія начала координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, для перехода отъ прежнихъ осей координатъ къ новымъ, имѣющимъ то же направленіе, мы имѣемъ формулы

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (15) обращается въ

$$Ny^2 + Px + (2Nb + Q)y + (Nb^2 + Pa + Qb + R) = 0.$$

Величины a и b, т. е. координаты новаго начала относительно прежней системы, могутъ быть выбраны такъ, чтобы было

$$2Nb + Q = 0 \qquad \text{и} \qquad Nb^2 + Pa + Qb + R = 0$$

и, слѣдовательно,

$$b = -\frac{Q}{2N} \qquad \text{и} \qquad a = \frac{Q^2 - 4NR}{4NP}.$$

Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе обращается въ

$$Ny^2 + Px = 0$$

или

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

гдѣ

$$p = -\frac{P}{2N} = \frac{2A(2AE - BD)}{(4A^2 + B^2)^{3/2}}.$$

Итакъ, для всякой кривой второго порядка, не имѣющей центра, мы можемъ выбрать такую прямоугольную систему координатъ, относительно которой эта линія выражается уравненіемъ вида (16). Легко видѣть, что ось абсциссъ этой системы есть ось кривой, т. е. діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, къ нему перпендикулярныя, а ось ординатъ касательныя въ вершинѣ кривой, т. е. въ концѣ этого діаметра (смотри стр. 122 и 123).

212. Приведеніе уравненія (14) къ виду (16) и опредѣленіе постояннаго p по коэффиціентамъ этого уравненія достигается еще слѣдующимъ образомъ.

Придавая и отнимая въ первой части уравненія (14) выраженіе

$$2(2Ax + By)K + K^2,$$

гдѣ K есть произвольная конечная величина, дадимъ ему видъ

$$(2Ax + By + K)^2 + 4A(D - K)x + 2(2AE - BK)y +$$
$$+ (4AF - K^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Положимъ сперва, что оси координатъ прямоугольныя, и возьмемъ на плоскости двѣ прямыя, выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} 2Ax+By+K=0 \\ \text{и} \quad 4A(D-K)x-2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)=0 \end{array}\right\} \ldots (18)$$

Называя буквами u и v разстоянія какой-нибудь точки разсматриваемой кривой отъ этихъ двухъ прямыхъ, будемъ, какъ извѣстно, имѣть

$$u=\frac{2Ax+By+K}{\sqrt{4A^2+B^2}},$$

$$v=\frac{4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)}{2\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}.$$

Если примемъ первую изъ прямыхъ (18) за новую ось абсциссъ, вторую за новую ось ординатъ и назовемъ уголъ между ними через θ, то будемъ, очевидно, имѣть

$$u=y'\sin\theta \qquad \text{и} \qquad v=x'\sin\theta.$$

Вслѣдствіе этого изъ предыдущихъ равенствъ получимъ

$$2Ax+By+K=y'\sin\theta\sqrt{4A^2+B^2}$$

и

$$4A(D-K)x-2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)=$$
$$=2x'\sin\theta\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2},$$

и потому уравненіе (17) принимаетъ видъ

$$y'^2\sin^2\theta(4A^2+B^2)+2x'\sin\theta\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}=0$$

или

$$y'^2=2px',$$

гдѣ

$$p=-\frac{\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}{(4A^2+B^2)\sin\theta}.$$

Уголъ же θ, образуемый прямыми (18), опредѣляется по коэффиціентамъ ихъ уравненій, при чемъ, какъ извѣстно (см. стр. 42),

$$\sin\theta=\frac{4A[B(D-K)-(2AE-BK)]}{2\sqrt{4A^2+B^2}\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}=$$
$$=\frac{2A(BD-2AE)}{\sqrt{4A^2+B^2}\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}.$$

Слѣдовательно,

$$p=-\frac{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}{2A(BD-2AE)\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

Величина K, взятая нами произвольно, можетъ быть выбрана такъ, чтобы уголъ θ между новыми осями координатъ имѣлъ данную величину

ву. Для того чтобы новыя оси были прямоугольныя, должно выполняться условіе перпендикулярности прямыхъ (18):

$$4A^2(D-K)+B(2AE-BK)=0,$$

откуда

$$K=\frac{2A(2AD+BE)}{4A^2+B^2}.$$

Легко убѣдиться, что, по внесеніи этого значенія въ предыдущее выраженіе для p, получимъ

$$p=\frac{2A(2AE-BD)}{(4A^2+B^2)^{3/2}},$$

что мы имѣли и выше.

213. Если положимъ, что первоначальная система координатъ косоугольная, и обозначимъ уголъ между ея осями черезъ ω, то предыдущія выраженія разстояній u и v обратятся въ

$$u=\frac{(2Ax+By+K)\sin\omega}{R_1},$$

$$v=\frac{[4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)]\sin\omega}{2R_2},$$

гдѣ положено для краткости

$$R_1{}^2=4A^2+B^2-4AB\cos\omega$$

и $$R_2{}^2=4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2-4A(D-K)(2AE-BK)\cos\omega.$$

Уравненіе (17) обратится, какъ и прежде, въ

$$y'^2=2px',$$

гдѣ

$$p=-\frac{R_2\sin\omega}{R_1{}^2\sin\theta},$$

при чемъ для угла θ между прямыми (18) будемъ имѣть

$$\sin\theta=\frac{2A(BD-2AE)\sin\omega}{R_1R_2}$$

и, слѣдовательно,

$$p=\frac{R_2{}^2}{2A(2AE-BD)R_1}.$$

Условіе перпендикулярности прямыхъ (18) будетъ имѣть въ настоящемъ случаѣ видъ

$$4A^2(D-K)+B(2AE-BK)-2A[B(D-K)+(2AE-BK)]\cos\omega=0,$$

откуда

$$K=\frac{2A[(2AD+BE)-(2AE+BD)\cos\omega]}{R_1{}^2}.$$

Не трудно убѣдиться, что, при такомъ значеніи K, будемъ имѣть

$$R_1 R_2 = 2A(2AE - BD)\sin\omega.$$

Опредѣляя отсюда R_2 и подставляя въ выраженіе для p, получимъ

$$p = \frac{2A(2AE - BD)\sin^2\omega}{R_1^{\,3}}.$$

или

$$p = \frac{2A(2AE - BD)\sin^2\omega}{(4A^2 + B^2 - 4AB\cos\omega)^{3/2}}$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

КРУГЪ.

§ 1. Уравненія круга. Касательныя и поляры.

214. Кругъ есть линія второго порядка, представляющая частный видъ эллипсовъ. Эта линія разсматривается, какъ извѣстно, въ начальной геометріи, и всѣ ея свойства обнаруживаются элементарнымъ путемъ. Въ настоящей главѣ мы постараемся вывести главныя свойства круга аналитически и приложить методъ Аналитической геометріи къ нѣкоторымъ вопросамъ о кругѣ и о системахъ круговъ.

215. Опредѣляя кругъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на одномъ и томъ же разстояніи отъ данной точки, называемой его центромъ, мы уже показали (см. стр. 20), что уравненіе его относительно прямоугольной системы координатъ есть

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

а въ случаѣ косоугольной системы координатъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2, \quad \ldots (2)$$

гдѣ α и β суть координаты центра, а r радіусъ.

Когда начало координатъ находится въ центрѣ круга, то уравненіе его принимаетъ простѣйшій видъ, а именно

$$x^2+y^2=r^2$$

для прямоугольной системы координатъ

и $$x^2+y^2+2xy\cos\omega=r^2$$

для косоугольной.

216. Уравненіе (1), по раскрытіи скобокъ, принимаетъ видъ

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

Сравнивая его съ общимъ уравненіемъ второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

заключаемъ, что они имѣютъ одно и то же геометрическое значеніе, когда

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{0}=\frac{C}{1}=\frac{D}{-2\alpha}=\frac{E}{2\beta}=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2-r^2},$$

т. е. когда

$$A=C, \qquad B=0,$$

$$2A\alpha+D=0, \quad 2A\beta+E=0$$

и

$$A(\alpha^2+\beta^2-r^2)=F.$$

Слѣдовательно, чтобы уравненіе второй степени выражало относительно прямоугольной системы координатъ кругъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиценты при квадратахъ неизвѣстныхъ были равны между собою, а коэффицентъ при произведеніи неизвѣстныхъ равнялся нулю.

При этихъ условіяхъ, центръ и радіусъ выражаемаго уравненіемъ круга опредѣляется по его коэффиціентамъ слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha=-\frac{D}{2A}, \quad \beta=-\frac{E}{2A},$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}.$$

Отсюда видимъ, что уравненіе второй степени представляетъ при условіяхъ $A=C$ и $B=0$ дѣйствительный кругъ только тогда, когда въ немъ

$$D^2+E^2>4AF.$$

Если же

$$D^2+E^2=4AF,$$

то $r=0$, и уравненіе будетъ представлять единственную точку, которую можно разсматривать, какъ кругъ безконечно малаго радіуса. Такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ первая часть уравненія разлагается на два множителя

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta) \quad \text{и} \quad (x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta),$$

то можно также сказать, что оно выражаетъ совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ.

217. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ общее уравненіе второй степени имѣетъ одно и то же значеніе съ уравненіемъ (2), когда

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2\cos\omega}=\frac{C}{1}=\frac{D}{-2(\alpha+\beta\cos\omega)}=\frac{E}{2(\beta+\alpha\cos\omega)}=$$

$$=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\omega-r^2},$$

т. е. представляетъ кругъ, когда въ немъ

$$A=C \quad \text{и} \quad B=2A\cos\omega.$$

Центръ и радіусъ этого круга опредѣляется въ этомъ случаѣ по коэффиціентамъ уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \frac{E\cos\omega - D}{2A\sin^2\omega}, \qquad \beta = \frac{D\cos\omega - E}{2A\sin^2\omega}$$

и

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 2DE\cos\omega - 4AF\sin^2\omega}}{2A\sin\omega}.$$

Въ слѣдующемъ мы будемъ пользоваться исключительно прямоугольными координатами, какъ представляющими болѣе удобства въ видахъ простоты аналитическихъ выраженій и дѣйствій.

218. Уравненіе круга, въ какомъ бы видѣ оно ни было дано, содержитъ три параметра, и всякая система условій, опредѣляющихъ вполнѣ кругъ, должна быть достаточна для нахожденія этихъ параметровъ, такъ же какъ и обратно.

Положимъ, что даны три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), и пусть уравненіе круга, проходящаго черезъ нихъ, будетъ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Въ такомъ случаѣ должно быть

$$x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0,$$

$$x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0,$$

откуда коэффиціенты D, E и F этого уравненія могутъ быть найдены по координатамъ данныхъ точекъ. Слѣдовательно, уравненіе круга, проходящаго черезъ три данныя точки, можно представить, какъ результатъ исключенія D, E и F изъ предыдущихъ четырехъ равенствъ, т. е. въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому полагая, что четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежатъ на одномъ кругѣ, будемъ имѣть соотношеніе

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \\ x_4^2 + y_4^2, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} - (x_4^2+y_4^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

или
$$d_1^2\,\triangle_1 - d_2^2\,\triangle_2 + d_3^2\,\triangle_3 - d_4^2\,\triangle_4 = 0\,,$$

гдѣ d_1, d_2, d_3, d_4 означаютъ разстоянія данныхъ точекъ отъ начала координатъ, а $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ суть площади треугольниковъ, образуемыхъ каждыми тремя изъ этихъ точекъ. При этомъ площади двухъ треугольниковъ, напр. $\triangle_1$ и $\triangle_2$, нужно считать имѣющими одинаковые знаки, когда ихъ различныя вершины находятся по одну и ту же сторону отъ общей стороны, и имѣющими различные знаки въ противномъ случаѣ.

219. Отыскивая точки пересѣченія какого-нибудь круга, выражаемаго уравненіемъ.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

съ прямою, проходящею черезъ начало координатъ и выражаемою уравненіемъ

$$y = mx\,,$$

получимъ, по исключеніи y, уравненіе

$$(1+m^2)x^2 + (D+Em)x + F = 0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ x_1 и x_2 абсциссы искомыхъ точекъ, а чрезъ y_1 и y_2 ихъ ординаты, будемъ имѣть

$$x_1x_2 = \frac{F}{1+m^2}$$

и, въ то же время,

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = x_1^2x_2^2(1+m^2)^2\,,$$

откуда получаемъ

$$d_1d_2 = x_1x_2(1+m^2) = F\,,$$

гдѣ d_1 и d_2 суть разстоянія искомыхъ точекъ отъ начала координатъ.

Послѣднее равенство выражаетъ извѣстное изъ начальной геометріи свойство, что произведеніе отрѣзковъ сѣкущей, проведенной черезъ какую-нибудь точку, отъ этой точки до точекъ пересѣченія съ кругомъ, есть величина постоянная, т. е. не зависящая отъ направленія сѣкущей.

220. Положимъ, что центръ круга находится въ началѣ координатъ и, слѣдовательно, уравненіе его есть

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

а пусть

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

будетъ уравненіе нѣкоторой прямой въ нормальной формѣ.

Рѣшая эти уравненія совмѣстно, получимъ для координатъ точекъ пересѣченія слѣдующія выраженія:

$$x = p\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{r^2 - p^2},$$

$$y = p\sin\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{r^2 - p^2}.$$

Отсюда видно, что точки пересѣченія будутъ дѣйствительныя, когда разстояніе прямой отъ центра круга менѣе его радіуса, и мнимыя, когда это разстояніе болѣе радіуса.

Если же $p = r$, то точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, прямая

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - r = 0$$

есть касательная.

При этомъ предыдущія выраженія для x и y опредѣлятъ координаты точки прикосновенія. Обозначая ихъ черезъ x_1 и y_1, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$x_1 = r\cos\alpha \quad \text{и} \quad y_1 = r\sin\alpha.$$

Вслѣдствіе этого послѣднее уравненіе, выражающее касательную, можно представить въ видѣ

$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$

221. Всякая прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія (x_1, y_1), выразится уравненіемъ

$$(y - y_1) = m(x - x_1),$$

и если она есть нормаль, т. е. перпендикулярна къ касательной (см. стр. 123), то должно быть

$$m = \frac{y_1}{x_1}.$$

Слѣдовательно, уравненіе нормали къ кругу будетъ

$$y_1 x - x_1 y = 0,$$

что представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ, т. е. центръ круга. Такимъ образомъ видимъ, что радіусъ, проведенный къ точкѣ прикосновенія касательной, есть нормаль, свойство, извѣстное также изъ начальной геометріи.

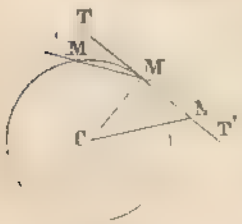
222. Уравненіе касательной къ кругу можетъ быть выведено различнымъ образомъ. Между прочимъ, оно получается, какъ частный

видъ общаго уравненія касательныхъ къ кривымъ второго порядк найденнаго нами выше (см. стр. 121).

Положимъ, что требуется найти уравненіе касательной къ кругу, вы ражаемому уравненіемъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\;$$

Обозначая черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты двухъ какихъ-нибу точекъ M и M' этого круга (фиг. 44), будем имѣть, что уравненіе



Фиг. 44.

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=$$
$$=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$$

представляетъ прямую, пересѣкающую кругъ въ этихъ двухъ точкахъ, ибо оно есть первой сте пени и удовлетворяется какъ при $x=x_1$, $y=y_1$ такъ и при $x=x_2$, $y=y_2$.

Отсюда слѣдуетъ, что при $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, т. е. въ предположе ніи, что точка M' совпадаетъ съ M, это уравненіе обращается въ искомое уравненіе касательной TT'

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2.$$

Первая часть этого уравненія представляетъ квадратъ разстояні какой-нибудь точки N, лежащей на касательной, отъ точки прикосно венія M. Слѣдовательно, то же значеніе должна имѣть и вторая часть.

Отсюда заключаемъ, что результатъ подстановки въ первую част уравненія круга (3), на мѣсто перемѣнныхъ x и y, координатъ какой нибудь точки равняется квадрату касательной къ кругу изъ этой точки.

Послѣднее уравненіе касательной можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$[(x-\alpha)-(x_1-\alpha)]^2+[(y-\beta)-(y_1-\beta)]^2=$$
$$=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$$

или

$$2(x-\alpha)(x_1-\alpha)+2(y-\beta)(y_1-\beta)=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+r^2,$$

или, замѣчая, что x_1 и y_1 удовлетворяютъ уравненію круга,

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=r^2.$$

При $\alpha=0$ и $\beta=0$ отсюда получается уравненіе касательной, найденное выше.

223. Уравненіе

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-r=0$$

представляетъ, какъ мы видѣли, касательную къ кругу радіуса r, имѣю щему центръ въ началѣ координатъ. Полагая, что a и b суть коор-

динаты нѣкоторой точки, чрезъ которую проходитъ эта касательная, будемъ имѣть

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha - r = 0,$$

откуда

$$(a^2+b^2)\cos^2\alpha - 2ar\cos\alpha + r^2 - b^2 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\cos\alpha = \frac{ar \pm b\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}$$

и

$$\sin\alpha = \frac{br \mp a\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}.$$

Подставивъ эти выраженія въ предыдущее уравненіе, получимъ уравненія двухъ касательныхъ, проходящихъ черезъ данную точку (a, b):

$$x(ar \pm b\sqrt{a^2+b^2-r^2}) + y(br \mp a\sqrt{a^2+b^2-r^2}) - r(a^2+b^2) = 0$$

или

$$(ax+by-a^2-b^2)r + (bx-ay)\sqrt{a^2+b^2-r^2} = 0$$

и

$$(ax+by-a^2-b^2)r - (bx-ay)\sqrt{a^2+b^2-r^2} = 0.$$

Перемноживъ ихъ почленно, получимъ уравненіе второй степени, представляющее совокупность этихъ касательныхъ,

$$(ax+by-a^2-b^2)^2r^2 - (bx-ay)^2(a^2+b^2-r^2) = 0.$$

Замѣчая же, что

$$(bx-ay)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2,$$

не трудно это уравненіе представить въ видѣ

$$(ax+by-r^2)^2 - (a^2+b^2-r^2)(x^2+y^2-r^2) = 0.$$

Понятно, что это уравненіе могло бы быть найдено тѣмъ же самымъ способомъ, какъ выше было выведено уравненіе двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка, данной общимъ уравненіемъ (см. стр. 124 и 125).

224. Уравненіе

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0,$$

представляющее касательную къ кругу

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

когда x_1, y_1 суть координаты какой-нибудь его точки, выражаетъ нѣкоторую опредѣленную прямую и тогда, когда x_1, y_1 означаютъ координаты точки, данной какъ-нибудь на плоскости. Прямая эта называется *полярою* точки (x_1, y_1) относительно круга, а сама точка ея *полюсомъ* (см. стр. 125). Понятно, что поляра всякой точки плоскости

есть прямая дѣйствительная. Въ случаѣ, когда кругъ выражается уравненiемъ вида (1), уравненiе поляры, очевидно, будетъ

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)-r^2=0.$$

Все сказанное выше о полярахъ относительно линiй второго порядка вообще относится, очевидно, и къ полярамъ относительно круга. Такъ прежде всего заключаемъ, что поляра точки, лежащей на кругѣ есть касательная въ этой точкѣ, а полюсъ касательной есть ея точка прикосновенiя. Далѣе, замѣчая, что равенство

$$x_1x_2+y_1y_2-r^2=0$$

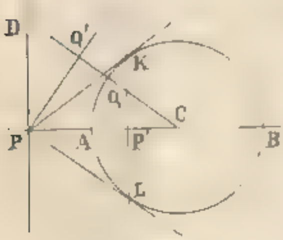
есть въ одно и то же время результатъ подстановки въ уравненiе

$$xx_1+yy_1-r^2=0$$

координатъ x_2, y_2 и результатъ подстановки въ уравненiе

$$xx_2+yy_2-r^2=0$$

координатъ x_1, y_1, убѣждаемся, что поляра точки, лежащей на данной прямой, проходитъ черезъ полюсъ этой прямой, и полюсъ прямой проходящей черезъ данную точку, лежитъ на полярѣ этой точки.



Фиг. 45.

Если точка P, которой координаты суть x_1 и y_1 (фиг. 45), находится внѣ круга, такъ что $PC>r$, то называя черезъ K и L точки прикосновенiя касательныхъ изъ этой точки, будемъ имѣть, что поляра точки P, какъ лежащей на этихъ касательныхъ, будетъ прямая, проходящая черезъ ихъ полюсы, т. е. точки прикосновенiя K и L.

225. Такъ какъ прямая, соединяющая точку x_1, y_1 съ центромъ круга

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

выражается уравненiемъ

$$xy_1-yx_1=0,$$

то убѣждаемся, что она перпендикулярна къ прямой

$$xx_1+yy_1-r^2=0,$$

т. е. къ полярѣ этой точки.

Итакъ, поляра всякой точки относительно круга перпендикулярна къ дiаметру, проходящему черезъ эту точку.

Слѣдовательно, поляра точки P', средины хорды KL, будетъ прямая PD, параллельная этой хордѣ, и поляра точки Q, лежащей гдѣ-

будь на хордѣ KL, будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ P на діаметръ QC.

Называя черезъ l разстояніе прямой

$$xx_1+yy_1-r^2=0$$

отъ начала координатъ, будемъ имѣть

$$l=\frac{r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{r^2}{l'},$$

гдѣ l' есть разстояніе точки (x_1, y_1) отъ начала координатъ. Слѣдовательно,

$$ll'=r^2.$$

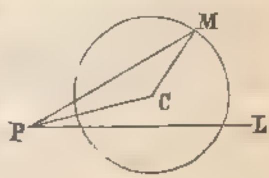
Радіусъ круга есть, слѣдовательно, средняя геометрическая между разстояніями отъ центра какой-либо точки и ея поляры, соотношеніе, указывающее на весьма простое построеніе поляры данной точки и полюса данной прямой относительно круга.

226. Иногда кругъ бываетъ удобнѣе разсматривать по отношенію къ полярной системѣ координатъ.

Положимъ, что P есть полюсъ и PL полярная ось такой системы (фиг. 46), и пусть координаты центра круга будутъ

$$CP=d \quad \text{и} \quad \angle CPL=\alpha.$$

Въ такомъ случаѣ, называя координаты какой-нибудь точки M на кругѣ черезъ ρ и φ, т. е. полагая



Фиг. 46

$$MP=\rho \quad \text{и} \quad \angle MPL=\varphi,$$

будемъ имѣть изъ треугольника PMC

$$r^2=\rho^2+d^2-2\rho d\cos(\varphi-\alpha)$$

или

$$\rho^2-2\rho d\cos(\varphi-\alpha)+d^2-r^2=0,$$

гдѣ r есть радіусъ круга.

Это и есть общая зависимость между координатами точекъ круга, т. е. уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ. Понятно, что его можно было бы вывести изъ уравненія круга въ прямолинейныхъ координатахъ посредствомъ преобразованія координатъ.

Если центръ круга находится на полярной оси, то $\alpha=0$, и предыдущее уравненіе обращается въ

$$\rho^2-2\rho d\cos\varphi+d^2-r^2=0.$$

Если же кромѣ того кругъ проходитъ черезъ полюсъ системы ко...динатъ, то $d=r$, и уравненіе круга принимаетъ видъ

$$\varrho = 2r\cos\varphi .$$

§ 2. Системы круговъ.

227. Положимъ, что намъ даны два круга, уравненія которыхъ су...

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2=0\\ (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2=0\end{array}\right\}\quad \text{и} \quad \ldots\ldots (1)$$

Обозначая для краткости первыя части этихъ уравненій черезъ U_1 и U_2, будемъ имѣть, что уравненіе

$$U_1-kU_2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ k есть какая-нибудь постоянная величина, выражаетъ также кругъ. Это слѣдуетъ изъ того, что въ немъ такъ же. какъ и въ данныхъ уравненіяхъ (1), коэффиціенты при x^2 и y^2 равны, а члена съ произведеніемъ xy не существуетъ вовсе.

Такъ какъ значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ (1), удовлетворяютъ и уравненію (2), то кругъ, выражаемый послѣднимъ, проходитъ черезъ точки пересѣченія (дѣйствительныя или мнимыя) данныхъ круговъ.

При неопредѣленномъ k уравненіе (2) представляетъ безчисленное множество круговъ, составляющихъ систему, называемую *пучкомъ* (см. стр. 74).

Изъ уравненія (2) имѣемъ

$$k=\frac{U_1}{U_2}=\frac{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2}{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2},$$

и такъ какъ члены отношенія, составляющаго вторую часть этого равенства, при всякомъ значеніи координатъ x и y представляютъ квадраты длинъ касательныхъ изъ точки, опредѣляемой этими координатами, къ двумъ даннымъ кругамъ (см. стр. 156), то заключаемъ, что кругъ (2) представляетъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, касательныя изъ которыхъ къ двумъ даннымъ кругамъ находятся въ постоянномъ отношеніи.

228. При $k=1$ уравненіе (2) обращается въ

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2-(x-\alpha_2)^2-(y-\beta_2)^2+r_2{}^2=0$$

или

$$2(\alpha_2-\alpha_1)x+2(\beta_2-\beta_1)y+(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)-$$
$$-(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

и представляетъ, слѣдовательно, прямую, проходящую черезъ точки пересѣченія данныхъ круговъ. Она есть дѣйствительная при всякомъ расположеніи этихъ круговъ и называется ихъ *радикальною осью*.

Опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ круговъ сводится, такимъ образомъ, на опредѣленіе точекъ пересѣченія одного изъ нихъ съ радикальной осью.

Изъ сказаннаго о значеніи множителя k слѣдуетъ, что радикальная ось есть геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ обоимъ даннымъ кругамъ равны между собою.

Уравненіе прямой, проходящей черезъ центры данныхъ круговъ, есть

$$(\beta_2-\beta_1)x-(\alpha_2-\alpha_1)y+(\alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1)=0.$$

Сравнивая его съ уравненіемъ радикальной оси, убѣждаемся, что эти прямыя перпендикулярны.

Итакъ, радикальная ось двухъ круговъ перпендикулярна къ ихъ линіи центровъ.

Очевидно, что для всѣхъ круговъ, принадлежащихъ пучку

$$U_1-kU_2=0,$$

радикальная ось одна и та же. Отсюда слѣдуетъ, что касательныя изъ какой-нибудь точки радикальной оси ко всѣмъ кругамъ пучка равны между собою и что центры всѣхъ круговъ пучка лежатъ на одной прямой.

Когда круги соприкасаются, то радикальная ось есть ихъ общая касательная.

220. Уравненіе радикальной оси представляетъ, какъ показано, частный случай уравненія (2) или

$$(1-k)(x^2+y^2)-2(\alpha_1-k\alpha_2)x-2(\beta_1-k\beta_2)y+$$
$$+(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2)-k(\alpha_2^2+\beta_2^2-r_2^2)=0$$

при $k=1$. Но если мы будемъ измѣнять въ этомъ уравненіи k, непрерывно приближая къ единицѣ, то координаты одной изъ точекъ пересѣченія выражаемаго имъ круга съ какой-нибудь прямой, напримѣръ, съ одной изъ осей координатъ будутъ непрерывно возрастать и при $k=1$ сдѣлаются безконечно большими (см. стр. 108). Слѣдовательно, въ этомъ частномъ случаѣ уравненіе (2) удовлетворяется не только точками радикальной оси, но и безконечнымъ множествомъ безконечно удаленныхъ точекъ, т. е. выражаетъ совокупность радикальной оси съ прямою, безконечно удаленною.

Отсюда заключаемъ, что всѣ круги, принадлежащіе пучку

$$U_1-kU_2=0,$$

проходятъ не только черезъ точки пересѣченія круга $U_1 = 0$ съ радикальною осью, но и чрезъ точки пересѣченія его съ безконечно удаленною прямою, точки, очевидно, мнимыя.

Тѣ же самыя мнимыя безконечно удаленныя точки должны быть разсматриваемы, какъ принадлежащія всякому другому кругу, ибо, замѣняя въ уравненіи (2) многочленъ U_2 первою частью уравненія какого бы ни было круга, мы ни круга $U_1 = 0$, ни безконечно удаленной прямой не измѣняемъ [1]).

Итакъ, всѣ круги на плоскости должны быть разсматриваемы, какъ имѣющіе двѣ общія безконечно удаленныя мнимыя точки. Эти точки имѣютъ очень важное значеніе во многихъ аналитико-геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Ихъ называютъ *круговыми* или *циклическими* точками.

Такъ какъ эти точки удовлетворяютъ уравненію

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

при всякомъ r, то онѣ суть также безконечно удаленныя точки двухъ мнимыхъ прямыхъ, выражаемыхъ въ совокупности уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = 0$$

и отдѣльно уравненіями

$$x + y\sqrt{-1} = 0 \quad \text{и} \quad x - y\sqrt{-1} = 0.$$

230. Если, имѣя пучекъ круговъ, мы примемъ ихъ радикальную ось за ось ординатъ, а прямую центровъ за ось абсциссъ (фиг. 47), то уравненіе всякаго круга, принадлежащаго пучку, будетъ имѣть видъ

$$(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

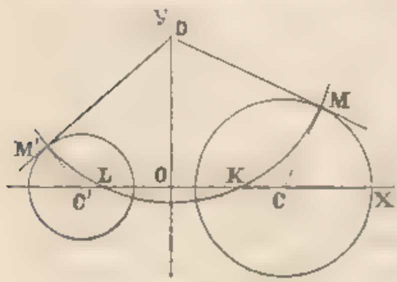
или

$$x^2 + y^2 - 2ax + m^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ

$$m = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Эта величина есть, очевидно, длина касательной къ кругу изъ начала координатъ, ибо при $x=0$, $y=0$ первая часть уравненія (5) обращается въ m^2.



Фиг. 47

Она есть постоянная, т. е. одинаковая для всѣхъ круговъ пучка, и дѣйствительная только тогда, когда $a^2 > r^2$, т. е. когда круги не пересѣкаются.

Въ уравненіи (5) a есть неопредѣленный параметръ, каждымъ значе-

---

[1]) Двухъ различныхъ безконечно удаленныхъ прямыхъ быть не можетъ. Это есть логическое слѣдствіе положенія, что на каждой прямой безконечно удаленная точка единственна (см. стр. 10).

ніемъ котораго опредѣляется одинъ изъ круговъ пучка. Если положимъ, что $a = \pm m$, то будемъ имѣть $r = 0$.

Кругъ обращается въ этомъ случаѣ въ точку или совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ.

Слѣдовательно, въ томъ случаѣ, когда круги пучка не пересѣкаются съ радикальною осью, на прямой центровъ существуютъ двѣ дѣйствительныя точки K и L, находящіяся отъ радикальной оси на разстояніи m, которыя представляютъ собою два безконечно малыхъ круга, принадлежащихъ пучку. Эти точки называютъ *предѣльными точками* пучка.

231. Уравненіе поляры какой-нибудь данной точки (x_1, y_1) по отношенію къ кругу (4) есть, какъ извѣстно (см. стр. 158),

$$(x-a)(x_1-a)+yy_1-r^2=0$$

или

$$xx_1+yy_1-a(x+x_1)+m^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

При неопредѣленномъ значеніи a, это уравненіе представляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$xx_1+yy_1+m^2=0 \quad \text{и} \quad x+x_1=0.$$

Слѣдовательно, поляры всякой точки относительно круговъ, имѣющихъ общую радикальную ось, проходятъ черезъ одну точку.

Если данная точка находится на радикальной оси, то $x_1=0$, и второе изъ двухъ послѣднихъ уравненій обращается въ $x=0$. Это показываетъ, что поляры точекъ, лежащихъ на радикальной оси, пересѣкаются также на этой оси.

Если данная точка совпадаетъ съ одной изъ предѣльныхъ точекъ K и L, то $x_1 = \pm m$ и $y_1 = 0$.

Въ этомъ случаѣ уравненіе (6) обращается въ

$$(a \mp m)(x \pm m) = 0$$

или

$$x = \mp m$$

и представляетъ при всякомъ a прямую, проходящую черезъ другую предѣльную точку и параллельную оси ординатъ.

Итакъ, каждая изъ предѣльныхъ точекъ имѣетъ одну и ту же поляру относительно всѣхъ круговъ пучка, которая проходитъ чрезъ другую предѣльную точку и параллельна радикальной оси.

232. Касательныя, проведенныя къ кругамъ пучка изъ какой-нибудь точки D радикальной оси (фиг. 47), какъ мы знаемъ, равны между собою и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто ихъ точекъ прикосновенія есть кругъ, имѣющій точку D центромъ. Этотъ кругъ проходитъ, очевидно, черезъ предѣльныя точки K и L и пересѣкается съ кру-

гами пучка *ортогонально*, т. е. такъ, что касательныя къ нему въ т
кахъ пересѣченія M, M' и т. д. перпендикулярны къ касательны
этихъ круговъ.

Уравненіе этого круга имѣетъ видъ

$$x^2 + (y - \beta)^2 - r'^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - m^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

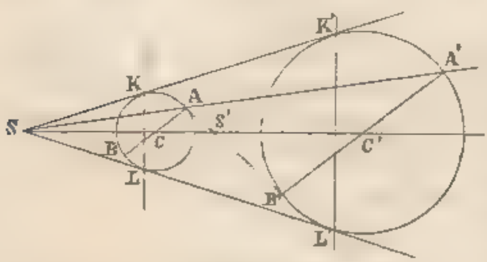
ибо

$$r'^2 - \beta^2 = \overline{DK}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{OK}^2 = m^2.$$

При неопредѣленномъ значеніи β это уравненіе представляетъ
чекъ круговъ, для которыхъ ось ординатъ есть прямая центровъ, а о
абсциссъ радикальная ось.

Пучки (5) и (7) представляютъ, такимъ образомъ, двѣ ортогональны
системы круговъ и, притомъ, предѣльныя точки перваго пучка с
точки пересѣченія всѣхъ круговъ второго, или обратно.

233. Если, имѣя два круга, выражаемые уравненіями (1), мы пр-
ведемъ черезъ ихъ центры C и C' два параллельные діаметра AB
$A'B'$ (фиг. 48), то прямыя, со-
единяющія концы этихъ діаме-
тровъ, будутъ встрѣчать ли-
нію центровъ въ двухъ точ-
кахъ S и S', положеніе кото-
рыхъ не зависитъ отъ направ-
ленія, въ которомъ проведены
діаметры.



Фиг. 48.

Въ самомъ дѣлѣ, прямая AA'
образуетъ съ прямою центровъ
и радіусами CA и $C'A'$ два подобныхъ треугольника, изъ которыхъ
при всякой величинѣ угловъ, имѣемъ

$$\frac{CS}{C'S} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Точно также изъ подобія треугольниковъ, образуемыхъ прямою AB
съ прямою центровъ и радіусами CA и $C'B'$, заключаемъ, что, при
всякомъ направленіи этихъ радіусовъ, должно быть

$$\frac{CS}{C'S'} = \frac{CA}{C'B'} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что точки S и S' дѣлятъ разстояніе CC'
между центрами круговъ въ одномъ и томъ же отношеніи, т. е. гар-
монически (см. стр. 95), и это отношеніе равняется отношенію радіу-
совъ круговъ. Первая изъ этихъ точекъ, находящаяся внѣ отрѣзка CC',

называется *внѣшнимъ центромъ подобія* данныхъ круговъ, а вторая, лежащая внутри этого отрѣзка,— ихъ *внутреннимъ центромъ подобія*.

Координаты внѣшняго центра подобія будутъ, очевидно (см. стр. 9),

$$x = \frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1},$$

а внутренняго

$$x = \frac{r_2\alpha_1 + r_1\alpha_2}{r_2 + r_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{r_2\beta_1 + r_1\beta_2}{r_2 + r_1}.$$

Въ томъ случаѣ, когда радіусы CA и $C'A'$ перпендикулярны къ прямой, соединяющей ихъ концы, эта послѣдняя будетъ касательною къ обоимъ кругамъ.

Слѣдовательно, центры подобія двухъ круговъ суть точки пересѣченія ихъ общихъ касательныхъ.

Зная координаты центровъ подобія, не трудно найти и уравненія общихъ касательныхъ, какъ касательныхъ изъ данной точки къ одному изъ данныхъ круговъ (см. стр. 157), а также и точки прикосновенія этихъ касательныхъ, какъ точекъ пересѣченія круговъ съ полярами центровъ подобія.

234. Уравненіе поляры KL внѣшняго центра подобія S по отношенію къ кругу $U_1 = 0$ получимъ, подставляя въ общее уравненіе поляры относительно этого круга

$$(x - \alpha_1)(x_1 - \alpha_1) + (y - \beta_1)(y_1 - \beta_1) - r_1^2 = 0$$

на мѣсто x_1 и y_1 выраженія

$$\frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1} \quad \text{и} \quad \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1}.$$

Результатъ этой подстановки будетъ

$$(x - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + (y - \beta_1)(\beta_1 - \beta_2) - r_1(r_2 - r_1) = 0$$

или

$$(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y - (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2) + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - r_1r_2) = 0.$$

Это уравненіе можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y - (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2)$$
$$- (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = 0$$

или, наконецъ,

$$(U_2 - U_1) - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = 0.$$

Подставляя тѣ же самыя значенія координатъ x_1 и y_1 въ уравненіе поляры относительно второго круга

$$(x - \alpha_2)(x_1 - \alpha_2) + (y - \beta_2)(y_1 - \beta_2) - r_2^2 = 0,$$

получимъ уравненіе поляры $K'L'$ точки S въ видѣ

$$(x-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)+(y-\beta_2)(\beta_1-\beta_2)-r_2(r-r_1)=0$$

или, по выполненіи тѣхъ же преобразованій,

$$(U_2-U_1)+(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2=0\,.$$

Такимъ же точно образомъ найдемъ, что уравненія поляръ внутренняго центра подобія S' относительно круговъ $U_1=0$ и $U_2=0$ будутъ послѣдовательно

$$(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1+r_2)^2=0$$

и

$$(U_2-U_1)+(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)-(r_1+r_2)^2=0\,.$$

§ 3. Свойства трехъ круговъ.

235. Возьмемъ три какіе-нибудь круга, уравненія которыхъ пусть будутъ

$$U_1=0\,,\quad U_2=0\,,\quad U_3=0\,,\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

гдѣ

$$U_1=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2\,,$$
$$U_2=(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2\,,$$
$$U_3=(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2-r_3{}^2\,.$$

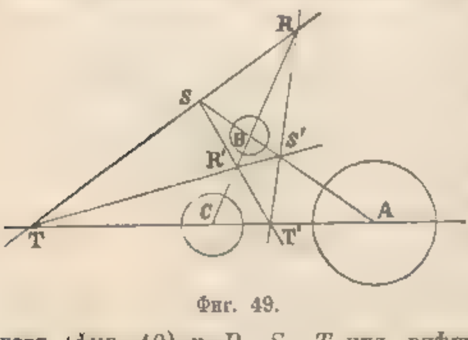
Радикальныя оси каждыхъ двухъ изъ этихъ круговъ будутъ выражаться уравненіями

$$U_1-U_2=0,\quad U_2-U_3=0,\quad U_3-U_1=0.$$

Такъ какъ сумма первыхъ частей этихъ трехъ уравненій тождественно равняется нулю, то убѣждаемся, что радикальныя оси трехъ какихъ бы ни было круговъ пересѣкаются въ одной точкѣ. Эта точка называется *радикальнымъ центромъ* системы трехъ круговъ.

По свойству радикальныхъ осей касательныя изъ радикальнаго центра ко всѣмъ тремъ даннымъ кругамъ равны между собою

236. Каждые два изъ круговъ (1) имѣютъ, какъ показано выше, два центра подобія. Слѣдовательно, всего имѣется для этихъ круговъ шесть центровъ подобія.



Фиг. 49.

Не трудно убѣдиться, что эти шесть точекъ расположены на четырехъ прямыхъ, по три на каждой.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A, B, C будутъ центры данныхъ круговъ (фиг. 49) и R, S, T ихъ внѣшніе центры подобія, координаты которыхъ суть послѣдовательно

$$x_1 = \frac{r_3\alpha_2 - r_2\alpha_3}{r_3 - r_2}, \qquad y_1 = \frac{r_3\beta_2 - r_2\beta_3}{r_3 - r_2},$$

$$x_2 = \frac{r_1\alpha_3 - r_3\alpha_1}{r_1 - r_3}, \qquad y_2 = \frac{r_1\beta_3 - r_3\beta_1}{r_1 - r_3},$$

$$x_3 = \frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1}, \qquad y_3 = \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1}.$$

Отсюда находимъ

$$y_2 - y_3 = \frac{r_1[\beta_1(r_3 - r_2) + \beta_2(r_1 - r_3) + \beta_3(r_2 - r_1)]}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)}$$

или сокращенно

$$y_2 - y_3 = \frac{r_1 M}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)}.$$

Точно такъ же найдемъ

$$y_3 - y_1 = \frac{r_2 M}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

и

$$y_1 - y_2 = \frac{r_3 M}{(r_3 - r_2)(r_1 - r_3)}.$$

Слѣдовательно,

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) =$$

$$= \frac{M[(r_3\alpha_2 - r_2\alpha_3)r_1 + (r_1\alpha_3 - r_3\alpha_1)r_2 + (r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2)r_3]}{(r_3 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)}.$$

и такъ какъ вторая часть тождественно равняется нулю, то и убѣждаемся, что условіе, при которомъ три точки R, S и T лежатъ на одной прямой (см. стр. 47), выполняется.

Вторая часть послѣдняго равенства равняется нулю и тогда, когда двѣ изъ величинъ r_1, r_2, r_3 измѣнятъ знакъ, что, какъ видно изъ выраженій для координатъ центровъ подобія, соотвѣтствуетъ замѣнѣ двухъ внѣшнихъ изъ этихъ центровъ, напримѣръ R и S, соотвѣтственными внутренними R' и S'.

Это показываетъ, что каждые два внутренніе центра подобія лежатъ на одной прямой съ однимъ изъ внѣшнихъ.

Четыре прямыя, на которыхъ лежатъ по три центра подобія трехъ круговъ, называются *осями подобія* этихъ круговъ. Одна изъ нихъ соединяетъ три внѣшніе центра и носитъ названіе внѣшней оси подобія, три же остальныя соединяютъ одинъ внѣшній центръ подобія съ двумя внутренними.

Если два круга соприкасаются съ третьимъ, то прямая, соединяющая точки прикосновенія, есть ось подобія и, слѣдовательно, проходитъ черезъ центръ подобія этихъ двухъ круговъ.

237. Соприкосновеніе двухъ круговъ, какъ извѣстно, можетъ быть двоякаго рода: внѣшнее, когда центры круговъ лежатъ по разныя стороны отъ точки касанія, и внутреннее, когда они лежатъ по одну и ту же сторону отъ этой точки.

Въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами круговъ равняется суммѣ ихъ радіусовъ, а во второмъ разности.

Отсюда заключаемъ, что условіе, что какой-нибудь кругъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

соприкасается одновременно съ тремя данными кругами

$$U_1=0\,,\quad U_2=0\,,\quad U_3=0\,,$$

можетъ быть выражено слѣдующими тремя равенствами:

$$(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2=(r\pm r_1)^2\,,$$
$$(\alpha-\alpha_2)^2+(\beta-\beta_2)^2=(r\pm r_2)^2\,,$$
$$(\alpha-\alpha_3)^2+(\beta-\beta_3)^2=(r\pm r_3)^2\,,$$

которыми этотъ кругъ и опредѣляется вполнѣ, ибо изъ нихъ три неизвѣстныя α, β и r могутъ быть найдены.

Эти равенства могутъ быть представлены еще слѣдующимъ образомъ:

$$U_1=r(r\pm 2r_1)\,,$$
$$U_2=r(r\pm 2r_2)\,,$$
$$U_3=r(r\pm 2r_3)\,,$$

гдѣ въ многочленахъ, составляющихъ первыя части, неизвѣстныя суть координаты α и β центра искомаго круга.

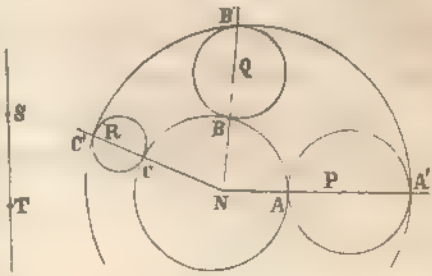
Два изъ этихъ уравненій могутъ быть замѣнены двумя изъ слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned} U_1-U_2&=2r(r_1\pm r_2)\,,\\ U_2-U_3&=2r(r_2\pm r_3)\,,\\ U_3-U_1&=2r(r_3\pm r_1)\,,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

которыя получаются вычитаніемъ ихъ одного изъ другого и удобнѣе потому, что содержатъ только первыя степени опредѣляемыхъ величинъ α, β и r.

Смотря по знакамъ во вторыхъ частяхъ этихъ равенствъ, опредѣляемый ими кругъ можетъ имѣть различнаго рода прикосновеніе съ данными кругами, и дѣлая всевозможныя сочетанія этихъ знаковъ, убѣждаемся, что, вообще говоря, должно существовать восемь круговъ,

соприкасающихся съ тремя данными. Два изъ этихъ круговъ имѣютъ со всѣми данными кругами внѣшнее или внутреннее прикосновеніе. Каждый же изъ шести остальныхъ имѣетъ съ однимъ изъ данныхъ круговъ внѣшнее прикосновеніе, а съ двумя другими внутреннее, или обратно.



Фиг 50.

238. Чтобы найти геометрически, т. е. построеніемъ, кругъ (2), имѣющій съ тремя данными кругами (1) внѣшнее прикосновеніе, постараемся найти точки прикосновенія его A, B, C съ этими кругами (фиг. 50). Для координатъ точки C прикосновенія его съ кругомъ $U_1 = 0$ будемъ имѣть, очевидно, слѣдующія выраженія:

$$x = \frac{r_1\alpha + r\alpha_1}{r_1 + r}, \qquad y = \frac{r_1\beta + r\beta_1}{r_1 + r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

откуда находимъ

$$\alpha = \frac{r_1 + r}{r_1}x - \frac{r}{r_1}\alpha_1 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{r_1 + r}{r_1}y - \frac{r}{r_1}\beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Подставляя эти значенія для α и β въ первое изъ уравненій (3), которое въ настоящемъ случаѣ имѣетъ видъ

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha + 2(\beta_2 - \beta_1)\beta + h = 2r(r_1 - r_2),$$

гдѣ

$$h = (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 - r_1{}^2) - (\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - r_2{}^2),$$

получимъ

$$2[(\alpha_2 - \alpha_1)x + (\beta_2 - \beta_1)y]\frac{r_1 + r}{r_1} =$$

$$= 2[(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_1 + (\beta_2 - \beta_1)\beta_1]\frac{r}{r_1} - h + 2r(r_1 - r_2).$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на r_1 и прибавивъ къ обѣимъ частямъ $(r_1 + r)h$, получимъ

$$[2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + h](r_1 + r) =$$
$$= [2(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_1 + 2(\beta_2 - \beta_1)\beta_1 + h]r + 2rr_1(r_1 - r_2)$$

или

$$[2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + h](r_1 + r) =$$
$$= [(r_1 - r_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2 - \beta_2)^2]r,$$

что можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$(U_2 - U_1)(r_1 + r) = [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 - (r_1 - r_2)^2]\, r, \ldots (6)$$

гдѣ величины x и y, входящія въ многочленъ $U_2 - U_1$, суть координаты точки прикосновенія C.

Подобнымъ же образомъ, подставляя выраженія (5) въ третье изъ равенствъ (3), имѣющее въ настоящемъ случаѣ видъ

$$2(\alpha_1 - \alpha_3)\alpha + 2(\beta_1 - \beta_3)\beta + k = 2r(r_3 - r_1),$$

гдѣ

$$k = (\alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2) - (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2),$$

будемъ имѣть

$$(U_3 - U_1)(r_1 + r) = [(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 - (r_1 - r_3)^2]\, r \ldots . (7)$$

Исключая r изъ этого и предыдущаго равенства, получимъ

$$\frac{U_2 - U_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \frac{U_3 - U_1}{(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 - (r_1 - r_3)^2}, \ldots (8)$$

уравненіе первой степени относительно x и y, выражающее прямую, проходящую чрезъ разсматриваемую точку прикосновенія C. Кромѣ того, эта прямая проходитъ, очевидно, черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$U_2 - U_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_3 - U_1 = 0,$$

т. е. черезъ радикальный центръ N трехъ данныхъ круговъ.

239. Если кругъ (2) имѣетъ съ тремя данными кругами внутреннее прикосновеніе, то координаты точки C' прикосновенія его съ первымъ изъ этихъ круговъ будутъ

$$x = \frac{r_1\alpha - r\alpha_1}{r_1 - r} \quad \text{и} \quad y = \frac{r_1\beta - r\beta_1}{r_1 - r}.$$

Такъ какъ эти выраженія отличаются отъ выраженій (4) только знакомъ при r, то, опредѣляя изъ нихъ α и β и подставляя въ первое и третье изъ уравненій (3), получимъ два уравненія, отличающіяся отъ уравненій (6) и (7) также только знакомъ при r. Результатомъ исключенія r изъ этихъ двухъ уравненій будетъ, слѣдовательно, то же самое уравненіе (8).

Такимъ образомъ видимъ, что прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ пересѣкаетъ кругъ $U_1 = 0$ въ двухъ точкахъ C и C', въ которыхъ онъ соприкасается съ двумя кругами, имѣющими со всѣми тремя данными внѣшнее или внутреннее прикосновеніе.

240. Вычитая изъ обѣихъ частей уравненія (8) по единицѣ, дадимъ ему видъ

$$\frac{(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2}=$$

$$=\frac{(U_3-U_1)-(\alpha_1-\alpha_3)^2-(\beta_1-\beta_3)^2+(r_1-r_3)^2}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2},$$

откуда видно, что прямая, имъ выражаемая, проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2=0$$

и

$$(U_3-U_1)-(\alpha_1-\alpha_3)^2-(\beta_1-\beta_3)^2+(r_1-r_3)^2=0.$$

Первая изъ этихъ прямыхъ есть, какъ мы видѣли выше (см. стр. 165), поляра относительно круга $U_1=0$ внѣшняго центра подобія S круговъ $U_1=0$ и $U_2=0$. Вторая же есть поляра относительно того же круга внѣшняго центра подобія T круговъ $U_1=0$ и $U_3=0$.

Слѣдовательно, точка пересѣченія этихъ прямыхъ есть полюсъ относительно круга $U_1=0$ прямой линіи ST, соединяющей эти центры подобія, т. е. внѣшней оси подобія.

Итакъ, прямая (8), проходящая черезъ радикальный центръ трехъ данныхъ круговъ, проходитъ въ то же время черезъ полюсъ R внѣшней оси подобія этихъ круговъ относительно круга $U_1=0$.

241. Изъ сказаннаго видимъ, что для построенія круговъ, имѣющихъ съ тремя данными внѣшнее или внутреннее прикосновеніе, нужно найти полюсы P, Q, R внѣшней оси подобія относительно каждаго изъ данныхъ круговъ и соединить ихъ прямыми линіями съ радикальнымъ центромъ N этихъ круговъ. Точки пересѣченія A, B, C этихъ прямыхъ съ данными кругами, точки, въ которыхъ касательныя къ этимъ кругамъ пересѣкаются между собою на ихъ радикальныхъ осяхъ, будутъ точками прикосновенія одного изъ искомыхъ круговъ. Остальныя три точки A', B', C' пересѣченія тѣхъ же прямыхъ съ данными кругами будутъ точками прикосновенія другого изъ искомыхъ круговъ.

Пользуясь для такого же построенія другими осями подобія трехъ данныхъ круговъ, найдемъ такимъ же точно образомъ точки прикосновенія круговъ, имѣющихъ съ однимъ изъ данныхъ внѣшнее прикосновеніе, а съ двумя другими внутреннее, или обратно.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ЭЛЛИПСЪ.

§ 1. Форма эллипса и его построеніе.

242. Мы видѣли, что уравненіе всякой центральной кривой второго порядка въ томъ случаѣ, когда за оси координатъ приняты два ея сопряженные діаметра, имѣетъ видъ (см. стр. 118)

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и что это уравненіе можетъ представлять эллипсъ только тогда, когда коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки.

Если при этомъ постоянный членъ F имѣетъ такой же знакъ, какъ и эти коэффиціенты, то уравненіе (1) не имѣетъ никакого геометрическаго значенія. Если же $F = 0$, то оно удовлетворяется только при $x = 0$ и $y = 0$ и, слѣдовательно, выражаетъ одну только точку.

Имѣя въ виду въ настоящей главѣ изученіе свойствъ эллипса при помощи его простѣйшаго уравненія вида (1), мы должны, слѣдовательно, предполагать, что въ этомъ уравненіи постоянный членъ F не равняется нулю и имѣетъ знакъ, обратный знаку коэффиціентовъ A и C.

243. Представляя уравненіе (1) въ видѣ

$$-\frac{A}{F}x^2 - \frac{C}{F}y^2 = 1$$

и полагая

$$-\frac{F}{A} = a^2 \qquad \text{и} \qquad -\frac{F}{C} = b^2,$$

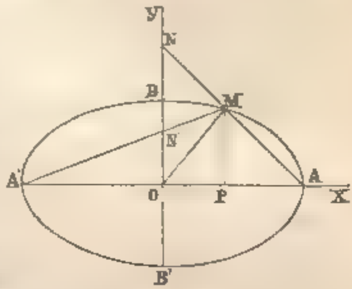
гдѣ a и b суть, очевидно, величины дѣйствительныя и конечныя, будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Въ этомъ видѣ можетъ быть, слѣдовательно, представлено уравненіе всякаго эллипса.

Такъ какъ отсюда видно, что, при $y=0$, $x=\pm a$ и, при $x=0$, $y=\pm b$, то заключаемъ, что a есть разстояніе отъ начала координатъ, или центра эллипса, до точекъ пересѣченія его съ осью абсциссъ, т. е. половина того діаметра эллипса, который принятъ за эту ось. И точно такъ же b есть половина діаметра, принятаго за ось ординатъ.

Въ слѣдующемъ мы будемъ предполагать, что уравненіе (2) выражаетъ эллипсъ относительно прямоугольной системы координатъ (фиг. 51), вслѣдствіе чего a и b будутъ означать половины осей эллипса AA' и BB', т. е. двухъ его сопряженныхъ діаметровъ, перпендикулярныхъ между собою. Если же тотъ же самый эллипсъ будетъ отнесенъ къ косоугольной системѣ координатъ, оси которой суть какіе-нибудь его сопряженные діаметры, то уравненіе его будетъ имѣть также видъ (2), но при другихъ значеніяхъ постоянныхъ a и b.



Фиг. 51.

Если въ уравненіи (2) $a=b$, то оно обращается въ

$$x^2+y^2=a^2$$

и выражаетъ, какъ мы знаемъ, кругъ. Слѣдовательно, кругъ есть частный видъ эллипса, когда всѣ оси его равны между собою.

Очевидно, что изъ двухъ случаевъ, $a>b$ и $a<b$, достаточно разсматривать только одинъ, ибо любая изъ двухъ осей эллипса можетъ быть принята за ось абсциссъ или ординатъ. Обыкновенно за ось абсциссъ принимаютъ большую изъ двухъ осей эллипса, вслѣдствіе чего въ уравненіи (2) должно предполагать $a>b$.

244. Рѣшивъ уравненіе (2) относительно y, будемъ имѣть

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Отсюда видно, что ордината y будетъ дѣйствительно только тогда, когда абсцисса OP по абсолютной величинѣ менѣе OA. Слѣдовательно, вершины A и A' эллипса, лежащія на его большой оси, суть точки этой кривой, наиболѣе удаленныя отъ малой оси BB'. Такъ какъ, далѣе, изъ выраженія (3) видно, что наибольшее значеніе ордината y получаетъ при $x=0$, и это значеніе есть $y=\pm b$, то заключаемъ, что вершины B и B', принадлежащія малой оси, суть точки эллипса, наиболѣе удаленныя отъ его большой оси AA'.

Изъ этого слѣдуетъ, что эллипсъ помѣщается всѣми точками внутри прямоугольника, образуемаго четырьмя прямыми, проведенными черезъ его четыре вершины A, A', B и B' параллельно его осямъ.

Такъ какъ оси эллипса суть его оси симметріи (см. стр. 120), то четыре части или дуги этой кривой, на которыя она раздѣляется вершинами, совершенно одинаковы по виду.

245. Обозначимъ черезъ r разстояніе какой-нибудь точки M эллипса отъ его центра (фиг. 51), т. е. половину діаметра OM, и пусть φ будетъ уголъ, образуемый этою прямою съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi .$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (2), получимъ

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1 ,$$

откуда

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

или

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Это есть не что иное, какъ уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ r и φ относительно системы координатъ, полюсъ которой находится въ его центрѣ, а полярная ось совпадаетъ съ большою осью.

Для всѣхъ точекъ эллипса, лежащихъ на дугѣ AMB, уголъ φ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и если будемъ увеличивать его непрерывно между этими предѣлами, то, какъ видно изъ соотношенія (4), радіусъ r будетъ непрерывно уменьшаться отъ $r = a$ до $r = b$.

Это показываетъ, что большая ось эллипса есть наибольшій изъ его діаметровъ, а малая—наименьшій.

Такъ какъ, далѣе, вторая часть равенства (4) не измѣняется при перемѣнѣ φ на $\pi - \varphi$, то заключаемъ, что діаметры, равно наклоненные къ осямъ эллипса, равны между собою.

Отсюда слѣдуетъ, что если изъ центра эллипса опишемъ окружность радіусомъ, большимъ его малой оси и меньшимъ большой, то оси будутъ бисектрами угловъ, образуемыхъ діаметрами, проходящими черезъ точки пересѣченія этой окружности съ эллипсомъ.

246. Относительно осей координатъ, совпадающихъ съ осями эллипса, кругъ, описанный на его большой оси, какъ на діаметрѣ (фиг. 52), выражается уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Если назовемъ черезъ y' ординату какой-нибудь точки L этого круга, соотвѣтствующую абсциссѣ $OP = x$, то будемъ имѣть

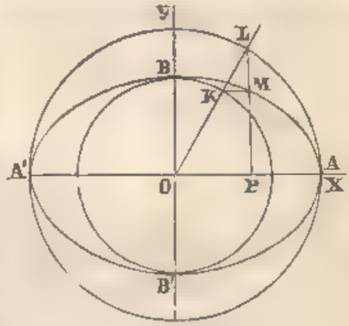
$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (3) ординаты эллипса, будемъ имѣть, что для одного и того же значенія x

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a},$$

т. е. при одной и той же абсциссѣ ордината эллипса менѣе ординаты круга въ отношеніи осей эллипса.

Это указываетъ на слѣдующій весьма простой способъ построенія точекъ эллипса, когда извѣстны его оси.



Фиг. 52.

На двухъ осяхъ эллипса AA' и BB', какъ на діаметрахъ, описываемъ двѣ концентрическія окружности и изъ центра проводимъ произвольный радіусъ OL. Проведя затѣмъ черезъ точку L пересѣченія этого радіуса съ большою окружностью прямую LP, параллельную малой оси, и черезъ точку K пересѣченія его съ малою окружностью прямую KM, параллельную большой оси, получимъ при пересѣченіи этихъ прямыхъ точку M, принадлежащую эллипсу. Дѣйствительно, при такомъ построеніи будемъ имѣть

$$\frac{MP}{LP} = \frac{OK}{OL} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Измѣняя направленіе радіуса OL, можемъ построить такимъ образомъ сколько угодно точекъ эллипса и, притомъ, сколь угодно близкихъ между собою.

247. Уравненіе (2), по уничтоженіи знаменателей, можно представить въ видѣ

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2).$$

Въ этомъ послѣднемъ видѣ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся отъ перемноженія соотвѣтствующихъ частей двухъ уравненій первой степени

$$ay = kb(a - x) \qquad \text{и} \qquad kay = b(a + x), \; . \; . \; . \; . \; . (5)$$

гдѣ k какая угодно постоянная величина, и такъ какъ, вслѣдствіе этого, значенія перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющія одновременно послѣднимъ уравненіямъ. удовлетворяютъ и уравненію эллипса, то заклю-

чаемъ, что точка пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ этими уравненіями, принадлежитъ эллипсу.

При неопредѣленномъ значеніи k первое изъ уравненій (5) представляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину A (фиг. 51), а второе пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину A'. Если зададимъ постоянной k какое-нибудь частное значеніе, то получимъ два опредѣленные луча AM и $A'M$ этихъ пучковъ, пересѣкающіеся на эллипсѣ и встрѣчающіе ось OY въ такихъ точкахъ N и N', что, какъ видно изъ уравненій (5),

$$ON = kb \qquad \text{и} \qquad k \cdot ON' = b$$

и, слѣдовательно,

$$ON \cdot ON' = b^2.$$

Такимъ образомъ видимъ, что эллипсъ можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ, проходящихъ черезъ концы большой оси и встрѣчающихъ малую ось въ двухъ точкахъ, находящихся по одну и ту же сторону отъ центра и отстоящихъ отъ него на разстоянія, средняя геометрическая которыхъ равняется половинѣ малой оси.

Это указываетъ на другое простое построеніе точекъ эллипса, когда извѣстны его оси AA' и BB'.

Черезъ вершину A проводимъ произвольную прямую AN (фиг. 51) и на оси BB' находимъ извѣстнымъ изъ начальной геометріи построеніемъ такую точку N', чтобы было

$$ON \cdot ON' = \overline{OB}^2.$$

Точка M пересѣченія прямыхъ AN и $A'N'$ будетъ принадлежать эллипсу.

Измѣняя направленіе прямой AN, можно построить такимъ образомъ сколько угодно точекъ эллипса, сколь угодно близкихъ между собою.

Уравненіе эллипса можно также представить въ видѣ

$$b^2x^2 = a^2(b^2 - y^2),$$

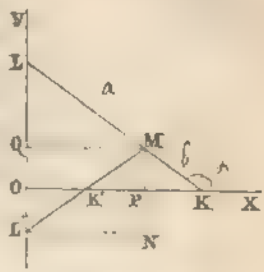
въ которомъ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся отъ перемноженія соотвѣтственныхъ частей уравненій

$$bx = ka(b - y) \qquad \text{и} \qquad kbx = a(b + y),$$

выражающихъ прямыя, проходящія черезъ вершины B и B'. Легко видѣть, такъ же какъ и выше, что при одномъ и томъ же значеніи k эти прямыя пересѣкаются на эллипсѣ и встрѣчаютъ большую ось AA'

въ двухъ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ центра имѣютъ среднею геометрическою половину большой оси.

248. Положимъ, что двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя OX и OY (фиг. 53) пересѣкаются нѣкоторою прямою въ двухъ точкахъ K и L, и пусть M будетъ какая-нибудь точка этой прямой. Обозначая черезъ x и y координаты точки M относительно осей OX и OY, а черезъ α уголъ прямой KL съ осью OX, и полагая, что



Фиг. 53.

$$LM = a\,, \qquad MK = b\,,$$

будемъ имѣть изъ треугольниковъ LQM и MPK

$$\left(\frac{MQ}{LM}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{MP}{MK}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha\,,$$

откуда, по сложеніи,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Это показываетъ, что точка M находится на эллипсѣ, оси котораго совпадаютъ съ прямыми OX и OY и равняются удвоеннымъ отрѣзкамъ LM и MK.

Если вообразимъ, что прямая KL перемѣщается такъ, что точки K и L движутся по осямъ OX и OY и отрѣзокъ KL сохраняетъ свою величину, то точка M будетъ перемѣщаться, оставаясь на названномъ эллипсѣ.

На этомъ основывается построеніе эллипса непрерывнымъ движеніемъ посредствомъ такъ называемаго эллиптическаго циркуля.

Если будемъ разсматривать точку M, какъ принадлежащую прямой $K'L'$, уголъ которой съ осью OX есть $(\pi - \alpha)$, то изъ треугольниковъ $L'MN$ и $K'MP$ будемъ также имѣть

$$\left(\frac{NL'}{L'M}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{MP}{MK'}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$$

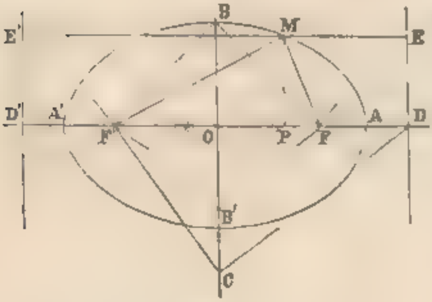
и, слѣдовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Такимъ образомъ видимъ, что когда прямая линія движется такъ, что отрѣзокъ ея, заключающійся между точками ея пересѣченія съ двумя неподвижными взаимно перпендикулярными прямыми, сохраняетъ свою величину, то каждая точка этой прямой, какъ внутренняя, такъ и внѣшняя по отношенію къ отрѣзку, описываетъ эллипсъ.

§ 2. Фокусы и директрисы.

249. Двѣ точки F и F', лежащія на большой оси эллипса (фиг. 54) и отстоящія отъ его центра на разстояніи равномъ



Фиг. 54.

$$\sqrt{a^2 - b^2},$$

гдѣ a и b суть половины осей, называются *фокусами* этой кривой.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что, для нахожденія этихъ точекъ построеніемъ, нужно только большую ось AA' пересѣчь окружностью, описанною изъ конца малой оси B радіусомъ, равнымъ половинѣ большой оси.

Если эллипсъ отнесенъ къ его осямъ и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

то координаты одного изъ фокусовъ F будутъ

$$x = +\sqrt{a^2 - b^2} \qquad \text{и} \qquad y = 0,$$

а другого F'

$$x = -\sqrt{a^2 - b^2} \qquad \text{и} \qquad y = 0.$$

Поэтому, обозначая черезъ r и r' разстоянія какой-нибудь точки $M(x, y)$ эллипса отъ двухъ его фокусовъ и называя буквою α абсолютную величину радикала $\sqrt{a^2 - b^2}$, т. е. разстояніе OF, будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (x - \alpha)^2 + y^2 \\ \text{и} \qquad r'^2 &= (x + \alpha)^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

И такъ какъ для точки M, какъ принадлежащей эллипсу,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

то

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + a^2 = \left(a - \frac{\alpha}{a}x\right)^2,$$

откуда

$$r = a - \frac{\alpha}{a}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Принимая во вниманіе, что $\alpha < a$ и $a > x$, заключаемъ, что это выраженіе представляетъ абсолютную величину разстоянія r.

Такимъ же образомъ второе изъ равенствъ (2) даетъ

$$r' = a + \frac{c}{a}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно,

$$r + r' = 2a.$$

Разстоянія r и r' какой-нибудь точки эллипса отъ фокусовъ называются ея *радіусами векторами*. Послѣднее равенство показываетъ, такимъ образомъ, что *сумма радіусовъ векторовъ для всѣхъ точекъ эллипса имѣетъ величину постоянную, равную его большой оси.*

250. Легко видѣть, что это свойство вполнѣ характеризуетъ эллипсъ и можетъ быть принято за его опредѣленіе.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что требуется найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равняется данной длинѣ. Обозначая эту послѣднюю черезъ $2a$, а разстояніе между двумя данными точками черезъ $2c$, и принимая за ось абсциссъ прямую, соединяющую данныя точки, а за ось ординатъ перпендикуляръ изъ ея средины, будемъ имѣть, что уравненіе искомаго геометрическаго мѣста есть

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

Такъ какъ, по уничтоженіи радикаловъ, отсюда получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1,$$

то и заключаемъ, что это геометрическое мѣсто есть эллипсъ.

На послѣднемъ свойствѣ эллипса основывается слѣдующій способъ построенія его непрерывнымъ движеніемъ при помощи гибкой и нерастяжимой нити.

Два конца нити, длина которой равняется большой оси искомаго эллипса, укрѣпляютъ въ его фокусахъ и затѣмъ натягиваютъ эту нить чертящимъ остріемъ, прилегающимъ къ плоскости чертежа. Понятно изъ сказаннаго, что при перемѣщеніи острія по плоскости, такъ чтобы нить постоянно была натянута, оно должно описать эллипсъ.

251. Выраженія (3) и (4) мы можемъ представить слѣдующимъ образомъ:

$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \quad \text{и} \quad r' = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} + x\right). \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Разность $\left(\frac{a^2}{c} - x\right)$ выражаетъ разстояніе точки $M(x, y)$ отъ прямой DE, параллельной оси OY и отстоящей отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{a^2}{c}$ (фиг. 54). Сумма же $\left(\frac{a^2}{c} + x\right)$ выражаетъ разстояніе той

же точки $M(x, y)$ отъ прямой $D'E'$, параллельной оси OY и отстоя-щей отъ начала на такое же разстояніе $\frac{a^2}{c}$, какъ и прямая DE, в по другую отъ него сторону.

Эти двѣ прямыя называются *директрисами*. Уравненія ихъ, оче-видно, будутъ:

$$cx - a^2 = 0 \quad \text{и} \quad cx + a^2 = 0.$$

По даннымъ осямъ и фокусамъ эллипса директрисы могутъ быть най-дены слѣдующимъ построеніемъ.

Отложивши отъ центра по направленію малой оси длину OC, ра-ную OA, и соединивъ точку C съ фокусомъ F', возставляемъ въ перпендикуляръ къ CF' точка D пересѣченія этого перпендикуляр съ большой осью AA' будетъ принадлежать директрисѣ. Дѣйствительн. изъ прямоугольнаго треугольника DCF' имѣемъ

$$OC^2 = OD \cdot OF',$$

откуда

$$OD = \frac{OC^2}{OF'} = \frac{a^2}{c}.$$

Называя черезъ d и d' разстоянія ME и ME' точки $M(x, y)$ эллип отъ двухъ директрисъ, будемъ имѣть изъ равенствъ (5):

$$r = \frac{c}{a} d \quad \text{и} \quad r' = \frac{c}{a} d',$$

откуда

$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}.$$

Это показываетъ, что каждому фокусу соотвѣтствуетъ своя дир-триса и что *отношеніе разстояній каждой точки эллипса отъ фок и соотвѣтствующей директрисы имѣетъ постоянную величину.*

Это постоянное отношеніе, равное для эллипса отношенію разсто между фокусами къ большой оси, называется *эксцентриситетомъ*. О видно, что для всякаго эллипса эксцентриситетъ меньше единицы.

Обозначая эксцентриситетъ буквою e, будемъ имѣть

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Слѣдовательно, съ уменьшеніемъ отношенія малой оси къ боль эксцентриситетъ эллипса увеличивается, и обратно.

При $e = 0$ эллипсъ, очевидно, обращается въ кругъ.

252. Длина перпендикуляра, возставленнаго изъ фокуса эллипса большой оси до пересѣченія съ эллипсомъ, называется его *пара*

...ъ [1]). Иначе говоря, параметромъ эллипса называютъ половину хорды, ...ходящей черезъ фокусъ и перпендикулярной къ большой оси.

Обозначая параметръ буквою p, будемъ, слѣдовательно, имѣть, что ... и p суть координаты точки, принадлежащей эллипсу, и потому

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$p^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)=\frac{b^4}{a^2}$$

и

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-\alpha^2}{a}=\frac{a^2(1-e^2)}{a}=a(1-e^2).$$

Если за оси координатъ примемъ двѣ прямыя, изъ которыхъ одна ...впадаетъ съ большой осью, а другая есть перпендикуляръ къ ней ...ъ фокусѣ F, то уравненіе эллипса относительно такой системы координатъ получится изъ уравненія (1), полагая

$$x=\alpha+x' \quad \text{и} \quad y=y'.$$

Слѣдовательно, это уравненіе будетъ

$$b^2(\alpha+x')^2+a^2y'^2=a^2b^2,$$

или

$$a^2(x'^2+y'^2)=(b^2-\alpha x')^2,$$

или

$$x'^2+y'^2=(p-ex')^2.$$

Полагая здѣсь

$$x'=\varrho\cos\varphi \quad \text{и} \quad y'=\varrho\sin\varphi,$$

получимъ

$$\varrho^2=(p-e\varrho\cos\varphi)^2,$$

откуда

$$\varrho(1+e\cos\varphi)=p$$

и, слѣдовательно,

$$\varrho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Это есть уравненіе эллипса относительно полярной системы координатъ, полюсъ которой находится въ фокусѣ, а полярная ось совпадаетъ

---

[1]) До сихъ поръ мы употребляли это наименованіе въ его широкомъ смыслѣ (см. ... 35), т. е. какъ названіе всякой постоянной величины, служащей для опредѣленія ...кривой. Въ настоящемъ же случаѣ ему приписывается исключительное геометрическое значеніе.

съ большой осью и направлена изъ полюса къ ближайшей вершинѣ. Очевидно, что его можно также представить въ видѣ

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}.$$

§ 3. Касательныя и нормали.

253. Уравненіе касательной къ эллипсу, отнесенному къ его осямъ и выражаемому, слѣдовательно, уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

можно получить изъ общаго уравненія касательной къ кривой второго порядка (см. стр. 121), разсматривая само уравненіе эллипса (1), какъ частный видъ общаго уравненія второй степени. Но, въ виду простоты уравненія (1), легко получить уравненіе касательной и непосредственно, повторяя одинъ изъ тѣхъ пріемовъ, которые мы прилагали къ общему уравненію. Замѣчая, напримѣръ, что уравненіе

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{a^2}+\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

выражаетъ сѣкущую, встрѣчающую эллипсъ (1) въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2), и полагая, что эти двѣ точки постепенно сближаются, будемъ имѣть, что въ предѣлѣ, когда сѣкущая обратится въ касательную, уравненіе ея будетъ

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,$$

или

$$\frac{x_1^2-2xx_1}{a^2}+\frac{y_1^2-2yy_1}{b^2}=-1,$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Здѣсь x_1 и y_1 суть координаты точки прикосновенія, а x и y координаты любой точки касательной.

Такъ какъ въ приведенныхъ соображеніяхъ не принимается вовсе во вниманіе, что оси координатъ прямоугольныя, то эти соображенія примѣнимы и къ случаю, когда эллипсъ отнесенъ къ какимъ бы ни было двумъ сопряженнымъ діаметрамъ (см. стр. 173). Полагая, что въ этомъ случаѣ его уравненіе есть

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

чемъ, слѣдовательно, имѣть для выраженія касательной уравненіе

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

254. Мы видѣли (см. стр. 125), что если въ уравненіи касательной мѣсто координатъ точки прикосновенія будутъ находиться кордината какой-нибудь точки плоскости, то это уравненіе будетъ представлять *поляру* этой точки.

Полагая, что данная точка находится на большой оси эллипса, будемъ имѣть, изъ уравненія (2), что ея поляра выражается уравненіемъ

$$xx_1 = a^2,$$

а точно также поляра точки, лежащей на малой оси эллипса, будетъ выражаться уравненіемъ

$$yy_1 = b^2.$$

Припоминая, что двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются *сопряженными* (см. стр. 126), мы видимъ, такимъ образомъ, что половина большой оси эллипса есть средняя геометрическая разстояній каждыхъ двухъ сопряженныхъ точекъ этой оси отъ центра эллипса и такое же значеніе имѣетъ половина малой оси для лежащихъ на ней сопряженныхъ точекъ.

Соотношенія эти указываютъ на простой способъ построенія поляры какой угодно точки по отношенію къ эллипсу, когда даны оси этой кривой.

Если положимъ въ уравненіи (2) $x = \pm c$ и $y = 0$, то оно обратится съ

$$\pm cx = a^2$$

или

$$cx \mp a^2 = 0.$$

Это показываетъ, что *каждая изъ двухъ директрисъ эллипса есть поляра соотвѣтствующаго ей фокуса.*

255. Можно получить уравненіе касательной къ эллипсу еще слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$y = mx + n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

будетъ уравненіе какой-нибудь прямой. Исключая y изъ этого уравненія и уравненія эллипса (1), получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

или

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

откуда опредѣляются абсциссы точекъ пересѣченія.

Если прямая (3) касается эллипса, то корни послѣдняго уравненія должны быть равны между собою и, слѣдовательно, должно быть

$$a^4m^2n^2 = (b^2 + a^2m^2)(n^2 - b^2)$$

или, по сокращеніи,

$$n^2 - a^2m^2 - b^2 = 0,$$

откуда

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Слѣдовательно, уравненіе (3) обращается въ

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \dots\dots\dots\dots (4)$$

и, при данномъ угловомъ коэффиціентѣ m, представляетъ двѣ касательныя къ эллипсу, имѣющія данное направленіе.

Такъ какъ $\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ есть дѣйствительная величина при всякомъ дѣйствительномъ значеніи m, то заключаемъ, что *во всякомъ направленіи къ эллипсу могутъ быть проведены двѣ касательныя.*

256. Если касательныя, выражаемыя уравненіемъ (4), проходятъ черезъ данную точку (x_1, y_1), то должно быть

$$y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

откуда

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - b^2) = 0.$$

Относительно m это есть уравненіе второй степени, корни котораго суть угловые коэффиціенты двухъ проходящихъ черезъ данную точку касательныхъ. Эти двѣ касательныя будутъ перпендикулярны между собою, когда произведеніе ихъ угловыхъ коэффиціентовъ равно отрицательной единицѣ, т. е. когда

$$\frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$$

или

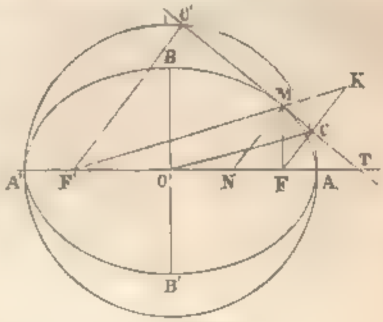
$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2.$$

Это показываетъ, что точки пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ находятся на окружности круга, выражаемаго уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2;$$

иначе говоря, геометрическое мѣсто вершины прямого угла, стороны котораго касаются эллипса, есть окружность, описанная около прямоугольника, построеннаго на осяхъ эллипса.

257. Прямая, проходящая черезъ какую-нибудь точку M эллипса и перпендикулярная къ касательной въ этой точкѣ (фиг. 55), есть *нормаль* къ эллипсу (см. стр. 123).



Фиг. 55.

Такъ какъ уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1), есть

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

и условіе перпендикулярности этой прямой съ касательной (2) есть

$$A\frac{x_1}{a^2}+B\frac{y_1}{b^2}=0,$$

то заключаемъ, что уравненіе нормали въ точкѣ (x_1, y_1) есть

$$\frac{(x-x_1)y_1}{b^2}-\frac{(y-y_1)x_1}{a^2}=0$$

или

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Пусть N и T будутъ точки, въ которыхъ нормаль и касательная въ точкѣ M пересѣкаются съ большой осью эллипса. Полагая въ уравненіи нормали (5) $y=0$, получимъ

$$ON=\frac{c^2x_1}{a^2}$$

и точно также, полагая $y=0$ въ уравненіи касательной (2), будемъ имѣть

$$OT=\frac{a^2}{x_1}.$$

Слѣдовательно,

$$ON \cdot OT = c^2.$$

258. Отрѣзокъ MN нормали, заключающійся между точкою эллипса и точкою пересѣченія съ осью абсциссъ, называютъ *длиною нормали*. Отрѣзокъ же этой оси, заключающійся между перпендикуляромъ на ось изъ точки M и нормалью въ этой точкѣ, называется *поднормалью* или *субнормалью*.

Обозначая субнормаль чрезъ S_n, будемъ имѣть

$$S_n = x_1 - \frac{c^2x_1}{a^2} = \frac{(a^2-c^2)x_1}{a^2} = \frac{b^2x_1}{a^2},$$

откуда

$$\frac{S_n}{ON} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2}.$$

Слѣдовательно, *абсцисса всякой точки эллипса дѣлится нормалью въ постоянномъ отношеніи.*

Длина нормали эллипса опредѣляется по общей формулѣ для разстоянія между двумя точками слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{MN}^2 = \left(x_1 - \frac{a^2 x_1}{a^2}\right)^2 + y_1^2 = \frac{b^4 x_1^2}{a^4} + y_1^2,$$

откуда

$$MN = b^2 \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}.$$

Но если назовемъ чрезъ l длину перпендикуляра изъ центра эллипса на касательную, то изъ уравненія касательной (2) будемъ имѣть

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Слѣдовательно,

$$MN = \frac{b^2}{l}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *произведеніе нормали въ какой-нибудь точкѣ эллипса на перпендикуляръ изъ центра на касательную въ этой точкѣ есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.*

Отрѣзокъ MT касательной, заключающійся между точкою прикосновенія и точкою пересѣченія съ осью абсциссъ, называютъ обыкновенно *длиной касательной.* Отрѣзокъ же этой оси, заключающійся между касательною и перпендикуляромъ изъ точки прикосновенія, называется *подкасательной* или *субтангенсомъ.*

Обозначая подкасательную черезъ S_t, будемъ имѣть, что, по абсолютной величинѣ,

$$S_t = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}.$$

Что же касается длины касательной, то для нея получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\overline{MT}^2 = \left(\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}\right)^2 + y_1^2 = \frac{(a^2 - x_1^2)^2 + x_1^2 y_1^2}{x_1^2} =$$

$$= \frac{y_1^2 (a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)}{b^4 x_1^2} = \frac{y_1^4}{b^4}\left(\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}\right).$$

а такъ какъ, обозначая чрезъ k длину перпендикуляра изъ центра эллипса на нормаль, будемъ имѣть изъ уравненія нормали (5)

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}}},$$

то

$$MT = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 k}.$$

259. Пусть FC и $F'C'$ (фиг. 55) будутъ перпендикуляры, опущенные изъ двухъ фокусовъ эллипса на какую-нибудь касательную. Изъ уравненія касательной (2) будемъ имѣть, что длины этихъ перпендикуляровъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$FC = \frac{\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} \quad \text{и} \quad F'C' = \frac{\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}},$$

гдѣ x_1 и y_1 суть координаты точки прикосновенія.

Слѣдовательно,

$$\frac{FC}{F'C'} = \frac{1 - \frac{cx_1}{a^2}}{1 + \frac{cx_1}{a^2}} = \frac{a - \frac{cx_1}{a}}{a + \frac{cx_1}{a}}.$$

Члены послѣдняго отношенія, какъ мы видѣли выше (см. стр. 178 и 179), суть радіусы векторы точки прикосновенія M, т. е. разстоянія MF и MF', и потому имѣемъ

$$\frac{FC}{F'C'} = \frac{MF}{MF'}.$$

Это доказываетъ, что прямоугольные треугольники MCF и $MC'F'$ подобны и, слѣдовательно, углы CMF и $C'MF'$ равны.

Итакъ, *касательная къ эллипсу составляетъ равные углы съ радіусами векторами точки прикосновенія.*

То же самое свойство принадлежитъ, слѣдовательно, и нормали въ точкѣ M, въ чемъ можно убѣдиться и непосредственно, усматривая изъ найденнаго выше выраженія отрѣзка ON, что нормаль MN дѣлитъ сторону FF' треугольника FMF' на части, пропорціональныя двумъ его другимъ сторонамъ. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что нормаль есть бисектръ внутренняго угла этого треугольника, а касательная внѣшняго.

260. Перемножая предыдущія выраженія перпендикуляровъ FC и $F'C'$, получимъ

$$FC.F'C' = \frac{1 - \dfrac{c^2 x_1^2}{a^4}}{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}},$$

и такъ какъ точка M лежитъ на эллипсѣ, то

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2}$$

и

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 - x_1^2}{b^2}\right) = \frac{a^4 - c^2 x_1^2}{a^4 b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{c^2 x_1^2}{a^4}\right).$$

Слѣдовательно,

$$FC.F'C' = b^2.$$

Произведеніе перпендикуляровъ изъ двухъ фокусовъ эллипса на какую бы ни было касательную есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

261. Пусть K будетъ точка, симметричная съ фокусомъ F относительно касательной (фиг. 55), т. е. лежащая на перпендикулярѣ FC такъ, что $KC = FC$. Соединивъ эту точку съ точкою прикосновенія M, будемъ имѣть, что углы KMC, FMC и $F'MC'$ равны между собою и, притомъ, $MK = MF$. Слѣдовательно, прямая MK есть продолженіе радіуса вектора $F'M$ и разстояніе $F'K$ равняется суммѣ радіусовъ векторовъ $F'M$ и FM, т. е. большой оси $2a$.

Такъ какъ въ треугольникѣ KFF' точки C и O суть средины двухъ сторонъ, то прямая, соединяющая эти точки, параллельна третьей сторонѣ $F'K$ и равняется ея половинѣ, т. е. половинѣ большой оси.

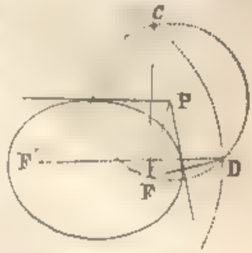
Точно также легко убѣдиться, построивши точку симметричную съ фокусомъ F' относительно касательной, что и разстояніе точки C' отъ центра эллипса равняется половинѣ его большой оси.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что *геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ изъ фокусовъ на касательныя есть окружность, построенная на большой оси, какъ на діаметрѣ.*

262. Изъ того, что точки, симметричныя съ фокусомъ эллипса относительно касательныхъ, находятся на разстояніи, равномъ большой оси,

отъ другого фокуса, легко обнаруживается одинъ изъ способовъ построенія касательныхъ къ эллипсу.

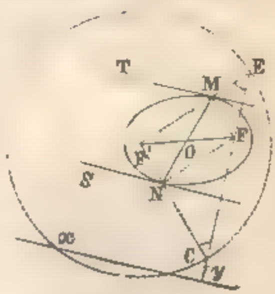
Положимъ что требуется построить касательныя къ эллипсу, проходящія черезъ данную точку P (фиг. 56). Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны находиться на такомъ же разстояніи отъ данной точки, какъ и этотъ фокусъ. Съ другой стороны эти точки должны находиться на разстояніи, равномъ большой оси, отъ фокуса F'. Слѣдовательно, описавши изъ точки P, какъ центра, окружность радіусомъ PF, а изъ фокуса F', какъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ большой оси, и соединивши точки пересѣченія C и D этихъ окружностей прямыми линіями съ фокусомъ F, будемъ имѣть, что перпендикуляры изъ данной точки на эти прямыя суть искомыя касательныя.



Фиг. 56.

Прямыя CF' и DF', соединяющія точки пересѣченія окружностей съ другимъ фокусомъ, опредѣлятъ, очевидно, на этихъ касательныхъ точки прикосновенія.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ эллипсу, параллельныя данной прямой XY (фиг. 57). Описавши изъ фокуса F', какъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ большой оси и проведя черезъ другой фокусъ F хорду CE этой окружности, перпендикулярную къ данной прямой, будемъ имѣть, на основаніи предыдущаго, что концы C и E этой хорды суть точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ. Сами же касательныя будутъ, слѣдовательно, перпендикуляры къ этой хордѣ, возставленные изъ срединъ отрѣзковъ EF и FC.



Фиг. 57.

Точки M и N пересѣченія ихъ съ радіусами $F'E$ и $F'C$ построенной окружности суть, очевидно, точки прикосновенія. Онѣ могутъ быть найдены также, какъ точки пересѣченія этихъ радіусовъ съ прямыми, имъ параллельными и проходящими черезъ фокусъ F.

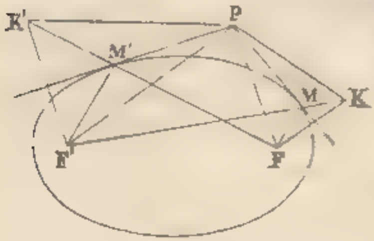
263. Изъ предыдущаго легко обнаруживаются также слѣдующія свойства касательныхъ къ эллипсу.

Двѣ касательныя къ эллипсу составляютъ равные углы съ прямыми, соединяющими точку ихъ пересѣченія съ фокусами.

Пусть PM и PM' будутъ двѣ касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ P (фиг. 58). Взявши точки K и K', изъ которыхъ первая симметрична съ фокусомъ F относительно одной изъ нихъ, а вторая симметрична съ фокусомъ F' относительно другой, будемъ имѣть

$$PK = PF \qquad \text{и} \qquad PK' = PF',$$

и такъ какъ, кромѣ того, разстоянія FK' и $F'K$ равны между собой, какъ равныя большой оси эллипса, то изъ равенства треугольниковъ



Фиг. 58.

FPK' и KPF' заключаемъ о равенствѣ угловъ FPK' и KPF'. Отнимая же отъ этихъ угловъ ихъ общую часть FPF', получимъ

$$\angle F'PK' = \angle FPK$$

или, по раздѣленіи на 2,

$$\angle F'PM' = \angle FPM,$$

что и требовалось доказать.

Въ справедливости послѣдняго предположенія можно убѣдиться также изъ пропорціональности разстояній фокусовъ отъ двухъ касательныхъ, пропорціональности, которая есть прямое слѣдствіе одного изъ доказанныхъ выше свойствъ эллипса.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая чрезъ u и u' разстоянія фокусовъ F и F' отъ касательной PM, а чрезъ v и v' отъ касательной PM', будемъ имѣть (см. стр. 188)

$$uu' = vv' = b^2,$$

откуда

$$\frac{u}{v} = \frac{v'}{u'}.$$

264. Изъ равенства треугольниковъ FPK' и KPF' (фиг. 58) слѣдуетъ также равенство угловъ PFM' и PKM, но, вслѣдствіе симметричности точекъ K и F относительно касательной PM, имѣемъ

$$\angle PKM = \angle PFM.$$

Слѣдовательно,

$$\angle PFM = \angle PFM'.$$

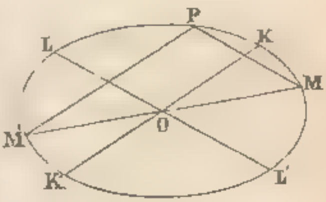
Это показываетъ, что прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ касательныхъ къ эллипсу съ его фокусомъ, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый двумя радіусами векторами, проведенными изъ этого фокуса къ точкамъ прикосновенія.

Отсюда заключаемъ, что уголъ, подъ которымъ виденъ изъ фокуса отрѣзокъ *какой-нибудь* касательной къ эллипсу, заключающійся между двумя данными касательными, имѣетъ постоянную величину, ибо онъ равняется половинѣ угла, подъ которымъ видна изъ этого фокуса хорда, соединяющая точки прикосновенія данныхъ касательныхъ.

Если точка P пересѣченія касательныхъ находится на директрисѣ, то, припоминая, что послѣдняя есть поляра фокуса, заключаемъ, что хорда, соединяющая точки прикосновенія касательныхъ, какъ поляра точки P, проходитъ черезъ фокусъ. Это значитъ, что уголъ, образуемый радіусами векторами, проведенными изъ этого фокуса къ точкамъ прикосновенія, равняется двумъ прямымъ. Отсюда слѣдуетъ, что отрѣзокъ всякой касательной, заключающійся между точкой прикосновенія и директрисой, виденъ изъ соотвѣтствующаго этой директрисѣ фокуса подъ прямымъ угломъ.

§ 4. Сопряженные діаметры.

265. Двѣ хорды эллипса, соединяющія какую-нибудь его точку P съ концами какого-либо діаметра MM' (фиг. 59), называются *дополнительными*. Если возьмемъ два діаметра KK' и LL', параллельные такимъ хордамъ, то каждый изъ нихъ, будучи прямою, проходящею черезъ середину стороны MM' треугольника MPM' параллельно другой его сторонѣ, раздѣлитъ третью сторону пополамъ. Это доказываетъ, что діаметры KK' и LL' суть сопряженные (см. стр. 117).



Фиг. 59

Итакъ, діаметры, параллельные двумъ какимъ-нибудь дополнительнымъ хордамъ, суть сопряженные.

Обратно, если даны два сопряженные діаметра KK' и LL', то параллельныя имъ хорды, проходящія черезъ какую-нибудь точку P эллипса, будутъ дополнительными. Это слѣдуетъ изъ того, что оба данные діаметра должны дѣлить хорду MM' пополамъ, а потому послѣдняя, какъ проходящая чрезъ ихъ точку пересѣченія, есть діаметръ.

266. Если эллипсъ отнесенъ къ его осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то, какъ мы видѣли (см. стр. 175 и 176), двѣ хорды, пересѣкающіяся въ какой-нибудь его точкѣ и проходящія чрезъ концы большой оси, выражаются уравненіями

$$ay=kb(a-x) \qquad \text{и} \qquad kay=b(a+x).$$

Полагая, что уравненія діаметровъ, имъ параллельныхъ и, слѣдовательно, сопряженныхъ, суть

$$y=mx \qquad \text{и} \qquad y=m'x,$$

будемъ имѣть

$$m = -\frac{kb}{a} \quad \text{и} \quad m' = +\frac{b}{ka},$$

откуда, при всякомъ значенiи k,

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

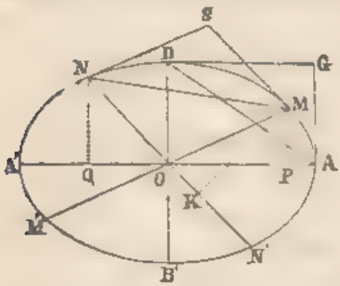
соотношенiе между угловыми коэффицiентами двухъ какихъ бы ни было сопряженныхъ дiаметровъ.

Это соотношенiе можно было бы также получить, какъ частный видъ такого же соотношенiя, выведеннаго выше (см. стр. 117) для кривыхъ второго порядка, выраженныхъ общимъ уравненiемъ второй степени.

Обозначая чрезъ α и β углы, которые два сопряженные дiаметра составляютъ съ большою осью эллипса, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$tg\alpha tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

и такъ какъ вторая часть этого равенства есть величина отрицательная, то изъ двухъ угловъ α и β одинъ острый, а другой тупой. Это показываетъ, что всякiе два сопряженные дiаметра эллипса помѣщаются въ различныхъ углахъ, образуемыхъ его осями.



Фиг 60.

267. Пусть MM' NN' будутъ два какiе-нибудь сопряженные дiаметра (фиг. 60). Обозначая чрезъ x_1 и y_1 координаты точки M, а чрезъ x_2 и y_2 координаты точки N, будемъ имѣть, что уравненiя этихъ дiаметровъ суть

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \quad \text{и} \quad y = \frac{y_2}{x_2}x.$$

Равенство (2) приметъ въ такомъ случаѣ видъ

$$\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

или

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Отсюда находимъ

$$\frac{x_1^2}{a^2} : \frac{y_2^2}{b^2} = \frac{y_1^2}{b^2} : \frac{x_2^2}{a^2} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) : \left(\frac{y_2^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2}\right)$$

и такъ какъ точки M и N находятся на эллипсѣ, то члены послѣдняго отношенiя равны единицѣ.

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a}=\pm\frac{y_2}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x_2}{a}=\mp\frac{y_1}{b}, \ldots \ldots \ldots (5)$$

причемъ, какъ видно изъ (4), верхнему знаку одного равенства соотвѣтствуетъ верхній же знакъ другого и нижнему нижній.

Равенство (4) есть не что иное, какъ условіе параллельности одного изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ MM' и NN' съ касательными въ концахъ другого. Соотношенія (2) или (3) можно было бы, слѣдовательно, получить, какъ слѣдствіе этого свойства, доказаннаго нами выше для кривыхъ второго порядка вообще (см. стр. 122).

268. Если обозначимъ черезъ $2a'$ и $2b'$ длины діаметровъ MM' и NN', то будемъ имѣть, въ силу послѣднихъ равенствъ,

$$a'^2=x_1^2+y_1^2=x_1^2+\frac{b^2x_2^2}{a^2}=\frac{a^2x_1^2+b^2x_2^2}{a^2}$$

и

$$b'^2=x_2^2+y_2^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}+y_2^2=\frac{a^2y_1^2+b^2y_2^2}{b^2},$$

откуда, по сложеніи, получимъ

$$a'^2+b'^2=a^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+b^2\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right),$$

т. е.

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Это показываетъ, что *сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ его осей.* Предложеніе, извѣстное подъ названіемъ первой теоремы Аполлонія.

Называя буквою Δ площадь треугольника MON, будемъ имѣть, по общей формулѣ для опредѣленія площади треугольника по координатамъ его вершинъ (см. стр. 52),

$$2\Delta=x_1y_2-y_1x_2,$$

или, въ силу равенствъ (5),

$$2\Delta=\frac{bx_1^2}{a}+\frac{ay_1^2}{b}=ab\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

или

$$2\Delta=ab \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Первая часть этого равенства означаетъ площадь параллелограмма $MONS$, а вторая площадь прямоугольника $AOBG$. Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построеннаго на его осяхъ.* Это есть вторая теорема Аполлонія.

Если φ есть уголъ между діаметрами MM' и NN', т. е. $\varphi = \beta - \alpha$, то площадь треугольника MON можетъ быть выражена произведеніемъ $\frac{1}{2}a'b'\sin\varphi$, вслѣдствіе чего равенство (7) можетъ быть представлено въ видѣ

$$a'b'\sin\varphi = ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

и выражаетъ, слѣдовательно, зависимость между величинами сопряженныхъ діаметровъ и угломъ, ими образуемымъ.

269. Свойства діаметровъ, выражаемыя двумя теоремами Аполлонія, суть не что иное, какъ прямое геометрическое истолкованіе доказанной нами выше неизмѣняемости отъ преобразованія координатъ для всякой центральной кривой слѣдующихъ двухъ выраженій (см. стр. 144):

$$\frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega} \quad \text{и} \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega},$$

гдѣ A, B и C суть коэффиціенты при x^2, xy и y^2 въ уравненіи этой кривой, а ω уголъ между осями координатъ.

Если кривая есть эллипсъ, отнесенный къ его сопряженнымъ діаметрамъ, уголъ между которыми есть φ, то уравненіе ея есть

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

и названныя выраженія обращаются въ

$$\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{-4}{a'^2b'^2\sin^2\varphi}.$$

Если же за оси координатъ приняты оси эллипса, то уравненіе его есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причемъ $\omega = \frac{\pi}{2}$, и потому тѣ же выраженія обращаются въ

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{и} \quad \frac{-4}{a^2b^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

и

$$\frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2b^2}.$$

Второе изъ этихъ равенствъ равнозначуще съ (8) или (7); первое же при существованіи второго обращается въ (6).

270. Такъ какъ всѣ точки эллипса находятся внутри круга, описаннаго на его большой оси, какъ на діаметрѣ, то внутренній уголъ между двумя дополнительными хордами, опирающимися на большую ось, больше прямого. Это показываетъ, что и уголъ MON между сопряженными полудіаметрами, лежащими по одну сторону отъ большой оси, также тупой.

Изъ равенства (8) мы имѣемъ для этого угла

$$\sin^2\varphi=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2-a^2b^2}.$$

Но такъ какъ, вслѣдствіе равенства (6),

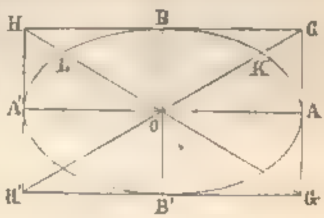
$$4(a'^2b'^2-a^2b^2)=(a^2-b^2)^2-(a'^2-b'^2)^2,$$

то
$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2-(a'^2-b'^2)^2}.$$

Отсюда видно, что тупой уголъ MON между двумя сопряженными діаметрами получаетъ наибольшую величину, когда $a'=b'$, т. е. когда эти діаметры равны между собою и, слѣдовательно, равно наклонены къ осямъ эллипса. Въ такомъ случаѣ

$$\operatorname{tg}(MON)=-\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

271. Легко видѣть, что два равные сопряженные діаметра совпадаютъ съ діагоналями GH' и HG', построеннаго на осяхъ эллипса прямоугольника (фиг. 61). Дѣйствительно, полагая, что уравненія этихъ діагоналей суть



Фиг 61

$$y=mx \qquad \text{и} \qquad y=m'x,$$

будемъ имѣть

$$m=+\frac{b}{a} \qquad \text{и} \qquad m'=-\frac{b}{a}$$

и, слѣдовательно,

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2},$$

что и доказываетъ, что діаметры OK и OL суть сопряженные.

Это видно также изъ того, что діагонали GH' и HG' параллельны дополнительнымъ хордамъ, соединяющимъ вершину B съ вершинами A и A'.

Если назовемъ уголъ GOH черезъ φ, то будемъ имѣть изъ прямоугольнаго треугольника OBG

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{b}.$$

Слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\frac{a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{b^2-a^2},$$

а это и есть предыдущее выраженіе тангенса наибольшаго угла между сопряженными діаметрами.

272. Пусть l будетъ длина перпендикуляра MK, опущеннаго изъ конца одного изъ сопряженныхъ діаметровъ на другой (фиг. 60). Въ такомъ случаѣ равенство (7) можетъ быть представлено въ видѣ

$$lb' = ab,$$

откуда

$$l = \frac{ab}{b'} = \frac{ab}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

или, вслѣдствіе соотношеній (5),

$$l = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2y_1^2}{b^2}+\frac{b^2x_1^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Такъ же точно выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 186), разстояніе касательной къ эллипсу въ точкѣ M отъ его центра.

273. Если эллипсъ, отнесенный къ двумъ какимъ-нибудь сопряженнымъ діаметрамъ, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2} = 1$$

и x_1, y_1 суть координаты какой-нибудь его точки, то діаметръ, проходящій чрезъ эту точку, и ему сопряженный выразятся уравненіями

$$xy_1 - yx_1 = 0$$

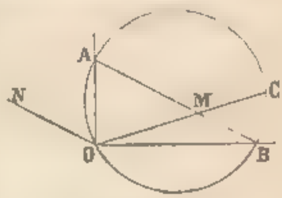
и
$$\frac{xx_1}{a'^2}+\frac{yy_1}{b'^2}=0.$$

Полагая $x=a'$, получимъ изъ этихъ уравненій
$$y=\frac{a'y_1}{x_1} \quad \text{и} \quad y=-\frac{b'^2x_1}{a'y_1}.$$

Такъ какъ уравненіе $x=a'$ выражаетъ касательную къ эллипсу въ концѣ діаметра, принятаго за ось абсциссъ, то послѣднія выраженія означаютъ, очевидно, отрѣзки этой касательной, заключающіеся между точкою прикосновенія и разсматриваемыми сопряженными діаметрами. Замѣчая, что произведеніе этихъ выраженій при всякихъ значеніяхъ x_1 и y_1 есть $-b'^2$, приходимъ къ заключенію, что *произведеніе отрѣзковъ касательной къ эллипсу, заключающихся между точкою прикосновенія и двумя какими бы ни было сопряженными діаметрами, есть величина постоянная, равная квадрату полудіаметра, параллельнаго этой касательной.*

274. Пользуясь этимъ свойствомъ, не трудно построить оси эллипса, когда даны два его сопряженные діаметра.

Пусть OM и ON будутъ половины такихъ діаметровъ, данныхъ по величинѣ и направленію (фиг. 62). Возьмемъ на продолженіи одного изъ нихъ OM точку C такъ, чтобы было
$$OM\cdot MC=\overline{ON}^2,$$
и построимъ окружность, проходящую чрезъ точки O и C и имѣющую центръ на прямой, проведенной чрезъ M параллельно ON. Эта прямая есть, очевидно, касательная къ эллипсу, и отрѣзки ея внутри построенной окружности будутъ таковы, что



Фиг. 62.

$$MA\cdot MB=-\overline{ON}^2.$$

Слѣдовательно, прямыя OA и OB будутъ два перпендикулярные между собою сопряженные діаметра, т. е. оси эллипса.

Что касается величинъ осей, то онѣ опредѣляются по величинамъ данныхъ сопряженныхъ діаметровъ на основаніи теоремъ Аполлонія, т. е. соотношеній
$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$
и
$$ab=a'b'\sin\varphi,$$
изъ которыхъ
$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\varphi$$
и
$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\varphi.$$

Слѣдовательно,

$$2a = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\varphi} + \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\varphi}$$

и

$$2b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\varphi} - \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\varphi}\ .$$

Величины эти помощью циркуля и линейки также легко могутъ быть построены.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ГИПЕРБОЛА.

§ 1. Форма и построеніе гиперболы.

275. Въ предыдущей главѣ мы исходили изъ предположенія, что въ уравненіи

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

выражающемъ центральную кривую второго порядка, отнесенную къ двумъ ея сопряженнымъ діаметрамъ, коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки. Будемъ теперь предполагать, что эти коэффиціенты имѣютъ различные знаки.

Относительно постояннаго члена F можно при этомъ сдѣлать каждое изъ трехъ слѣдующихъ предположеній: 1) онъ имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ коэффиціента C, 2) онъ имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ коэффиціента A, 3) онъ равенъ нулю. И мы уже знаемъ (см. стр. 139), что въ первыхъ двухъ случаяхъ уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, а въ послѣднемъ совокупность двухъ дѣйствительныхъ прямыхъ.

Имѣя въ виду изученіе свойствъ гиперболы, мы займемся въ настоящей главѣ преимущественно первыми двумя случаями.

276. Представляя уравненіе (1) въ видѣ

$$-\frac{A}{F}x^2 - \frac{C}{F}y^2 = 1 \,,$$

мы можемъ положить

$$-\frac{F}{A} = \pm a^2 \qquad \text{и} \qquad -\frac{F}{C} = \mp b^2 \,,$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя и конечныя величины и притомъ верхніе знаки во вторыхъ частяхъ относятся къ тому случаю, когда C и F имѣютъ одинаковые знаки, а нижніе къ случаю, когда A и F имѣютъ одинаковые знаки.

Уравненіе (1) принимаетъ, такимъ образомъ, въ этихъ двухъ случаяхъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{и} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

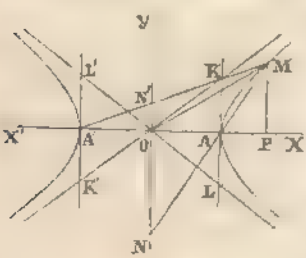
Двѣ гиперболы, выражаемыя этими уравненіями при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ постоянныхъ a и b, называются *сопряженными* между собою.

Такъ какъ каждое изъ этихъ двухъ уравненій обращается въ другое при измѣненіи наименованія осей абсциссъ и ординатъ и соотвѣтственномъ тому измѣненіи обозначенія постоянныхъ a и b, то заключаемъ, что всякая гипербола, разсматриваемая въ отдѣльности, можетъ быть, при соотвѣтственномъ наименованіи осей, выражаема уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Полагая въ этомъ уравненіи $x=0$, получимъ $y=\pm b\sqrt{-1}$, откуда заключаемъ, что діаметръ, принятый за ось ординатъ, не пересѣкаетъ гиперболы; такой діаметръ называютъ *мнимымъ* [1]).

Если же положимъ $y=0$, то будемъ имѣть $x=\pm a$, откуда видимъ, что ось абсциссъ пересѣкаетъ гиперболу въ двухъ точкахъ, отстоящихъ отъ ея центра на разстояніи a. Діаметръ, принятый за эту ось, есть, слѣдовательно, *дѣйствительный* и $2a$ есть его длина.



Фиг. 63

277. Въ слѣдующемъ мы будемъ полагать, что уравненіе (2) выражаетъ гиперболу относительно прямоугольной системы координатъ (фиг. 63). Ось абсциссъ будетъ въ этомъ случаѣ *дѣйствительною* или *поперечною* осью гиперболы, а ось ординатъ ея *мнимою* осью. Концы A и A' дѣйствительной оси суть двѣ вершины гиперболы. Длина дѣйствительной оси AA' равняется $2a$.

Рѣшая уравненіе (2) относительно y, получимъ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

и такъ какъ отсюда видно, что дѣйствительныя значенія y соотвѣтствуютъ такимъ значеніямъ x, абсолютная величина которыхъ болѣе a, то заключаемъ, что двѣ вѣтви гиперболы (см. стр. 134) расположены по разныя стороны отъ прямыхъ KL и $K'L'$, проходящихъ черезъ

[1]) Мнимый діаметръ не есть мнимая прямая (см. стр. 69); не существуетъ только его точекъ пересѣченія съ гиперболой.

вершины A и A' и параллельныхъ мнимой оси, и что между этими прямыми не существуетъ точекъ гиперболы.

Если на прямой, проходящей чрезъ одну изъ вершинъ параллельно мнимой оси, отложимъ отрѣзки AK и AL, равные b, и соединимъ точки K и L съ началомъ координатъ, т. е. центромъ гиперболы, то будемъ имѣть двѣ прямыя KK' и LL', уравненія которыхъ, какъ видно изъ самаго построенія, суть

$$y=+\frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad y=-\frac{b}{a}x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Легко видѣть, что двѣ вѣтви гиперболы помѣщаются въ двухъ противоположныхъ углахъ KOL и $K'OL'$, образуемыхъ этими прямыми; въ углахъ же, смежныхъ съ этими, не существуетъ точекъ кривой. Это слѣдуетъ изъ того, что абсолютныя величины ординатъ, опредѣляемыхъ уравненіями (4), при всякомъ x, болѣе абсолютной величины ординаты гиперболы (3) при этомъ же значеніи x.

Уравненія прямыхъ (4) могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

и, слѣдовательно, уравненіе, выражающее ихъ совокупность, будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ самой гиперболы, мы видимъ, что оно представляетъ равенство нулю суммы членовъ второго измѣренія и потому выражаетъ *ассимптоты* этой кривой (см. стр. 109 и 114). Прямыя KK' и LL' суть, слѣдовательно, ассимптоты разсматриваемой гиперболы.

278. Ассимптотою къ какой-либо кривой линіи, имѣющей безконечныя вѣтви, называютъ вообще такую прямую, что разстояніе отъ нея точекъ кривой безпредѣльно уменьшается по мѣрѣ удаленія этихъ точекъ въ безконечность. Не трудно показать, что это свойство принадлежитъ и прямымъ KK' и LL'.

Дѣйствительно, разстояніе какой-нибудь точки M гиперболы отъ прямой KK' равняется, очевидно, по абсолютной величинѣ разности ординатъ (4) и (3), т. е.

$$\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}),$$

умноженной на косинусъ угла, составляемаго этою прямою съ осью AA'.

Слѣдовательно, обозначая это разстояніе черезъ d и полагая, что $\angle KOA = \lambda$, будемъ имѣть

$$d = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\cos\lambda,$$

и такъ какъ

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

то

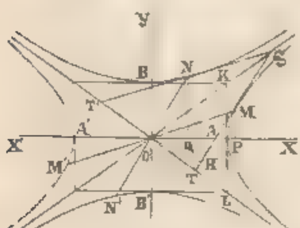
$$d = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right)$$

или

$$d = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)}.$$

Отсюда и видно, что, при удаленіи точки M по гиперболѣ въ безконечность, когда, слѣдовательно, абсцисса x этой точки безпредѣльно возрастаетъ, разстояніе d безпредѣльно уменьшается и, при $x = \infty$, обращается въ нуль.

279. Если обозначимъ черезъ r разстояніе какой-нибудь точки M гиперболы отъ центра, т. е. половину діаметра OM (фиг. 64), а черезъ φ уголъ, образуемый этою прямою съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ, то будемъ имѣть



Фиг. 64.

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi,$$

и уравненіе гиперболы (2) обратится въ

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$$

или

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - (a^2+b^2)\sin^2\varphi},$$

откуда

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - (a^2+b^2)\sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Это есть уравненіе гиперболы въ полярныхъ координатахъ.

Для всѣхъ точекъ гиперболы, находящихся внутри нормальнаго угла XOY, уголъ φ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и послѣднее равенство показываетъ, что, съ возрастаніемъ этого угла, разстояніе $r = OM$ также

возрастаетъ. Дѣйствительная ось гиперболы есть, слѣдовательно, наименьшій изъ ея діаметровъ.

Если

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \varphi = \lambda ,$$

то $r = \infty$. Это показываетъ, что діаметры гиперболы безпредѣльно возрастаютъ по мѣрѣ уклоненія отъ дѣйствительной оси и дѣлаются безконечно большими при совпаденіи съ ассимптогами.

280. Если $\varphi > \lambda$ и, слѣдовательно,

$$\sin\varphi > \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} ,$$

то величина r будетъ мнимою. Полагая при этомъ $r = \varrho\sqrt{-1}$, мы будемъ имѣть изъ уравненія (6)

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)\sin^2\varphi - b^2}} .$$

Эта величина будетъ въ настоящемъ случаѣ дѣйствительная и, слѣдовательно, координаты ϱ и φ, удовлетворяющія послѣднему соотношенію, будутъ опредѣлять дѣйствительную точку N, а само это соотношеніе будетъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ нѣкоторой дѣйствительной кривой линіи.

Представляя это уравненіе въ видѣ

$$\varrho^2(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi) = a^2b^2$$

или

$$\varrho^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right) = 1$$

и полагая

$$\varrho\cos\varphi = x \quad \text{и} \quad \varrho\sin\varphi = y ,$$

получимъ уравненіе той же линіи въ прежнихъ прямолинейныхъ координатахъ

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 .$$

Это есть уравненіе гиперболы, сопряженной съ разсматриваемою.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что мнимые діаметры каждой изъ двухъ сопряженныхъ гиперболъ суть дѣйствительные другой, и обратно. Ассимптоты же обѣихъ сопряженныхъ гиперболъ однѣ и тѣ же.

Подъ именемъ длины мнимаго діаметра данной гиперболы (2) разумѣютъ обыкновенно длину NN' этого діаметра, какъ дѣйствительнаго для гиперболы, сопряженной съ данною. Въ частности длина мнимой оси есть разстояніе $2b$ между вершинами B и B' этой сопряженной гиперболы.

281. Представивъ уравненіе гиперболы (2) въ видѣ

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$a^2y^2 = b^2(x^2 - a^2)$$

и замѣчая, что въ такомъ случаѣ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ перемноженія уравненій первой степени

$$ay = kb(x - a) \qquad \text{и} \qquad kay = b(x + a), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

заключаемъ, подобно тому, какъ это было сдѣлано для эллипса (см. стр. 175), что гиперболу можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ послѣдними двумя уравненіями при одномъ и томъ же значеніи постояннаго k.

При неопредѣленномъ значеніи k, эти уравненія выражаютъ пучки прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины A и A' гиперболы. Давая же k частное значеніе, получимъ двѣ опредѣленныя прямыя AM и $A'M$ (фиг. 63), пересѣкающіяся на гиперболѣ и встрѣчающія ея мнимую ось въ такихъ двухъ точкахъ N и N', что, какъ видно изъ уравненій (7),

$$ON = -kb \qquad \text{и} \qquad k.ON' = b$$

и, слѣдовательно,

$$ON.ON' = -b^2.$$

Это показываетъ, что всякія двѣ прямыя, проходящія черезъ вершины гиперболы и встрѣчающіяся въ какой-нибудь ея точкѣ, пересѣкаютъ мнимую ось въ двухъ точкахъ, лежащихъ по разныя стороны отъ центра и на такихъ отъ него разстояніяхъ, средняя геометрическая которыхъ равняется половинѣ мнимой оси.

На этомъ можетъ быть основано, такъ же какъ и для эллипса, построеніе точекъ гиперболы въ какомъ угодно числѣ и сколь угодно близкихъ между собою.

282. Если въ уравненіи (2) $a = b$, то оно можетъ быть представлено въ видѣ

$$x^2 - y^2 = a^2$$

и въ этомъ случаѣ выражаемая имъ гипербола называется *равносторонною*. Очевидно, что уголъ каждой ассимптоты съ дѣйствительною

..ью равняется въ этомъ случаѣ половинѣ прямого и, слѣдовательно, ассимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собою.

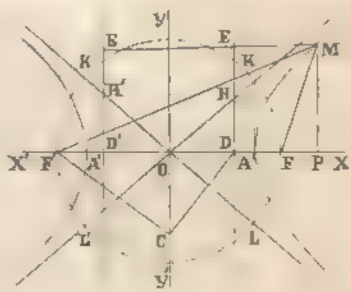
Понятно также, что двѣ сопряженныя гиперболы тождественны, когда онѣ равностороннія.

§ 2. Фокусы и директрисы.

283. Двѣ точки F и F', лежащія на дѣйствительной оси гиперболы (фиг. 65) и на разстояніи отъ ея центра, равномъ

$$\sqrt{a^2+b^2},$$

гдѣ a и b суть длины полуосей (дѣйствительной и мнимой), называются *фокусами* этой кривой. Слѣдовательно, возставляя изъ вершины A перпендикуляръ къ дѣйствительной оси и описывая изъ центра гиперболы окружность, проходящую черезъ точку K встрѣчи этого перпендикуляра съ ассимптотою, получимъ фокусы, какъ точки пересѣченія этой окружности съ дѣйствительной осью.



Фиг. 65.

Полагая, что гипербола отнесена къ ея осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будемъ имѣть, что координаты фокуса F суть

$$x=+\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{и} \qquad y=0,$$

а фокуса F'

$$x=-\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{и} \qquad y=0.$$

Обозначая чрезъ α абсолютную величину радикала $\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. разстояніе OF, а чрезъ r и r' разстоянія какой-нибудь точки M гиперболы отъ фокусовъ F и F', будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$r^2=(x-\alpha)^2+y^2$$

и

$$r'^2=(x+\alpha)^2+y^2,$$

и такъ какъ для точки M

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

то

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - b^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + a^2 = \left(\frac{\alpha}{a}x - a\right)^2$$

и точно такъ же

$$r'^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - b^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}x^2 + 2\alpha x + a^2 = \left(\frac{\alpha}{a}x + a\right)^2.$$

Замѣчая, что для гиперболы $x > a$ и, притомъ, $\alpha > a$, убѣждаемся, что по абсолютнымъ размѣрамъ

$$r = \frac{\alpha}{a}x - a \qquad \text{и} \qquad r' = \frac{\alpha}{a}x + a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Отсюда находимъ

$$r' - r = 2a\,.$$

Разстоянія точекъ гиперболы отъ ея фокусовъ называютъ обыкновенно *радіусами векторами* этой точки. Послѣднее равенство показываетъ, такимъ образомъ, что для гиперболы *разность радіусовъ векторовъ каждой точки имѣетъ величину постоянную, равную дѣйствительной оси этой кривой.*

284. Свойство это вполнѣ характеризуетъ гиперболу и можетъ быть принято за ея опредѣленіе.

Дѣйствительно, положимъ, что требуется найти геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ F и F' имѣетъ данную постоянную величину. Обозначая эту величину черезъ $2a$, а разстояніе между данными точками F и F' черезъ 2α, и принимая прямую, соединяющую эти точки, за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ ея средины, за ось ординатъ, будемъ, очевидно, имѣть для искомаго геометрическаго мѣста уравненіе

$$\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} - \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = 2a.$$

По уничтоженіи радикаловъ, это уравненіе легко приводится къ виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 - a^2} = 1\,,$$

а это есть уравненіе гиперболы, которой дѣйствительная ось равняется $2a$, а мнимая

$$2b = 2\sqrt{\alpha^2 - a^2}\,.$$

На послѣднемъ свойствѣ можетъ быть основано построеніе гиперболы непрерывнымъ движеніемъ при помощи гибкихъ и нерастяжимыхъ нитей.

Двѣ нити, разность длинъ которыхъ равняется дѣйствительной оси гиперболы, укрѣпляютъ концами въ фокусахъ. Свободные же концы этихъ нитей соединяютъ вмѣстѣ и удерживаютъ рукою такъ, чтобы обѣ нити, будучи перекинуты черезъ чертящее остріе, оставались натянутыми. Въ такомъ случаѣ, при всякомъ положеніи этого острія на плоскости, разность разстояній его отъ фокусовъ будетъ имѣть одну и ту же величину, равную разности длинъ нитей, и, при непрерывномъ перемѣщеніи острія, оно начертитъ гиперболу.

285. Представивъ равенства (2) въ видѣ

$$r = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right) \quad \text{и} \quad r' = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

легко замѣтить, что выраженія въ скобкахъ представляютъ разстоянія точки $M\ (x, y)$ гиперболы отъ двухъ прямыхъ DE и $D'E'$, параллельныхъ оси OY и отстоящихъ отъ начала координатъ на разстоянія $\pm\frac{a^2}{c}$.

Эти двѣ прямыя называются *директрисами*. Уравненія ихъ, очевидно, будутъ

$$cx - a^2 = 0 \quad \text{и} \quad cx + a^2 = 0.$$

Изъ того, что эти уравненія такія же точно, какъ и для директрисъ эллипса, заключаемъ, что по даннымъ фокусамъ онѣ могутъ быть найдены такимъ же точно построеніемъ, какъ и директрисы эллипса. Именно, проведя изъ фокуса F' (фиг. 65) прямую $F'C$ такъ, чтобы отрѣзокъ OC на мнимой оси равнялся половинѣ дѣйствительной оси OA, и возставивъ въ C перпендикуляръ къ этой прямой, получимъ, при пересѣченіи этого перпендикуляра съ дѣйствительною осью, точку D, принадлежащую директрисѣ.

Кромѣ того, легко видѣть, что точки H и H' пересѣченія ассимптотъ съ окружностью, описанною на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ, принадлежатъ также директрисамъ и что эти точки суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на ассимптоты.

286. Обозначая черезъ d и d' разстоянія ME и ME' какой-нибудь точки $M\ (x, y)$ гиперболы отъ двухъ ея директрисъ, будемъ имѣть изъ равенствъ (3)

$$r = \frac{c}{a}d \quad \text{и} \quad r' = \frac{c}{a}d'$$

откуда

$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}.$$

Это показываетъ, что для гиперболы, такъ же какъ и для эллипса, каждому фокусу соотвѣтствуетъ своя директриса и *отношеніе разстоя-ній каждой точки гиперболы отъ фокуса и соотвѣтствующей ему ди-ректрисы имѣетъ постоянную величину.*

Это отношеніе, называемое, какъ было сказано (см. стр. 180), *эксцен-триситетомъ*, для всякой гиперболы болѣе единицы и равняется отно-шенію разстоянія между фокусами къ длинѣ дѣйствительной оси.

Обозначая эксцентриситетъ буквою e, будемъ имѣть

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Слѣдовательно, эксцентриситетъ гиперболы возрастаетъ съ увеличе-ніемъ отношенія $\frac{b}{a}$, т. е. съ возрастаніемъ остраго угла, образуемаго ассимптотами съ дѣйствительною осью.

Для равносторонней гиперболы $e = \sqrt{2}$.

При $e = \infty$ и $b = \infty$, гипербола обращается въ совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ.

287. Обозначая черезъ $2p$ длину хорды, проходящей черезъ фокусъ перпендикулярно къ дѣйствительной оси гиперболы, будемъ имѣть, что c и p суть координаты точки, принадлежащей этой кривой. Поэтому

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1.$$

Величина p, такъ же какъ и для эллипса, называется *параметромъ*. Изъ послѣдняго соотношенія получаемъ для нея слѣдующія выраженія черезъ оси и эксцентриситетъ:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = a(e^2 - 1).$$

Если за оси координатъ примемъ двѣ прямыя, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ дѣйствительною осью гиперболы, а другая съ перпендикуляромъ къ ней, возставленнымъ въ фокусѣ F', то уравненіе гиперболы получится изъ уравненія (1), полагая

$$x = x' - c \qquad \text{и} \qquad y = y'.$$

Это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$b^2(x' - c)^2 - a^2y'^2 = a^2b^2,$$

или

$$a^2(x'^2 + y'^2) = (b^2 - cx')^2,$$

или

$$x'^2 + y'^2 = (p - ex')^2.$$

Полагая здѣсь

$$x' = \rho\cos\varphi \qquad \text{и} \qquad y' = \rho\sin\varphi ,$$

получимъ

$$\rho^2 = (p - e\rho\cos\varphi)^2 ,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} .$$

Это есть уравненіе въ полярныхъ координатахъ, представляющее гиперболу только тогда, когда въ немъ $e > 1$. Если же $e < 1$, то этимъ же уравненіемъ выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 181), эллипсъ.

288. Уравненіе (1) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 - a^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \alpha^2} = 1 . \qquad (4)$$

Такимъ же точно образомъ можетъ быть представлено и уравненіе эллипса.

Предполагая, что въ послѣднемъ уравненіи α имѣетъ данную дѣйствительную величину, а величина a неопредѣленная, будемъ имѣть, что относительно прямоугольной системы координатъ это уравненіе выражаетъ систему *софокусныхъ* линій второго порядка, т. е. линій, имѣющихъ общіе фокусы въ двухъ точкахъ оси абсциссъ, отстоящихъ отъ начала координатъ на разстояніе α. И эти линіи будутъ эллипсы для значеній a, большихъ по абсолютной величинѣ, нежели α, и гиперболы для $a < \alpha$.

Постараемся найти линіи системы (4), проходящія черезъ какую-нибудь данную точку (x_1, y_1).

Въ силу самого условія будемъ имѣть

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - \alpha^2} = 1$$

или

$$a^4 - (x_1^2 + y_1^2 + \alpha^2)a^2 + \alpha^2 x_1^2 = 0 , \qquad (5)$$

откуда получаемъ два значенія для a^2:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + y_1^2 + \alpha^2 \pm \sqrt{(x_1^2 - \alpha^2)^2 + 2(x_1^2 + \alpha^2)y_1^2 + y_1^4}\right] ,$$

дѣйствительныя при всякихъ координатахъ x_1, y_1. Поэтому заключаемъ, что *черезъ всякую данную точку проходятъ двѣ дѣйствительныя линіи второго порядка, имѣющія данные фокусы.*

Предыдущее уравненіе (5) можно представить еще такъ:

$$(a^2-\alpha^2)^2-(x_1^2+y_1^2-\alpha^2)(a^2-\alpha^2)-\alpha^2 y_1^2=0,$$

откуда для $(a^2-\alpha^2)$ получаются также два значенія, произведеніе которыхъ равняется отрицательной величинѣ $-\alpha^2 y_1^2$. Это показываетъ, что одно изъ значеній a^2 болѣе α^2, а другое менѣе, а потому заключаемъ, что *изъ двухъ софокусныхъ кривыхъ второго порядка, проходящихъ черезъ данную точку, одна непремѣнно эллипсъ, а другая гипербола.*

На возможности опредѣлять точки плоскости пересѣченіемъ эллипсовъ и гиперболъ, принадлежащихъ системѣ софокусныхъ кривыхъ, основывается употребленіе особой *криволинейной* системы координатъ, въ которой роль абсциссъ играютъ оси эллипсовъ, а роль ординатъ оси гиперболъ, или обратно.

§ 3. Касательныя и нормали.

289. Предполагая, что гипербола отнесена къ своимъ осямъ и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

будемъ имѣть, что уравненіе

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{a^2}-\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1,$$

въ которомъ x_1, y_1 и x_2, y_2 суть координаты двухъ какихъ-нибудь точекъ этой кривой, выражаетъ прямую, пересѣкающую ее въ этихъ двухъ точкахъ.

Въ томъ случаѣ, когда точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, сѣкущая дѣлается касательной и уравненіе ея будетъ

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$$

или, по сокращеніи,

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Это уравненіе можно было бы получить изъ общаго уравненія касательныхъ къ кривымъ второго порядка, разсматривая само уравненіе гиперболы (1), какъ частный видъ общаго уравненія второй степени.

Въ немъ x_1 и y_1 суть, слѣдовательно, координаты точки прикосновенія, а x и y координаты любой точки касательной.

Хотя мы предполагали, что уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, отнесенную къ ея осямъ, но такъ какъ въ предыдущихъ разсужденіяхъ перпендикулярность осей не принимается вовсе во вниманіе, то выводъ имѣетъ мѣсто и тогда, когда оси координатъ косоугольныя, т. е. когда гипербола отнесена къ какимъ-нибудь двумъ ея сопряженнымъ діаметрамъ. Слѣдовательно, полагая, что уравненіе ея въ этомъ случаѣ есть

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

будемъ имѣть для касательной въ точкѣ (x_1, y_1) уравненіе

$$\frac{xx_1}{a'^2}-\frac{yy_1}{b'^2}=1.$$

290. Мы видѣли, что совокупность ассимптотъ гиперболы (1) выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Величины x и y, удовлетворяющія этому уравненію совмѣстно съ уравненіемъ касательной (2), суть координаты точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами. Если исключимъ изъ этихъ двухъ уравненій y, то получимъ для опредѣленія абсциссъ этихъ точекъ уравненіе второй степени

$$\left(\frac{xx_1}{a^2}-1\right)^2=\frac{x^2y_1^2}{a^2b^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)-\frac{2xx_1}{a^2}+1=0,$$

и такъ какъ x_1 и y_1 суть координаты точки, принадлежащей гиперболѣ, то это послѣднее уравненіе, по умноженіи обѣихъ частей на a^2, обращается въ

$$x^2-2x_1x+a^2=0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ x' и x'' корни этого уравненія, т. е. абсциссы точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами, будемъ имѣть

$$x'+x''=2x_1.$$

Точно также, исключая x изъ уравненій (3) и (2), получимъ

*

$$\frac{y^2x_1^2}{a^2b^2}=\left(\frac{yy_1}{b^2}+1\right)^2,$$

откуда

$$y^2-2y_1y-b^2=0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ y' и y'' корни этого уравненія, т. е. ординаты точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами, будемъ имѣть

$$y'+y''=2y_1.$$

Такимъ образомъ видимъ, что

$$x_1=\frac{x'+x''}{2} \quad \text{и} \quad y_1=\frac{y'+y''}{2},$$

и потому заключаемъ, что *точка прикосновенія касательной къ гиперболѣ есть средина отрѣзка этой касательной, заключающагося между ассимптотами.*

291. Уравненіе касательной (2), будучи рѣшено относительно y, получаетъ видъ

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x-\frac{b^2}{y_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

и, замѣняя y_1 его выраженіемъ черезъ x_1 изъ уравненія гиперболы (1), получимъ

$$y=\pm\frac{bx_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}}x\mp\frac{ab}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}x\mp\frac{ab}{\sqrt{x_1^2-a^2}}.$$

Предполагая, что точка прикосновенія удаляется въ безконечность, мы будемъ имѣть, что въ предѣлѣ, т. е. при $x_1=\infty$, послѣднее уравненіе обращается въ

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

а это уравненіе выражаетъ ассимптоты.

Такимъ образомъ, видимъ (см. стр. 114), что *ассимптоты суть касательныя въ безконечно удаленныхъ точкахъ.*

292. Если обозначимъ буквою m угловой коэффиціентъ въ уравненіи касательной (4), то будемъ имѣть

$$b^2x_1 = ma^2y_1$$

и, слѣдовательно,

$$b^4x_1^2 = m^2a^4y_1^2,$$

или

$$b^2(y_1^2 + b^2) = m^2a^2y_1^2,$$

откуда

$$\frac{b^2}{y_1} = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2},$$

и уравненіе касательной (4) приметъ видъ

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Въ такомъ видѣ оно могло бы быть выведено и непосредственно, подобно тому, какъ это сдѣлано было для эллипса (см. стр. 183 и 184).

При данномъ m это послѣднее уравненіе выражаетъ двѣ касательныя къ гиперболѣ, имѣющія данное направленіе.

Такъ какъ это уравненіе выражаетъ дѣйствительныя прямыя только тогда, когда $a^2m^2 > b^2$ и, слѣдовательно, по абсолютной величинѣ

$$m > \frac{b}{a},$$

то заключаемъ (см. стр. 203), что *въ направленіи каждаго мнимаго діаметра къ гиперболѣ могутъ быть проведены двѣ касательныя, въ направленіяхъ же дѣйствительныхъ діаметровъ нельзя провести ни одной касательной.*

Такъ какъ, далѣе, при $m = \frac{b}{a}$, послѣднее уравненіе обращается въ

$$y = \frac{b}{a}x,$$

то заключаемъ, что *въ направленіи ассимптоты можетъ быть проведена только одна касательная къ гиперболѣ и эта касательная есть сама ассимптота.*

293. Уравненіе (2) въ томъ случаѣ, когда въ немъ x_1 и y_1 суть координаты какой-нибудь точки плоскости, выражаетъ *поляру* этой точки относительно гиперболы.

Слѣдовательно, поляра точки, лежащей на дѣйствительной оси гиперболы, выражается уравненіемъ

$$xx_1 = a^2,$$

а поляра точки, лежащей на мнимой оси, уравненіемъ

$$yy_1 = -b^2.$$

Припоминая, что двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются сопряженными (см. стр. 126), заключаемъ изъ послѣднихъ уравненій, подобно тому, какъ и для эллипса, что половина дѣйствительной оси гиперболы есть средняя геометрическая разстояній отъ центра каждыхъ двухъ сопряженныхъ точекъ этой оси, и что такое же значеніе имѣетъ половина мнимой оси для лежащихъ на ней сопряженныхъ точекъ. Но, при этомъ, на дѣйствительной оси сопряженныя точки находятся по одну и ту же сторону отъ центра, а на мнимой по разныя стороны.

Пользуясь этими соотношеніями, не трудно построить поляру какой угодно точки относительно гиперболы, когда даны оси этой кривой.

Если въ уравненіи (2) положимъ $x = \pm c$ и $y = 0$, то оно обратится въ

$$\pm cx = a^2$$

или

$$cx \mp a^2 = 0,$$

откуда заключаемъ, что для гиперболы, такъ же какъ и для эллипса, *директрисы суть поляры соотвѣтствующихъ фокусовъ.*

294. Уравненіе нормали къ гиперболѣ, т. е. перпендикуляра къ касательной, возставленнаго въ точкѣ прикосновенія, получается легко изъ уравненія касательной и условія перпендикулярности.

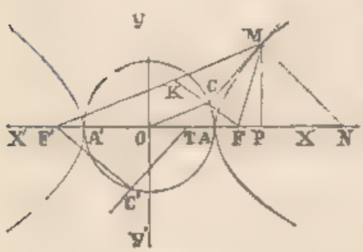
Для гиперболы, отнесенной къ ея осямъ, это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$\frac{(x-x_1)y_1}{b^2} + \frac{(y-y_1)x_1}{a^2} = 0$$

или

$$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Полагая, что T и N (фиг. 66) суть точки, въ которыхъ касательная и нормаль пересѣкаютъ дѣйствительную ось гиперболы, будемъ имѣть, положивши въ уравненіяхъ (2) и (5) этихъ прямыхъ $y = 0$, что



Фиг. 66.

$$OT = \frac{a^2}{x_1} \quad \text{и} \quad ON = \frac{c^2x_1}{a^2}.$$

Слѣдовательно,

$$OT \cdot ON = c^2,$$

соотношеніе, имѣющее мѣсто, какъ мы видѣли, и для эллипса. Различіе состоитъ, однако, въ томъ, что для эллипса $OT > a$ и, слѣдовательно, $ON < a$, а для гиперболы наоборотъ.

Отрѣзки MT и MN называются *длиною касательной* и *длиною нормали* въ точкѣ M. Отрѣзки же TP и PN *подкасательною* и *субнормалью* точки M. Выраженія абсолютныхъ величинъ подкасательной и субнормали легко получить слѣдующимъ образомъ:

$$TP = OP - OT = x_1 - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$$

и

$$PN = ON - OP = \frac{a^2 x_1}{a^2} - x_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что субнормаль въ какой-либо точкѣ гиперболы находится въ постоянномъ отношеніи къ абсциссѣ этой точки.

Выраженія длины нормали и длины касательной легко могутъ быть выведены точно такъ же, какъ и для эллипса.

295. Выражая касательную къ гиперболѣ въ точкѣ M (фиг. 66) уравненіемъ

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

будемъ имѣть, что длины перпендикуляровъ FC и $F'C'$, опущенныхъ на эту касательную изъ фокусовъ, опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

$$FC = \frac{\frac{ax_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} \quad \text{и} \quad F'C' = \frac{-\frac{ax_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}, \quad . \; . \; . \; (6)$$

откуда

$$\frac{FC}{F'C'} = -\frac{\frac{ax_1}{a^2} - 1}{\frac{ax_1}{a^2} + 1} = -\frac{\frac{ax_1}{a} - a}{\frac{ax_1}{a} + a}.$$

Члены послѣдняго отношенія представляютъ собою (см. стр, 206) радіусы векторы точки M, т. е. разстоянія MF и MF' этой точки отъ фокусовъ. Поэтому заключаемъ, что между абсолютными длинами имѣетъ мѣсто пропорціональность

$$\frac{FC}{F'C'} = \frac{MF}{MF'},$$

доказывающая, что треугольники MFC и $MF'C'$ подобны и, слѣдовательно, углы FMC и $F'MC'$ равны.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что *касательная, а слѣдовательно и нормаль, къ гиперболѣ составляютъ равные углы съ радіусами векторами точки прикосновенія.*

Свойство это принадлежитъ, какъ мы видѣли, и эллипсу, но различіе заключается въ томъ, что касательная эллипса дѣлитъ пополамъ внѣшній уголъ треугольника, вершины котораго находятся въ точкѣ прикосновенія и въ двухъ фокусахъ, а нормаль внутренній; для гиперболы же наоборотъ.

Это позволяетъ заключить, что если эллипсъ и гипербола имѣютъ общіе фокусы, то касательныя къ нимъ въ точкѣ ихъ пересѣченія перпендикулярны между собою. Слѣдовательно, софокусные эллипсы и гиперболы (см. стр. 209) представляютъ двѣ ортогональныя системы кривыхъ линій.

296. Перемножая выраженія (6), получимъ

$$FC \cdot F'C' = \frac{1 - \dfrac{c^2 x_1^2}{a^4}}{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}}$$

и такъ какъ изъ уравненія гиперболы (1) имѣемъ

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2 - a^2}{a^2},$$

то

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2 - a^2}{b^2}\right) = \frac{c^2 x_1^2 - a^4}{a^4 b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\frac{c^2 x_1^2}{a^4} - 1\right).$$

Слѣдовательно,

$$FC \cdot F'C' = -b^2.$$

Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ фокусовъ на какую-нибудь касательную, такъ же какъ и для эллипса, имѣетъ постоянную величину. Но для гиперболы эта величина отрицательная, потому что фокусы ея находятся по разныя стороны отъ всякой касательной.

297. Продоживъ перпендикуляръ FC до пересѣченія въ K съ радіусомъ векторомъ $F'M$, будемъ имѣть изъ равенства треугольниковъ MFC и MKC, что

$$FC = KC \quad \text{и} \quad FM = KM.$$

Слѣдовательно, точка K есть симметричная съ фокусомъ F относительно касательной и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$F'K = F'M' - FM = AA' = 2a.$$

Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ, симметричныхъ съ однимъ изъ фокусовъ гиперболы относительно касательныхъ, есть окружность, описанная изъ другого фокуса радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси.

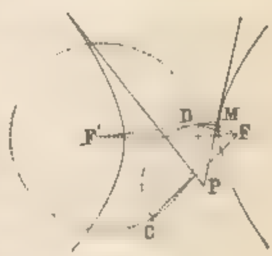
Далѣе, прямая OC, какъ соединяющая средины двухъ сторонъ треугольника FKF', равняется половинѣ третьей стороны $F'K$. Слѣдовательно,

$$OC = OA = a,$$

и такъ какъ очевидно, что $OC' = OC$, то заключаемъ, что геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательныя къ гиперболѣ, есть окружность, описанная на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ.

298. На послѣднихъ свойствахъ гиперболы можетъ быть основано построеніе касательныхъ къ этой кривой, проходящихъ черезъ данную точку или имѣющихъ данное направленіе.

Положимъ, напримѣръ, что требуется построить касательныя къ гиперболѣ, проходящія черезъ точку P (фиг. 67). Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны, очевидно, находиться на такомъ же разстояніи отъ точки P, какъ и этотъ фокусъ. Онѣ лежатъ, слѣдовательно, на окружности, описанной изъ P, какъ центра, радіусомъ PF. Съ другой стороны, онѣ должны лежать, какъ сейчасъ показано, на окружности, описанной изъ фокуса F' радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси гиперболы. Построивши эти



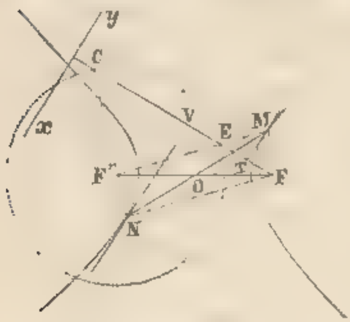
Фиг. 67.

двѣ окружности и соединивъ точки C и D ихъ пересѣченія съ фокусомъ F, будемъ, слѣдовательно, имѣть, что искомыя касательныя суть перпендикуляры, опущенные изъ точки P на прямыя CF и DF. Понятно также, что точки прикосновенія этихъ касательныхъ опредѣлятся, какъ точки пересѣченія ихъ съ прямыми, соединяющими точки C и D съ другимъ фокусомъ F'.

Можно было бы также построить искомыя касательныя, отыскивая основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на нихъ изъ фокуса F. Точки эти находятся, очевидно, при пересѣченіи двухъ окружностей, изъ которыхъ одна имѣетъ діаметромъ прямую PF, а другая дѣйствительную ось гиперболы.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ гиперболѣ, параллельныя данной прямой XY (фиг. 68).

Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, суть, очевидно, точки пересѣченія перпендикуляра къ данной прямой, опущеннаго изъ фокуса F, и окружности, описанной радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси, изъ фокуса F'. Если C и E суть эти точки, то искомыя касательныя получатся, какъ проходящія черезъ средины T и V отрѣзковъ FE и FC. Точки T и V могутъ быть найдены также пересѣченіемъ прямой FC съ окружностью, описанной на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ.

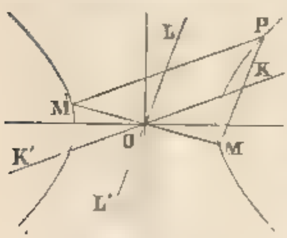


Фиг. 68.

Что касается точекъ прикосновенія M и N искомыхъ касательныхъ, то онѣ, будучи концами одного и того же діаметра, могутъ быть построены, какъ вершины параллелограмма, двѣ другія вершины котораго находятся въ фокусахъ и двѣ стороны котораго суть прямыя, соединяющія фокусъ F' съ точками C и E.

§ 4. Сопряженные діаметры.

299. Называя, какъ и для эллипса, двѣ хорды гиперболы, соединяющія какую-нибудь ея точку P (фиг. 69) съ концами M и M' какого-нибудь діаметра, *дополнительными*, легко убѣдиться, что дополнительныя хорды всегда параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, и обратно. Въ самомъ дѣлѣ, если хорды PM и PM' дополнительныя, то параллельные имъ діаметры KK' и LL' дѣлятъ ихъ пополамъ и потому суть сопряженные. Если же діаметры KK' и LL' сопряженные и хорды PM и PM' имъ параллельны, то прямая MM', соединяющая концы этихъ хордъ, должна дѣлиться пополамъ каждымъ изъ этихъ діаметровъ и, слѣдовательно, сама есть діаметръ, что и доказываетъ, что эти хорды дополнительныя.



Фиг. 69.

300. Мы видѣли выше (см. стр. 204), что если гипербола отнесена къ ея осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

то двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ какой-нибудь ея точкѣ и проходящія черезъ ея вершины, выражаются уравненіями

$$ay = kb(x - a) \quad \text{и} \quad kay = b(x + a).$$

Такъ какъ эти прямыя представляютъ, очевидно, дополнительныя хорды, то, полагая, что

$$y = mx \quad \text{и} \quad y = m'x$$

суть уравненія двухъ параллельныхъ имъ и, слѣдовательно, сопряженныхъ діаметровъ, будемъ имѣть

$$m = \frac{kb}{a} \quad \text{и} \quad m' = \frac{b}{ka}.$$

При неопредѣленномъ k, это суть выраженія угловыхъ коэффиціентовъ двухъ какихъ бы ни было сопряженныхъ діаметровъ. Перемножая ихъ, получимъ соотношеніе

$$mm' = \frac{b^2}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

и если обозначимъ черезъ α и β углы этихъ діаметровъ съ положительнымъ направленіемъ дѣйствительной оси, то это соотношеніе приметъ видъ

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

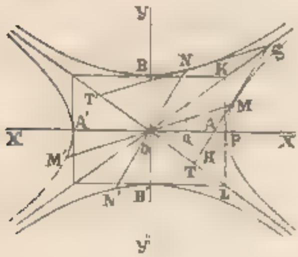
Изъ того, что вторая часть этого равенства есть величина положительная, заключаемъ, что углы α и β или оба острые, или оба тупые. Это значитъ, что два сопряженные діаметра гиперболы всегда помѣщаются въ одныхъ и тѣхъ же углахъ, образуемыхъ осями этой кривой.

Такъ какъ, далѣе, изъ послѣдняго равенства видно, что если $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$, и обратно, то заключаемъ, что два сопряженные діаметра помѣщаются въ разныхъ углахъ, образуемыхъ ассимптотами, т. е. что изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ гиперболы одинъ непремѣнно дѣйствительный, а другой мнимый.

301. Положимъ, что M и N (фиг. 70) суть двѣ точки, принадлежащія сопряженнымъ гиперболамъ, уравненія которыхъ относительно ихъ осей суть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Обозначая координаты этихъ точекъ послѣдовательно черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2, будемъ имѣть, что діаметры MM' и NN' выражаются уравненіями



Фиг. 70.

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \qquad \text{и} \qquad y = \frac{y_2}{x_2}x,$$

и если эти діаметры сопряженные, то должно быть

$$\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{b^2}{a^2}$$

или

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(5)$$

Отсюда находимъ

$$\frac{x_1^2}{a^2} : \frac{y_2^2}{b^2} = \frac{y_1^2}{b^2} : \frac{x_2^2}{a^2} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) : \left(\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{a^2}\right),$$

и такъ какъ координаты точекъ M и N удовлетворяютъ послѣдовательно уравненіямъ (4), то члены послѣдняго отношенія равняются единицѣ. Поэтому будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a} = \pm\frac{y_2}{b} \qquad \text{и} \qquad \frac{x_2}{a} = \pm\frac{y_1}{b}, \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(6)$$

при чемъ, какъ видно изъ (5), верхнему знаку одного равенства соотвѣтствуетъ верхній же знакъ другого и нижнему нижній.

Равенство (5) есть условіе параллельности каждаго изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ съ касательными въ концахъ другого. Принимая это свойство за доказанное (см. стр. 122), будемъ имѣть, что соотношенія (6), а также и соотношеніе (2) или (3), суть его слѣдствія.

302. Обозначая длины діаметровъ MM' и NN' черезъ $2a'$ и $2b'$, получимъ, на основаніи равенствъ (6),

$$a'^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + \frac{b^2 x_2^2}{a^2} = \frac{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2}{a^2},$$

и

$$b'^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + y_2^2 = \frac{a^2 y_1^2 + b^2 y_2^2}{b^2},$$

откуда, по вычитаніи,

$$a'^2 - b'^2 = a^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) + b^2\left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2}\right).$$

Слѣдовательно,

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что для гиперболы *разность квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная, равная разности квадратовъ ея осей.*

Если назовемъ площадь треугольника MON буквою $\triangle$, то, какъ извѣстно (см. стр. 52), должно быть

$$2\triangle = x_1y_2 - y_1x_2,$$

или, въ силу соотношеній (6),

$$2\triangle = \frac{bx_1^2}{a} - \frac{ay_1^2}{b} = ab\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

или

$$2\triangle = ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Первая часть этого равенства выражаетъ площадь параллелограмма $MONS$, а вторая площадь прямоугольника $AOBK$. Слѣдовательно, *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построеннаго на ея осяхъ.*

Равенство (8) можно получить также слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ сторона MS параллелограмма $MONS$ есть касательная къ гиперболѣ въ точкѣ M и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

то, принимая перпендикуляръ OH за высоту этого параллелограмма и обозначая его черезъ h, будемъ имѣть

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2y_1^2}{b^2} + \frac{b^2x_1^2}{a^2}}}.$$

Но, въ силу равенствъ (6),

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2} + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = x_2^2 + y_2^2 = b'^2,$$

и потому

$$2\triangle = b'h = ab.$$

Предыдущія два предложенія, представляющія соотношенія между величинами сопряженныхъ діаметровъ, извѣстны, какъ и для эллипса, подъ названіемъ теоремъ Аполлонія.

303. Легко видѣть, что ассимптоты гиперболы суть діагонали всякаго параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ стороны ST и ST' такого параллелограмма, какъ касательныя къ двумъ сопряженнымъ гиперболамъ, выражаются уравненіями

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{xx_2}{a^2}-\frac{yy_2}{b^2}=-1.$$

Сложивши почленно эти уравненія, получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ ихъ точку пересѣченія

$$\frac{x(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{y(y_1+y_2)}{b^2}=0,$$

но изъ соотношеній (6) имѣемъ

$$\frac{x_1+x_2}{a}=\frac{y_1+y_2}{b},$$

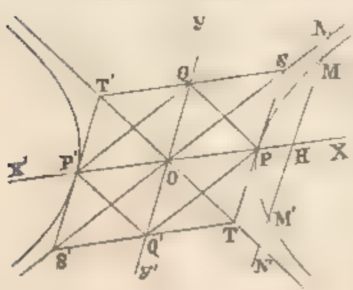
вслѣдствіе чего это уравненіе принимаетъ видъ

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,$$

а это есть уравненіе ассимптоты.

Такъ какъ точка M есть средина отрѣзка ST, то площадь треугольника SOT равняется площади параллелограмма $MONS$ при всякомъ положеніи точки M на гиперболѣ. Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *площадь треугольника, образуемаго касательной къ гиперболѣ и двумя ея ассимптотами, имѣетъ постоянную величину, равную площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ этой гиперболы.*

304. Возьмемъ произвольную прямую, пересѣкающую гиперболу въ двухъ точкахъ M и M', а ассимптоты ея въ точкахъ N и N' (фиг. 71). Принимая за оси координатъ два сопряженные діаметра PP' и QQ', изъ которыхъ одинъ параллеленъ этой прямой, будемъ имѣть уравненіе гиперболы въ видѣ



Фиг. 71.

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ a' и b' суть половины этихъ діаметровъ. Уравненія же ассимптотъ, какъ діагоналей построеннаго на этихъ діаметрахъ параллелограмма, будутъ, очевидно,

$$y=+\frac{b'}{a'}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b'}{a'}x.$$

Отсюда видимъ, что если H есть средина хорды MM', то, полагая $OH = x$, будемъ имѣть

$$HN = +\frac{b'}{a'}x \qquad \text{и} \qquad HN' = -\frac{b'}{a'}x$$

и, слѣдовательно, по абсолютнымъ величинамъ,

$$HN = HN',$$

и потому

$$MN = M'N'.$$

Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *отрѣзки всякой сѣкущей, заключающіеся между точками пересѣченія съ гиперболою и ея ассимптотами, равны между собою.*

Это свойство указываетъ на простое построеніе гиперболы, когда извѣстны ея ассимптоты и одна точка. Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ данную точку M произвольную сѣкущую и опредѣливъ точки ея встрѣчи съ ассимптотами, мы можемъ простымъ отложеніемъ отрѣзка $N'M'$, равнаго MN, найти другую точку пересѣченія этой сѣкущей съ гиперболою. Измѣняя направленіе сѣкущей, можно, такимъ образомъ, получить сколько угодно точекъ гиперболы и, притомъ, сколь угодно близкихъ между собою. Понятно, что каждая изъ найденныхъ точекъ можетъ быть употребляема для этого построенія такъ же, какъ и сама данная точка M.

305. Въ предположеніи $OH = x$, мы имѣемъ изъ уравненія гиперболы (9)

$$HM = +\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2} \qquad \text{и} \qquad HM' = -\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2}.$$

Слѣдовательно,

$$MN = \frac{b'}{a'}(x - \sqrt{x^2 - a'^2}) \qquad \text{и} \qquad MN' = \frac{b'}{a'}(x + \sqrt{x^2 - a'^2})$$

и, по перемноженіи, находимъ

$$MN \cdot MN' = b'^2.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что *произведеніе отрѣзковъ сѣкущей, заключающихся между одною изъ точекъ гиперболы и ассимптотами, равняется квадрату половины діаметра, параллельнаго этой сѣкущей.*

Пользуясь этимъ свойствомъ, легко найти построеніемъ длины сопряженныхъ діаметровъ, имѣющихъ данное направленіе, когда извѣстны ассимптоты гиперболы и одна ея точка. Въ самомъ дѣлѣ, если YY' есть данный по направленію діаметръ, то, проведя черезъ дан-

вую точку M прямую, ему параллельную, до пересѣченія съ ассимптотами въ точкахъ N и N' и отложивши на немъ отрѣзки OQ и OQ', равные средней геометрической отрѣзковъ MN и MN', найдемъ концы этого діаметра. Если же черезъ Q и Q' проведемъ прямыя, параллельныя ассимптотамъ, то при пересѣченіи ихъ получатся концы P и P діаметра, сопряженнаго съ даннымъ.

Въ частности такимъ образомъ могутъ быть найдены оси гиперболы, направленіе которыхъ опредѣляется, какъ дѣлящихъ пополамъ углы между ассимптотами.

306. Уравненіе гиперболы получаетъ весьма простой видъ, когда за оси координатъ принимаются ея ассимптоты. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ начало координатъ будетъ въ этомъ случаѣ въ центрѣ кривой, то уравненіе ея должно быть вида (см. стр. 112).

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Замѣчая же, что точки пересѣченія кривой съ ассимптотами находятся въ безконечности, будемъ имѣть, что, при $y = 0$,

$$x^2 = -\frac{F}{A} = \infty$$

и, при $x = 0$,

$$y^2 = -\frac{F}{C} = \infty.$$

Слѣдовательно, $A = 0$ и $C = 0$, и уравненіе обращается въ

$$Bxy + F = 0$$

или

$$xy = -\frac{F}{B}.$$

Если направленія осей координатъ выберемъ такъ, чтобы одна изъ вѣтвей гиперболы помѣщалась внутри нормальнаго угла (фиг. (72), то первая часть этого уравненія, какъ произведеніе величинъ, имѣющихъ одинаковые знаки, будетъ положительною, а потому можно положить

$$-\frac{F}{B} = m^2,$$

гдѣ m есть величина дѣйствительная.

Фиг. 72.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ, получаетъ, такимъ образомъ, видъ

$$xy = m^2,$$

въ которомъ оно содержитъ только одну постоянную величину, m называемую *степенью* гиперболы.

307. Если положимъ, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) суть двѣ точки, принадлежащія гиперболѣ, такъ что

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = m^2,$$

то уравненіе

$$(x - x_1)(y - y_2) - xy + m^2 = 0,$$

будучи первой степени, удовлетворяется координатами этихъ точекъ и, слѣдовательно, представляетъ прямую, пересѣкающуюся въ нихъ съ гиперболой. При совпаденіи точекъ пересѣченія эта прямая обращается въ касательную. Слѣдовательно, уравненіе касательной въ точкѣ (x_1, y_1) будетъ

$$(x - x_1)(y - y_1) - xy + m^2 = 0,$$

или, по сокращеніи,

$$xy_1 + yx_1 = 2m^2,$$

или, наконецъ,

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1.$$

Отсюда видимъ, что отрѣзки OS и OT, отсѣкаемые касательною на ассимптотахъ, равны послѣдовательно $2x_1$ и $2y_1$.

Называя уголъ между ассимптотами черезъ ω, будемъ поэтому имѣть, что площадь треугольника SOT равняется

$$2x_1 y_1 \sin\omega = 2m^2 \sin\omega.$$

Такимъ образомъ, подтверждается, что площадь треугольника, образуемаго касательною съ ассимптотами, имѣетъ величину постоянную, и такъ какъ мы видѣли, что эта величина равняется площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ гиперболы, то должно быть

$$2m^2 \sin\omega = ab.$$

Замѣчая, далѣе, что (см. стр. 202)

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}\lambda = \frac{b}{a},$$

получаемъ

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\operatorname{tg}\lambda}{1 - \operatorname{tg}^2\lambda} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\omega = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Поэтому находимъ

$$m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

выраженіе степени гиперболы чрезъ ея оси

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

ПАРАБОЛА.

§ 1. Построеніе параболы и ея отношеніе къ центральнымъ кривымъ.

308. Кривыя второго порядка, не имѣющія центра, называются параболами. Мы видѣли (см. стр. 122, 146 и слѣд.), что уравненіе всякой такой кривой можетъ быть приведено къ виду

$$y^2 = 2px, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

для чего за ось абсциссъ долженъ быть принятъ одинъ изъ діаметровъ кривой, а за ось ординатъ касательная въ концѣ его.

Въ слѣдующемъ мы будемъ сперва предполагать, что система координатъ прямоугольная, т. е. что ось абсциссъ совпадаетъ съ осью параболы, или главнымъ діаметромъ, а ось ординатъ есть касательная въ вершинѣ.

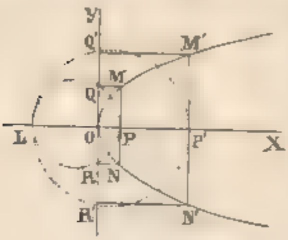
Величина p, входящая въ уравненіе (1), называется въ этомъ случаѣ *параметромъ* параболы. Отъ ея значенія зависитъ видъ и расположеніе кривой на плоскости.

Такъ какъ при дѣйствительныхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію (1), величины p и x должны имѣть одинаковые знаки, то заключаемъ, что парабола, выражаемая этимъ уравненіемъ, расположена по ту сторону отъ оси ординатъ, куда абсциссы считаются положительными, когда $p > 0$, и по другую сторону, когда $p < 0$. Замѣчая же, что положительное направленіе оси абсциссъ можетъ быть выбираемо по произволу, мы можемъ ограничиться только первымъ случаемъ, т. е. предполагать, что въ уравненіи (1) величина p положительная.

309. Изъ уравненія (1) видно прежде всего, что для всякой точки параболы ордината есть средняя пропорціональная между абсциссою и постоянною длиною $2p$. Это указываетъ на слѣдующее весьма простое построеніе точекъ параболы въ какомъ угодно числѣ и сколь угодно близкихъ между собою, построеніе, которымъ и обнаруживается съ

достаточною точностью форма этой кривой, состоящей, какъ извѣстно (см. стр. 136), изъ одной сплошной вѣтви, простирающейся въ безконечность.

Отложивши отъ начала координатъ въ отрицательномъ направлени оси абсциссъ длину OL (фиг. 73), равную $2p$, описываемъ окружность, проходящую черезъ точку L и имѣющую центръ на оси абсциссъ. Если затѣмъ чрезъ точки P, Q, R, пересѣченія этой окружности съ осями координатъ проведемъ прямыя, имъ параллельныя, то точки встрѣчи этихъ прямыхъ M и N будутъ точками параболы.



Фиг. 73.

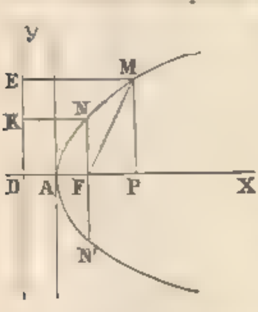
Такимъ же образомъ, помощію другой окружности найдутся точки M' и N', принадлежащія параболѣ. Понятно при этомъ, что, при достаточно малой разности радіусовъ окружностей, разстояніе между точками M и M' можетъ быть сколь угодно малымъ.

310. Уравненіе (1), по прибавленіи къ обѣимъ его частямъ выраженія $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$, можетъ быть представлено въ видѣ

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

и въ такомъ случаѣ первая его часть представляетъ квадратъ разстоянія какой-нибудь точки M параболы (фиг. 74) отъ точки F, которой координаты суть

$$x=\frac{p}{2} \quad \text{и} \quad y=0,$$



Фиг. 74.

а вторая часть есть квадратъ разстоянія той же точки M отъ прямой DE, уравненіе которой есть

$$x+\frac{p}{2}=0.$$

Мы заключаемъ отсюда, что разстоянія каждой точки параболы отъ точки F и отъ прямой DE равны между собой. Точка F и прямая DE, относительно которыхъ парабола обладаетъ этимъ свойствомъ, называются *фокусомъ* и *директрисою* этой кривой. Можно сказать, слѣдовательно, что парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ ея фокуса и директрисы.

Мы видѣли, что отношеніе разстояній каждой точки эллипса отъ его фокуса и соотвѣтствующей директрисы есть постоянная величина, называемая эксцентриситетомъ, и что то же свойство принадлежитъ гиперболѣ съ тѣмъ лишь различіемъ, что для эллипса эксцентриситетъ

менѣе единицы, а для гиперболы болѣе единицы (см. стр. 180 и 208). Теперь мы видимъ, что и парабола обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, причемъ для нея это отношенiе равняется единицѣ.

Если чрезъ фокусъ F проведемъ прямую, перпендикулярную къ оси параболы, до пересѣченiя съ кривою въ точкѣ N и изъ N опустимъ перпендикуляръ NK на директрису, то, на основанiи сейчасъ сказаннаго, должно быть

$$FN = KN = DF = DA + AF,$$

но, какъ мы видѣли,

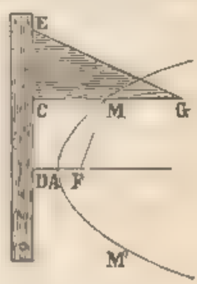
$$DA = AF = \frac{p}{2};$$

слѣдовательно,

$$FN = p.$$

Параметръ параболы есть, такимъ образомъ, длина перпендикуляра къ оси, возставленнаго въ фокусѣ до пересѣченiя съ кривою или, что все то же, половина хорды, проходящей черезъ фокусъ и перпендикулярной къ оси. То же самое геометрическое значенiе имѣетъ параметръ эллипса и гиперболы (см. стр. 181 и 208).

311. На свойствѣ параболы по отношенiю къ ея фокусу и директрисѣ основывается слѣдующiй способъ черченiя этой кривой непрерывнымъ движенiемъ. Взявъ фокусъ F и директрису DE (фиг. 75), помѣщаемъ прямоугольный треугольникъ, употребляемый обыкновенно при черченiи, такъ, чтобы одинъ изъ его катетовъ CE совпадалъ съ директрисою. Если затѣмъ гибкая и нерастяжимая нить, длина которой равняется другому катету CG, будетъ укрѣплена однимъ концомъ въ вершинѣ G треугольника, а другимъ въ фокусѣ F, то, натянувши эту нить чертящимъ остріемъ такъ, чтобы оно прилегало къ катету CG, и заставляя треугольникъ скользить по линейкѣ, прилегающей къ директрисѣ, будемъ имѣть, что остріе, какъ остающееся при всякомъ его положенiи на одинаковыхъ разстоянiяхъ отъ фокуса и директрисы, начертитъ дугу параболы.



Фиг. 75.

312. Если за оси координатъ примемъ ось параболы и перпендикуляръ къ ней въ фокусѣ, то уравненiе этой кривой получится изъ уравненiя (1), полагая

$$x = x' + \frac{p}{2} \quad \text{и} \quad y = y'.$$

Слѣдовательно, оно будетъ имѣть видъ

$$y'^2 = 2px' + p^2.$$

Полагая же здѣсь

$$x' = -\varrho\cos\varphi \qquad \text{и} \qquad y' = \varrho\sin\varphi,$$

получимъ уравненіе параболы въ полярныхъ координатахъ относительно такой системы координатъ, полюсъ которой находится въ фокусѣ, а полярная ось направлена изъ фокуса къ вершинѣ. Это уравненіе будетъ

$$\varrho^2\sin^2\varphi + 2p\varrho\cos\varphi = p^2$$

или

$$\varrho^2 = (p - \varrho\cos\varphi)^2,$$

откуда

$$\varrho = \frac{p}{1+\cos\varphi}.$$

Оно представляетъ частный видъ уравненія

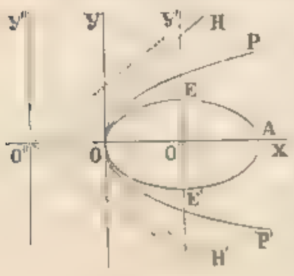
$$\varrho = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

выражающаго, какъ мы видѣли, какъ эллипсъ, такъ и гиперболу (см. стр. 181 и 209).

Такимъ образомъ видимъ, что это послѣднее уравненіе есть общее для всѣхъ видовъ кривыхъ второго порядка и выражаетъ эллипсъ, когда въ немъ $e < 1$, гиперболу, когда $e > 1$, и параболу, когда $e = 1$.

313. Отношеніе параболы къ центральнымъ кривымъ усматривается всего лучше, если составимъ уравненія этихъ кривыхъ относительно такихъ осей координатъ, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ осью, а другая есть касательная въ вершинѣ.

Если эллипсъ EOE' (фиг. 76) относительно осей координатъ $O'X$ и $O'Y'$, совпадающихъ съ его осями, выражается уравненіемъ



Фиг. 76

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

то уравненіе его, по отношенію къ осямъ OX и OY, получится, полагая

$$x' = x - a \qquad \text{и} \qquad y' = y.$$

Это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

или, по сокращеніи и умноженіи обѣихъ частей на b^2,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Подобнымъ же образомъ, полагая, что уравненіе гиперболы HOH', отнесенной къ ея осямъ $O''X$ и $O''Y''$, есть

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

получимъ уравненіе той же кривой относительно системы координатъ XOY, полагая

$$x'' = x + a \quad \text{и} \quad y'' = y.$$

Это уравненіе будетъ слѣдовательно,

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

или, по преобразованіи,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Замѣчая, что какъ для эллипса, такъ и для гиперболы, отношеніе $\frac{b^2}{a}$ равняется параметру p (см. стр. 181 и 208), мы можемъ уравненія (2) и 3) представить въ видѣ

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad \text{и} \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Эти уравненія различаются между собою и съ уравненіемъ параболы POP', которое есть

$$y^2 = 2px,$$

лишь послѣднимъ членомъ вторыхъ частей, содержащимъ множителя x^2. Членъ этотъ отрицательный для эллипса, положительный для гиперболы и равенъ нулю для параболы.

Можно, слѣдовательно, сказать, что для эллипса площадь квадрата, построеннаго на ординатѣ какой-нибудь точки, менѣе площади прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ этой точки и удвоенномъ параметрѣ. Для гиперболы первая изъ этихъ площадей болѣе второй, а для параболы обѣ площади равны между собою [1].

[1]) У древнихъ геометровъ это свойство составляетъ основаніе всего ученія о линіяхъ второго порядка.

Если положимъ, что полуоси a и b эллипса увеличиваются до безконечности, но такъ, что отношеніе $\frac{b^2}{a}$, т. е. параметръ, сохраняетъ конечную величину, то въ предѣлѣ, при $a=\infty$, уравненіе эллипса, представляемое въ видѣ (4), обращается въ уравненіе параболы. То же самое можетъ быть сказано и о гиперболѣ.

Мы заключаемъ такимъ образомъ, что парабола есть предѣлъ, къ которому стремятся эллипсъ и гипербола при безконечномъ возрастаніи ихъ осей.

§ 2. Касательная и нормаль.

314. Если парабола выражается уравненіемъ

$$y^2=2px$$

и (x_1, y_1), (x_2, y_2) суть двѣ лежащія на ней точки, то уравненіе

$$(y-y_1)(y-y_2)=y^2-2px,$$

или

$$(y_1+y_2)y-y_1y_2=2px,$$

будучи первой степени, выражаетъ прямую, встрѣчающую параболу въ этихъ двухъ точкахъ.

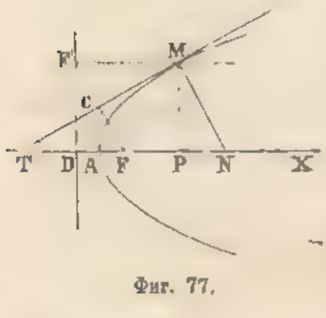
Въ предположеніи, что данныя точки совпадаютъ, т. е. что $x_2=x_1$ и $y_2=y_1$, эта прямая обращается въ касательную. Такимъ образомъ касательная къ параболѣ выражается уравненіемъ

$$2y_1y=y_1{}^2+2px.$$

Замѣчая, что $y_1{}^2=2px_1$, мы можемъ дать ему видъ

$$yy_1=p(x+x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Здѣсь x_1, y_1 суть координаты точки прикосновенія M фиг. 77), а x, y координаты любой точки на касательной.



Фиг. 77.

Нормаль, какъ прямая, проходящая через точку прикосновенія M и перпендикулярная къ касательной, выразится, слѣдовательно, уравненіемъ

$$y_1(x-x_1)+p(y-y_1)=0 \quad \ldots (2)$$

Если положимъ въ этомъ уравненіи $y=0$, то получимъ

$$x=x_1+p.$$

Это есть абсцисса AN точки N, въ которой нормаль пересѣкаетъ ось параболы.

Замѣчая, что субнормаль точки M есть отрѣзокъ PN, будемъ имѣть

$$PN = AN - AP = (x_1 + p) - x_1 = p.$$

Слѣдовательно, *субнормаль параболы есть постоянная величина, равная параметру этой кривой.*

315. Полагая въ уравненіи (1) касательной $y = 0$, получимъ

$$x + x_1 = 0,$$

откуда

$$x = -x_1.$$

Это есть абсцисса точки T, въ которой касательная пересѣкается съ осью. Отсюда заключаемъ, что

$$TA = AP$$

и, слѣдовательно,

$$TP = 2x_1.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *подкасательная всякой точки параболы дѣлится вершиною кривой пополамъ.*

Такъ какъ фокусъ и директриса параболы находятся на одинаковомъ разстояніи отъ вершины, то

$$DA = AF,$$

и потому, на основаніи сейчасъ сказаннаго, будемъ имѣть

$$TF = DP = F_1M = FM.$$

Слѣдовательно, треугольникъ TFM равнобедренный и потому углы TMF и MTF равны.

Касательная къ параболѣ составляетъ равные углы съ осью кривой и съ радіусомъ векторомъ точки прикосновенія.

Отсюда заключаемъ, что въ треугольникѣ MFN углы при вершинахъ M и N также равны, какъ дополнительные до прямого къ равнымъ угламъ треугольника TFM. Слѣдовательно,

$$FM = FN.$$

Это указываетъ на возможность простого построенія касательной и нормали въ данной точкѣ параболы, когда извѣстны фокусъ и направленіе оси кривой. Окружность, описанная изъ фокуса, какъ центра, чрезъ данную точку, должна пересѣчь ось въ двухъ точкахъ, принадлежащихъ касательной и нормали.

316. Если въ уравненіи (1) x_1 и y_1 суть координаты какой-нибудь точки плоскости, то выражаемая имъ прямая есть *поляра* этой точки

(см. стр. 125). Такъ какъ при $x_1 = \frac{p}{2}$ и $y_1 = 0$ это уравненіе обращается въ

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

и выражаетъ директрису (см. стр. 228), то убѣждаемся, что для параболы, такъ же какъ и для центральныхъ кривыхъ, директриса есть поляра фокуса.

Называя черезъ m угловой коэффиціентъ касательной, будемъ имѣть изъ уравненія (1)

$$m = \frac{p}{y_1},$$

откуда

$$m^2 y_1^{\,2} = p^2,$$

или

$$2m^2 p x_1 = p^2.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{p}{2m^2} = \frac{y_1}{2m},$$

и потому уравненію касательной (1) можно дать видъ

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Такъ какъ при всякомъ дѣйствительномъ значеніи m это уравненіе представляетъ опредѣленную и единственную прямую, то заключаемъ, что во всякомъ данномъ направленіи къ параболѣ можетъ быть проведена касательная и, притомъ, только одна.

Давая угловому коэффиціенту m два значенія m_1 и m_2, получимъ уравненія двухъ касательныхъ

$$y = m_1 x + \frac{p}{2m_1} \quad \text{и} \quad y = m_2 x + \frac{p}{2m_2}$$

и, рѣшая ихъ совмѣстно, найдемъ для абсциссы точки пересѣченія выраженіе

$$x = \frac{p}{2m_1 m_2}.$$

Если разсматриваемыя касательныя перпендикулярны между собою, то должно быть

$$m_1 m_2 = -1,$$

вслѣдствіе чего послѣднее выраженіе обратится въ

$$x = -\frac{p}{2},$$

а это показываетъ, что перпендикулярныя между собою касательныя пересѣкаются на директрисѣ.

Можно, слѣдовательно, сказать, что *директриса параболы есть геометрическое мѣсто вершины прямого угла, стороны котораго касаются параболы.*

317. Если точка F_1 (фиг. 77) есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки M параболы на директрису, то, по свойству параболы, треугольникъ FMF_1 равнобедренный. Замѣчая при этомъ, что, по доказанному выше свойству касательной,

$$\angle FMT = \angle MTF = \angle TMF_1 ,$$

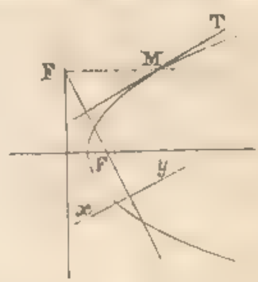
убѣждаемся, что прямая FF_1 перпендикулярна къ касательной MT и, слѣдовательно, точка F_1 есть симметричная съ фокусомъ относительно этой касательной.

Итакъ, можно сказать, что *директриса параболы есть геометрическое мѣсто точекъ, симметричныхъ съ фокусомъ относительно касательныхъ.*

Такъ какъ касательная въ вершинѣ A параболы проходитъ черезъ средину отрѣзка DF и параллельна директрисѣ, то она должна проходить и черезъ средину C отрѣзка FF_1, т. е. основаніе перпендикуляра изъ фокуса на касательную. Это показываетъ, что *основанія перпендикуляровъ изъ фокуса на касательныя къ параболѣ лежатъ на касательной въ вершинѣ этой кривой.*

Оба послѣднія заключенія можно также вывести аналитически, составивъ уравненіе перпендикуляра изъ фокуса на касательную и опредѣливши координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ касательною и директрисою.

318. На послѣднихъ свойствахъ параболы основывается построеніе касательныхъ къ этой кривой, проходящихъ черезъ данную точку или имѣющихъ данное направленіе.



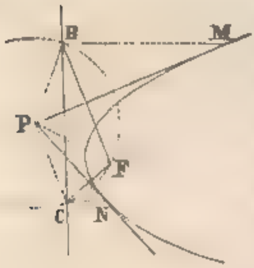
Фиг. 78.

Положимъ сперва, что требуется построить касательную, параллельную данной прямой XY (фиг. 78). Проведя черезъ фокусъ F прямую, перпендикулярную къ данной, до пересѣченія съ директрисою въ точкѣ F', будемъ имѣть, что F и F' суть точки, симметричныя относительно искомой касательной. Послѣдняя опредѣлится, поэтому, какъ перпендикуляръ, возставленный изъ средины отрѣзка FF'. Что касается точки прикосновенія M,

то она получится, какъ точка пересѣченія построенной касательной съ прямою, проходящею черезъ F' параллельно оси параболы.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ параболѣ, проходящія черезъ данную точку P (фиг. 79).

Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны находиться на директрисѣ и на такомъ же разстояніи отъ точки P, какъ и фокусъ. Слѣдовательно, это будутъ двѣ точки B и C, въ которыхъ директриса пересѣкается съ окружностью, описанною изъ P, какъ центра, радіусомъ PF. Затѣмъ сами касательныя получаются, какъ перпендикуляры изъ P на прямыя BF и CF, а ихъ точки прикосновенія M и N опредѣлятся пересѣченіемъ ихъ съ перпендикулярами, возставленными въ B и C къ директрисѣ.



Фиг. 79.

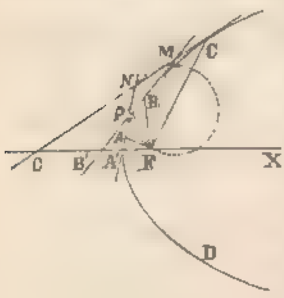
Такъ какъ углы PBC и PCB, какъ прилежащіе основанію равнобедреннаго треугольника, равны между собою, то должно быть также

$$\angle PBM = \angle PCN.$$

Но, вслѣдствіе симметричности точекъ B и C съ фокусомъ относительно касательныхъ PM и PN, эти послѣдніе углы равняются угламъ, составляемымъ прямою PF съ прямыми, соединяющими фокусъ съ точками прикосновенія. Слѣдовательно, и эти углы равны между собою.

Это приводитъ насъ къ заключенію, что *прямая, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ къ параболѣ, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый радіусами векторами точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.*

319. Уголъ $A'PB'$, образуемый двумя касательными къ параболѣ (фиг. 80), очевидно, равняется разности угловъ $PA'X$ и $PB'X$, составляемыхъ этими касательными съ осью параболы. Съ другой стороны уголъ AFB, образуемый радіусами векторами точекъ прикосновенія A и B этихъ касательныхъ, равняется разности угловъ AFX и BFX, составляемыхъ этими радіусами векторами съ осью. Но AFX, какъ внѣшній уголъ равнобедреннаго треугольника AFA', вдвое болѣе угла $PA'X$ и по той же причинѣ уголъ BFX вдвое болѣе угла $PB'X$. Отсюда заключаемъ, что *уголъ между двумя касательными къ параболѣ равняется половинѣ угла, образуемаго радіусами векторами точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.*



Фиг. 80.

Если къ параболѣ проведены три касательныя, точки прикосновенія которыхъ суть A, B, C и которыя, пересѣкаясь между собою, образуютъ треугольникъ MNP, то, на основаніи предыдущаго, уголъ PFB равняется половинѣ угла AFB, а уголъ BFM—половинѣ угла BFC. Слѣдовательно, уголъ PFM, составляя половину угла AFC, равняется углу $A'NC'$ между касательными въ точкахъ A и C. Это доказываетъ, что четыре точки M, N, P и F лежатъ на одномъ кругѣ.

Итакъ, *кругъ, описанный около треугольника, образуемаго тремя касательными къ параболѣ, проходитъ черезъ фокусъ этой кривой.*

§ 3. Діаметры.

320. Мы видѣли, что всѣ діаметры параболы параллельны между собою (см. стр. 116). Поэтому для параболы, выражаемой относительно прямоугольной системы координатъ уравненіемъ

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

уравненіе всякаго діаметра будетъ

$$y = h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Положимъ, что m есть угловой коэффиціентъ хордъ, черезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ. Въ такомъ случаѣ уравненіе какой-нибудь изъ этихъ хордъ будетъ

$$y = mx + k.$$

Исключивъ x изъ этого уравненія и уравненія параболы, получимъ для опредѣленія ординатъ концовъ хорды уравненіе

$$y^2 = 2p\left(\frac{y-k}{m}\right),$$

или

$$y^2 - \frac{2p}{m}y + \frac{2pk}{m} = 0,$$

откуда видимъ, что ордината средины хорды, равная полусуммѣ ординатъ концовъ ея, есть $\frac{p}{m}$. Слѣдовательно,

$$\frac{p}{m} = h \qquad \text{или} \qquad hm = p, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

соотношеніе, опредѣляющее діаметръ, соотвѣтствующій данному направленію хордъ, или обратно.

Изъ уравненія параболы (1) находимъ, что координаты точки ея пересѣченія съ діаметромъ (2) суть

$$x = \frac{h^2}{2p} \quad \text{и} \quad y = h.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной въ этой точкѣ будетъ

$$hy = p\left(x + \frac{h^2}{2p}\right),$$

или

$$y = \frac{p}{h}x + \frac{h}{2}.$$

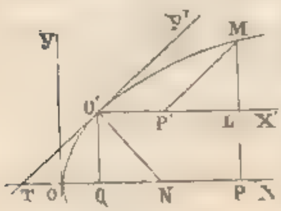
Отсюда видимъ, что касательная въ концѣ діаметра параллельна хордамъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ. Это свойство было уже доказано (см. стр. 122) и имъ можно было бы воспользоваться для вывода соотношенія (3).

321. Уравненіе параболы относительно косоугольной системы координатъ, состоящей изъ какого-нибудь діаметра и касательной въ концѣ его, имѣетъ, какъ мы видѣли, также видъ

$$y^2 = 2p'x. \quad \quad (4)$$

Въ этомъ можно также убѣдиться и, вмѣстѣ съ тѣмъ, обнаружить геометрическое значеніе постояннаго p' посредствомъ преобразованія координатъ.

Положимъ, что относительно прямоугольной системы координатъ XOY (фиг. 81) парабола выражается уравненіемъ



Фиг. 81.

$$y^2 = 2px.$$

Примемъ за новую систему координатъ діаметръ $O'X'$ и касательную $O'Y'$, пересѣкающую ось параболы въ точкѣ T, и пусть

$$a = OQ \quad \text{и} \quad b = O'Q$$

будутъ координаты новаго начала относительно прежней системы, а ω уголъ между новыми осями координатъ.

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть для точки M

$$x = OP, \quad y = MP, \quad x' = O'P', \quad y' = MP',$$

и такъ какъ

$$OP = OQ + O'P' + MP'\cos\omega$$

и

$$MP = O'Q - MP'\sin\omega,$$

то формулы преобразованія координатъ будутъ

$$x = a + x' + y'\cos\omega,$$
$$y = b + y'\sin\omega.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе параболы относительно прежней системы, получимъ

$$(b + y'\sin\omega)^2 = 2p(a + x' + y'\cos\omega)$$

или

$$y'^2\sin^2\omega + 2y'(b\sin\omega - p\cos\omega) + (b^2 - 2pa) = 2px'.$$

Вслѣдствіе того, что точка O' принадлежитъ параболѣ, должно быть

$$b^2 = 2ap.$$

Кромѣ того, построивши нормаль $O'N$ къ параболѣ въ этой точкѣ, будемъ имѣть изъ треугольника $O'QN$, что

$$QN = O'Q\operatorname{tg}\omega,$$

или

$$p\cos\omega = b\sin\omega.$$

Предыдущее уравненіе параболы обращается поэтому въ

$$y'^2\sin^2\omega = 2px',$$

или

$$y'^2 = 2p'x',$$

причемъ

$$p' = \frac{p}{\sin^2\omega}.$$

Такъ какъ, далѣе, изъ треугольниковъ $O'QN$ и $TO'N$ имѣемъ

$$QN = O'N\sin\omega$$

и

$$O'N = TN\sin\omega,$$

откуда, по перемноженіи,

$$QN = TN\sin^2\omega,$$

или

$$p = (2a + p)\sin^2\omega,$$

то заключаемъ, что

$$p' = \frac{p}{\sin^2\omega} = 2\left(a + \frac{p}{2}\right).$$

Это показываетъ, что въ уравненіи параболы (4) относительно косоугольной системы координатъ постоянное p' означаетъ удвоенное разстояніе начала координатъ отъ фокуса кривой.

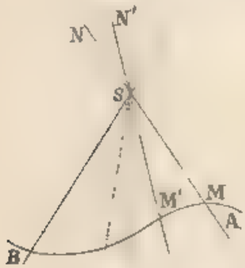
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

КОНИЧЕСКІЯ СѢЧЕНІЯ И ИХЪ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНІЕ НА ПЛОСКОСТИ.

---

§ 1. Линіи второго порядка, какъ сѣченія круглаго конуса плоскостями.

322. Если прямая линія перемѣщается въ пространствѣ такъ, что при всякомъ своемъ положеніи проходитъ черезъ данную неподвижную точку S (фиг. 82) и черезъ какую-нибудь точку M данной кривой AB, то поверхность, описываемая этою прямою, называется *коническою* или просто *конусомъ*. Точка S называется *вершиною* конуса, а кривая AB его *управляющей*. Прямая MN, которою описывается конусъ, во всякомъ ея положеніи носитъ названіе *образующей*.



Фиг. 82.

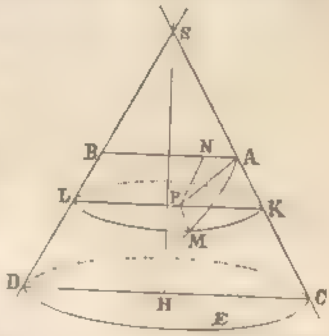
Если управляющая есть кругъ, то конусъ называется *круглымъ* и притомъ прямымъ или наклоннымъ, смотря по тому, будетъ ли прямая, соединяющая вершину съ центромъ управляющаго круга, перпендикулярна къ его плоскости или наклонна къ ней. Очевидно, что такой конусъ состоитъ изъ двухъ одинаковыхъ частей или *полостей*, изъ которыхъ одна описывается тою частью образующей SM, которая направляется изъ вершины къ точкамъ управляющаго круга, а другая ея продолженіемъ SM въ противоположную сторону.

Прямой круглый конусъ или, точнѣе говоря, часть его, заключающаяся между вершиною и плоскостью управляющаго круга, разсматривается обыкновенно въ начальной Геометріи, гдѣ эту плоскость называютъ основаніемъ конуса, а прямую, соединяющую вершину съ центромъ основанія, осью конуса.

323. Выше было замѣчено (см. стр. 105), что линіи второго порядка опредѣлялись древними геометрами, какъ сѣченія круглаго конуса различными плоскостями, вслѣдствіе чего и получили названіе *коническихъ*

ченій. Постараемся теперь убѣдиться, что это воззрѣніе дѣйствительно равнозначуще съ опредѣленіемъ этихъ кривыхъ посредствомъ уравненій.

Пусть S будетъ вершина прямого круглаго конуса (фиг. 83) и CED кругъ, служащій ему управляющей или основаніемъ. Прямая SH есть ось конуса, которую мы будемъ предполагать лежащей въ плоскости чертежа. Прямыя SC и SD суть двѣ образующія, лежащія въ той же плоскости.



Фиг. 83.

Всякую сѣкущую плоскость мы можемъ предполагать перпендикулярною къ плоскости CSD, и положеніе ея относительно конуса опредѣлится, очевидно, разстояніемъ AS отъ вершины до точки A, въ которой сѣкущая плоскость встрѣчаетъ образующую SC, и угломъ SAP, составляемымъ съ этой образующей прямою AP, по которой сѣкущая плоскость пересѣкается съ плоскостью чертежа CSD.

Положимъ, что

$$AS = d \qquad \text{и} \qquad \angle SAP = \varphi,$$

и пусть AM будетъ линія, по которой конусъ пересѣкается разсматриваемой сѣкущей плоскостью.

Возьмемъ какую-нибудь точку M на этой линіи и проведемъ черезъ нее плоскость, перпендикулярную къ оси SH конуса и пересѣкающую его по кругу KML, а плоскость разсматриваемаго сѣченія AM по прямой MP, перпендикулярной къ KL. Въ такомъ случаѣ по свойству круга будемъ имѣть

$$MP^2 = PK \cdot PL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если положимъ, далѣе, что

$$AP = x \qquad \text{и} \qquad MP = y,$$

и обозначимъ черезъ α уголъ CSH, составляемый каждой образующей конуса съ его осью, то изъ треугольника APK будемъ имѣть

$$\frac{PK}{AP} = \frac{\sin KAP}{\sin AKP} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha},$$

откуда

$$PK = x\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Проведя затѣмъ прямую AB параллельно KL и прямую PN параллельно образующей SD, будемъ имѣть

$$AB = 2d\sin\alpha$$

и изъ треугольника APN

$$\frac{AN}{AP}=\frac{\sin APN}{\sin ANP}=\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha},$$

откуда

$$AN=x\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Слѣдовательно,

$$PL=AB-AN=2d\sin\alpha-x\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(3$$

Подставивъ выраженія (2) и (3) въ равенство (1), получимъ

$$y^2=\frac{2d\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha}x-\frac{\sin\varphi\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha}x^2\quad.\;.\;.\;.\;.\;(4$$

Это есть уравненіе линіи пересѣченія по отношенію къ прямоугольной системѣ координатъ, для которой ось абсциссъ есть прямая AP а ось ординатъ перпендикуляръ къ ней въ точкѣ A, лежащій въ сѣкущей плоскости.

324. Полагая

$$\frac{d\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha}=p\qquad\text{и}\qquad-\frac{\sin\varphi\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha}=q,$$

дадимъ послѣднему уравненію видъ

$$y^2=2px+qx^2\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5$$

Въ этомъ видѣ, какъ показано выше (см. стр. 231), можетъ быть представлено уравненіе всякой кривой второго порядка, а именно: эллипса когда $q<0$, гиперболы, когда $q>0$, и параболы, когда $q=0$.

Такъ какъ уголъ φ, опредѣляющій направленіе сѣкущей плоскости долженъ считаться не превышающимъ 180^0, то $\sin\varphi>0$. Поэтому изъ предыдущаго выраженія для q усматриваемъ, что линія пересѣченія конуса съ плоскостью есть эллипсъ, когда $\varphi<\pi-2\alpha$, гипербола, когда $\varphi>\pi-2\alpha$, и парабола когда $\varphi=\pi-2\alpha$.

Такимъ образомъ видимъ, что одинъ и тотъ же круглый конусъ можетъ пересѣкаться плоскостями по всѣмъ тремъ линіямъ второго порядка. При этомъ эллипсъ получается тогда, когда сѣкущая плоскость пересѣкаетъ только одну полость конуса и когда, слѣдовательно, между образующими нѣтъ ни одной параллельной этой плоскости. Если же сѣкущая плоскость пересѣкаетъ обѣ полости конуса, такъ что въ числѣ образующихъ будутъ двѣ, съ нею параллельныя, то линія пересѣченія будетъ гипербола. Наконецъ, въ томъ случаѣ, когда сѣкущая плоскость параллельна только одной образующей, эта линія будетъ парабола.

Изъ уравненія (4) видно также, что если $d=0$, т. е. если сѣкущая плоскость проходитъ черезъ вершину конуса, то она имѣетъ съ нимъ только одну общую точку, когда $\varphi < \pi - 2\alpha$. Въ случаѣ же, когда $\varphi > \pi - 2\alpha$, она пересѣкаетъ его по двумъ различнымъ прямымъ (образующимъ), а когда $\varphi = \pi - 2\alpha$, она касается конуса по образующей.

325. Припомнимъ, что когда уравненіе (5) выражаетъ эллипсъ, то

$$q = -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Эксцентриситетъ эллипса, получаемаго при пересѣченіи конуса, опредѣлится поэтому слѣдующимъ образомъ:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 + q = \frac{\cos^2\alpha - \sin\varphi\sin(\varphi + 2\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Но легко убѣдиться, что

$$\sin\varphi\sin(\varphi + 2\alpha) = \sin^2(\varphi + \alpha) - \sin^2\alpha.$$

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$e^2 = \frac{\cos^2(\varphi + \alpha)}{\cos^2\alpha},$$

откуда

$$\cos^2(\varphi + \alpha) = e^2\cos^2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Такое же точно соотношеніе имѣетъ мѣсто и тогда, когда линія пересѣченія есть гипербола, ибо въ этомъ случаѣ

$$q = +\frac{p}{a} = +\frac{b^2}{a^2}$$

и эксцентриситетъ гиперболы опредѣлится по формулѣ

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + q = \frac{\cos^2\alpha - \sin\varphi\sin(\varphi + 2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

или

$$e^2 = \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Соотношеніе (6), при данныхъ e и α, всегда можетъ быть удовлетворено, если кривая есть эллипсъ и, слѣдовательно, $e < 1$. Для этого углу φ нужно дать нѣкоторое значеніе, заключающееся между 0 и $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Если же кривая есть гипербола, то это соотношеніе можетъ удовлетворяться только тогда, когда $e^2\cos^2\alpha < 1$.

*

Это показываетъ, что, имѣя данный конусъ и измѣняя направленіе сѣкущей плоскости, мы можемъ получить въ сѣченіи эллипсы какого угодно эксцентриситета.

Что же касается гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи того же конуса, то эксцентриситетъ ихъ не можетъ быть болѣе, чѣмъ $\frac{1}{\cos\alpha}$.

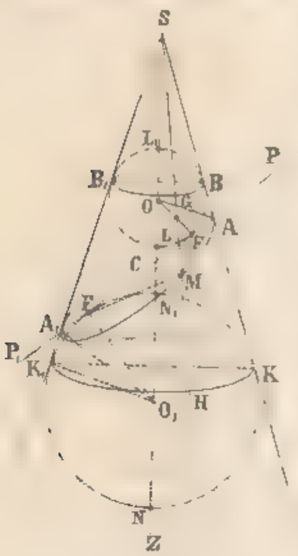
Такъ какъ при $e^2\cos^2\alpha = 1$ изъ соотношенія (6) находимъ

$$\varphi = \pi - \alpha,$$

то заключаемъ, что гиперболы наибольшаго эксцентриситета получаются при пересѣченіи конуса плоскостями, параллельными его оси.

326. Тождественность линій второго порядка съ сѣченіями прямого круглаго конуса можетъ быть еще доказана геометрически слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что конусъ описывается вращеніемъ угла KSZ около его стороны SZ (фиг. 84) и сѣкущая плоскость пересѣкаетъ только одну его полость. Пусть PP_1 будетъ прямая, по которой эта плоскость пересѣкается съ плоскостью чертежа, а AMA_1 кривая, по которой она пересѣкаетъ конусъ. Построимъ двѣ окружности, вписанныя въ уголъ KSK_1 и касающіяся прямой PP_1 въ двухъ точкахъ F и F', находящихся между A и A_1.



Фиг. 84.

Если вообразимъ, что плоскость чертежа будетъ вращаться около прямой SZ, то прямыя SK и SK_1 будутъ описывать разсматриваемый конусъ. Построенныя же окружности опишутъ при этомъ двѣ сферы, касающіяся этого конуса по кругамъ BGB_1 и KHK_1. Точки F и F' будутъ точками прикосновенія этихъ сферъ съ разсматриваемою сѣкущею плоскостью.

Возьмемъ теперь на линіи пересѣченія разсматриваемой плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведемъ черезъ нее образующую SM, пересѣкающуюся съ кругами BGB_1 и KHK_1 въ точкахъ G и H. Вслѣдствіе перпендикулярности плоскостей этихъ круговъ къ оси конуса, отрѣзокъ GH имѣетъ одну и ту же величину при всякомъ положеніи образующей.

Такъ какъ точки G и F суть точки прикосновенія, двухъ касательныхъ изъ M къ сферѣ BLB_1, то заключаемъ, что

$$MF = MG.$$

Вслѣдствіе такого же отношенія точекъ H и F' къ сферѣ KNK_1 должно быть

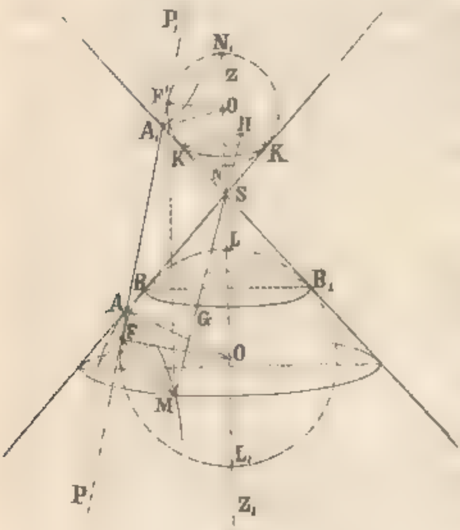
$$MF' = MH.$$

Слѣдовательно,

$$MF + MF' = GH = BK.$$

Итакъ, при всякомъ положеніи точки M на линіи AMA_1, сумма ея разстояній отъ точекъ F и F' имѣетъ одну и ту же величину. Это показываетъ (см. стр. 179), что линія эта есть эллипсъ, для котораго точки F и F' суть фокусы.

327. Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость, перпендикулярная къ плоскости чертежа и пересѣкающаяся съ нею по прямой PP_1, встрѣчаетъ обѣ полости конуса (фиг. 85). Пусть, какъ и прежде, прямая PP_1 пересѣкаетъ образующія BK и B_1K_1 въ точкахъ A и A_1.



Фиг. 85.

Построимъ двѣ окружности, вписанныя въ противоположные углы, составляемые этими образующими, и касающіяся прямой PP_1 въ точкахъ F и F', лежащихъ внѣ отрѣзка AA_1.

Если вообразимъ, что плоскость чертежа будетъ вращаться около прямой ZZ_1, дѣлящей уголъ BSB_1 пополамъ, то образующія BK и B_1K_1 будутъ перемѣщаться по разсматриваемому конусу, а построенныя окружности опишутъ двѣ сферы, соприкасающіяся съ конусомъ по кругамъ BGB_1 и KHK_1 и съ сѣкущей плоскостью въ точкахъ F и F'.

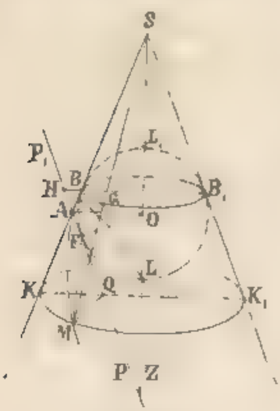
Взявъ на линіи пересѣченія этой плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведя черезъ нее образующую SM, пересѣкающуюся съ кругами BGB_1 и KHK_1 въ точкахъ G и H, будемъ имѣть, что отрѣзки MG и MF равны между собою, какъ касательныя изъ точки M къ сферѣ BLB_1. По такой же причинѣ должны быть равны между собою отрѣзки MH и MF'.

Слѣдовательно,

$$MF' - MF = MH - MG = GH,$$

и такъ какъ отрѣзокъ GH, при всякомъ положеніи образующей MS имѣетъ одну и ту же длину, то убѣждаемся, что разность разстояній всякой точки линіи пересѣченія отъ точекъ F и F' имѣетъ постоянную величину, что и доказываетъ (см. стр. 206), что эта линія есть гипербола, имѣющая фокусами точки F и F'.

328. Разсмотримъ, наконецъ, случай, когда сѣкущая плоскость, будучи перпендикулярна къ плоскости чертежа, пересѣкаетъ ее по прямой PP_1, параллельной одной изъ образующихъ SK и SK_1, въ ней лежащихъ (фиг. 86). Построивши окружность, вписанную въ уголъ KSK_1 и касающуюся прямой PP_1 въ точкѣ F, вообразимъ, что плоскость чертежа вращается около бисектра SZ угла KSK_1. При этомъ образующія SK и SK_1 будутъ перемѣщаться по конусу, а окружность опишетъ сферу, соприкасающуюся съ конусомъ по кругу BGB_1 и съ сѣкущею плоскостью въ точкѣ F.



Фиг. 86.

Если возьмемъ на линіи пересѣченія сѣкущей плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведемъ черезъ нее образующую MS, пересѣкающую кругъ BGB_1 въ точкѣ G, то будемъ имѣть, по такой же причинѣ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, что

$$MF = MG.$$

Если, затѣмъ, проведемъ черезъ точку M плоскость, перпендикулярную къ оси SZ конуса и пересѣкающую его по кругу KMK_1, а сѣкущую плоскость по прямой MQ, перпендикулярной къ PP_1, и продолжимъ BB до пересѣченія съ PP_1 въ точкѣ H, то будемъ имѣть

$$BK = MG$$

и, вслѣдствіе параллельности прямыхъ PP_1 и SK_1,

$$BK = HQ.$$

Слѣдовательно, при всякомъ положеніи точки M на линіи пересѣченія, должно быть

$$MF = HQ.$$

Отрѣзокъ HQ равняется, очевидно, разстоянію точки M отъ перпендикуляра, возставленнаго въ точкѣ H къ плоскости чертежа. Послѣднее равенство показываетъ, слѣдовательно, что каждая точка ли-

ніи пересѣченія находится на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ этого перпендикуляра и отъ точки F. Это означаетъ (см. стр. 228), что линія эта есть парабола и точка F ея фокусъ.

Такимъ образомъ, предыдущія геометрическія доказательства не только удостовѣряютъ, что сѣченія прямого круглаго конуса плоскостями суть разсмотрѣнныя выше линіи второго порядка, но и обнаруживаютъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что фокусы каждой изъ этихъ линій суть точки, въ которыхъ сѣкущая плоскость касается сферъ, вписанныхъ въ конусъ.

§ 2. Общая теорія фокусовъ.

329. Мы видѣли, что каждая линія второго порядка обладаетъ свойствомъ, что отношеніе разстояній ея точекъ отъ фокуса и директрисы имѣетъ постоянную величину, называемую эксцентриситетомъ. Не трудно показать, что это свойство принадлежитъ только линіямъ второго порядка и вполнѣ ихъ опредѣляетъ. Если же линія второго порядка дана, то оно служитъ самымъ общимъ опредѣленіемъ ея фокусовъ и директрисъ.

Пусть дана нѣкоторая точка, которой координаты относительно нѣкоторой прямоугольной системы суть

$$x=\alpha \qquad \text{и} \qquad y=\beta,$$

и нѣкоторая прямая, выражаемая относительно той же системы координатъ уравненіемъ

$$mx+ny+k=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Постараемся найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ этой точки и этой прямой находятся между собою въ данномъ постоянномъ отношеніи e.

Называя черезъ d и δ эти разстоянія, будемъ имѣть

$$d=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

и

$$\delta=\frac{mx+ny+k}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

и такъ какъ, по условію, $\frac{d}{\delta}=e$ или $d=e\delta$, то уравненіе искомаго геометрическаго мѣста будетъ

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\frac{e(mx+ny+k)}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

или

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=m'x+n'y+k', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ для краткости положено

$$\frac{em}{\sqrt{m^2+n^2}}=m'\,,\quad \frac{en}{\sqrt{m^2+n^2}}=n'\,,\quad \frac{ek}{\sqrt{m^2+n^2}}=k'\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

По уничтоженіи радикала, послѣднее уравненіе принимаетъ видъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(m'x+n'y+k')^2=0\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такъ какъ оно второй степени, то заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть линія второго порядка.

Точка (α,β) есть фокусъ этой линіи и прямая, выражаемая уравненіемъ (1) или, что все то же, уравненіемъ

$$m'x+n'y+k'=0\,,$$

соотвѣтствующая этому фокусу директриса.

Равенство (2) показываетъ, между прочимъ, что фокусъ линіи второго порядка можно опредѣлять, какъ такую точку, разстояніе которой отъ точекъ этой линіи выражается раціонально черезъ ихъ координаты.

330. Уравненіе (4), по раскрытіи скобокъ и соединеніи подобныхъ членовъ, можетъ быть приведено къ виду

$$(1-m'^2)x^2-2m'n'xy+(1-n'^2)y^2-$$
$$-2(\alpha+m'k')x-2(\beta+n'k')y+(\alpha^2+\beta^2-k'^2)=0\,.$$

Если при этомъ мы имѣемъ кривую, выражаемую уравненіемъ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\,,$$

то величины α, β, m', n' и k' могутъ быть найдены такъ, чтобы оба уравненія имѣли одно и то же геометрическое значеніе, для чего, какъ извѣстно, должно быть

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1-m'^2}{A}=\frac{-2m'n'}{B}=\frac{1-n'^2}{C}=\\&=\frac{-2(\alpha+m'k')}{D}=\frac{-2(\beta+n'k')}{E}=\frac{\alpha^2+\beta^2-k'^2}{F}\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Здѣсь заключается пять условій, вполнѣ опредѣляющихъ эти пять величинъ.

Такимъ образомъ, по коэффиціентамъ даннаго уравненія кривой могутъ быть найдены аналитически ея фокусы и директрисы.

Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлится и эксцентриситетъ e, ибо изъ равенствъ (3) имѣемъ

$$m'^2 + n'^2 = e^2,$$

откуда

$$e = \sqrt{m'^2 + n'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

331. Приложимъ сказанное къ опредѣленію фокусовъ и директрисъ кривыхъ второго порядка, выраженныхъ простѣйшими уравненіями.

Возьмемъ сперва эллипсъ, отнесенный къ его осямъ и выражаемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ условія, выражаемыя равенствами (5), будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} m'n' = 0, \quad \alpha + m'k' = 0, \quad \beta + n'k' = 0 \\ a^2(1 - m'^2) = b^2(1 - n'^2) = k'^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Для того чтобы имѣло мѣсто первое изъ этихъ равенствъ, нужно положить $n' = 0$ или $m' = 0$. Сдѣлаемъ сперва первое предположеніе.

Въ такомъ случаѣ изъ второго и третьяго равенства находимъ

$$\alpha = -m'k' \qquad \text{и} \qquad \beta = 0,$$

вслѣдствіе чего послѣднія условія обращаются въ

$$a^2(1 - m'^2) = b^2 = k'^2 - m'^2k'^2,$$

откуда

$$m' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad \text{и} \qquad k' = \pm a$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha = -m'k' = \mp \sqrt{a^2 - b^2}.$$

При этомъ видимъ, что положительному значенію α соотвѣтствуютъ значенія m' и k', имѣющія разные знаки, а отрицательному, имѣющія одинаковые знаки.

Такимъ образомъ, въ предположеніи $n' = 0$ мы находимъ два фокуса эллипса, координаты которыхъ суть

$$\alpha = +\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = 0$$

и

$$\alpha = -\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = 0,$$

и двѣ соотвѣтствующія имъ директрисы, выражаемыя уравненіями

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x - a = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x + a = 0.$$

Это суть фокусы и директрисы, значеніе которыхъ для эллипса было изслѣдовано выше.

По формулѣ (6) находимъ также эксцентриситетъ эллипса

$$e = m' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}.$$

332. Предположимъ теперь, что $m' = 0$. Въ такомъ случаѣ изъ равенствъ (7) получимъ

$$\alpha = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta = -n'k'$$

и при этомъ

$$a^2 = b^2(1 - n'^2) = k'^2 - n'^2k'^2.$$

Слѣдовательно,

$$n' = \pm\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \quad k' = \pm b$$

и

$$\beta = -n'k' = \mp\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Такимъ образомъ, и въ этомъ предположеніи мы находимъ два фокуса, лежащіе на оси ординатъ, и двѣ директрисы, параллельныя оси абсциссъ; но такъ какъ полагается, что въ уравненіи эллипса $b < a$, то эти фокусы и директрисы суть мнимые.

Итакъ, эллипсъ имѣетъ, собственно говоря, четыре фокуса: два дѣйствительные на большой оси и два мнимые на малой.

333. Возьмемъ теперь гиперболу, отнесенную къ ея осямъ.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ уравненіе кривой есть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то условія (5) обращаются въ

$$m'n' = 0, \quad \alpha + m'k' = 0, \quad \beta + n'k' = 0,$$
$$a^2(1 - m'^2) = -b^2(1 - n'^2) = k'^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Отсюда видно прежде всего, что необходимо сдѣлать два предположенія: или $n' = 0$, или $m' = 0$.

Въ первомъ изъ этихъ предположеній находимъ совершенно такъ же, какъ и для эллипса,

$$\beta = 0, \qquad m' = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

$$k' = \pm a, \qquad \alpha = -m'k' = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

причемъ величины m' и k' должны быть взяты съ разными знаками, когда α дается значеніе положительное, и съ одинаковыми знаками въ противномъ случаѣ.

Такимъ образомъ получаются для гиперболы два фокуса и двѣ директрисы, которые разсматривались нами выше.

Дѣлая предположеніе $m'=0$, получимъ

$$\alpha=0, \qquad n'=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

$$k'=\pm b\sqrt{-1}, \quad \beta=\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{-1},$$

что даетъ мнимые фокусы и директрисы.

Итакъ, гипербола, точно такъ же какъ и эллипсъ, имѣетъ четыре фокуса, изъ которыхъ два суть дѣйствительные, лежащіе на ея дѣйствительной оси и два мнимые, находящіеся на мнимой оси.

334. Чтобы найти подобнымъ же образомъ фокусы и директрисы параболы, возьмемъ ея простѣйшее уравненіе

$$y^2=2px$$

и будемъ предполагать, что оси координатъ прямоугольныя.

Въ такомъ случаѣ соотношенія (5) даютъ

$$\left.\begin{array}{c} 1-m'^2=0,\ m'n'=0,\ \beta+n'k'=0,\ k'^2-\alpha^2-\beta^2=0 \\ p(1-n'^2)=\alpha+m'k'. \end{array}\right\} \quad . \ . \ (8)$$

Изъ двухъ первыхъ равенствъ находимъ

$$m'=\pm1 \qquad \text{и} \qquad n'=0,$$

и такъ какъ знакъ одного изъ коэффиціентовъ въ уравненіи прямой произволенъ, то будемъ полагать, что $m'=-1$.

При этомъ изъ остальныхъ трехъ равенствъ найдемъ

$$\beta=0, \qquad \alpha=k'=\frac{p}{2}.$$

Такимъ образомъ, для параболы получается одинъ только фокусъ, опредѣляемый координатами

$$x=0 \qquad \text{и} \qquad y=\frac{p}{2},$$

и одна соотвѣтствующая ему директриса, которой уравненіе есть

$$x-\frac{p}{2}=0.$$

Они разсматривались нами выше.

Отыскивая величины α, β, m', n' и k', удовлетворяющія равенствамъ (8), мы не принимали во вниманіе возможности для этихъ величинъ безконечно большихъ значеній, но, очевидно, эта возможность существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли выше, что парабола есть предѣлъ эллипса, оси котораго безпредѣльно возрастаютъ (см. стр. 232). Понятно, что въ этомъ предѣльномъ случаѣ, когда одинъ конецъ большой оси и всѣ точки малой оси дѣлаются безконечно удаленными, такими же должны сдѣлаться второй дѣйствительный фокусъ и оба мнимые фокуса.

335. Укажемъ еще на одно опредѣленіе фокусовъ.

Уравненіе

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(m'x+n'y+k')^2,$$

которымъ, какъ мы видѣли, можетъ быть выражена всякая линія второго порядка, имѣющая точку (α,β) фокусомъ, удовлетворяется, очевидно, тѣми значеніями x и y, которыя удовлетворяютъ одновременно уравненіямъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$$

и

$$m'x+n'y+k'=0.$$

Первое изъ этихъ уравненій выражаетъ совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}\,(y-\beta)=0 \quad \text{и} \quad (x-\alpha)-\sqrt{-1}\,(y-\beta)=0,$$

проходящихъ черезъ мнимыя безконечно удаленныя точки круговъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

а, слѣдовательно, и всѣхъ другихъ круговъ на плоскости, т. е. черезъ такъ называемыя циклическія безконечно удаленныя точки (см. стр. 162).

Такъ какъ каждая изъ этихъ прямыхъ имѣетъ съ разсматриваемой кривой только одну общую точку, именно мнимую точку пересѣченія съ прямой

$$m'x+n'y+k'=0,$$

т. е. директрисой, то обѣ эти прямыя должны быть разсматриваемы, какъ касательныя къ этой кривой изъ фокуса или изъ циклическихъ точекъ.

Это показываетъ, что фокусы можно опредѣлять, какъ точки пересѣченія четырехъ мнимыхъ касательныхъ къ линіи второго порядка, проходящихъ черезъ циклическія точки. Понятно отсюда, что всякая

линія второго порядка должна имѣть четыре фокуса, изъ которыхъ только два дѣйствительные. Это суть точки пересѣченія касательныхъ, сопряженныхъ между собою (см. стр. 65).

При этомъ для параболы, какъ касающейся безконечно удаленной прямой (см. стр. 109), двѣ изъ этихъ касательныхъ совпадаютъ съ этою прямою. Слѣдовательно, одинъ изъ дѣйствительныхъ фокусовъ параболы есть безконечно удаленный, а мнимые совпадаютъ съ циклическими точками.

§ 3. Относительное расположеніе линій второго порядка.

336. Если даны на плоскости двѣ линіи второго порядка, выраженныя уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ \text{и} \quad A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

съ дѣйствительными коэффиціентами, то, для опредѣленія ихъ общихъ точекъ или точекъ пересѣченія, эти уравненія должны быть рѣшены совмѣстно, для чего предварительно нужно исключить одно неизвѣстное, напримѣръ y. Это исключеніе можетъ быть сдѣлано слѣдующимъ образомъ.

Положимъ для краткости

$$Bx+E=U_1, \qquad B'x+E'=V_1$$

$$Ax^2+Dx+F=U_2, \quad A'x^2+D'x+F'=V_2.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія (1) примутъ видъ

$$Cy^2+U_1y+U_2=0$$

и

$$C'y^2+V_1y+V_2=0.$$

Умножая первое изъ нихъ на C', а второе на C и вычитая результаты, получимъ

$$(C'U_1-CV_1)y+(C'U_2-CV_2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Умножая же первое уравненіе на V_2, а второе на U_2 и, по вычитаніи, сокративши всѣ члены на общаго множителя y, будемъ имѣть

$$(C'U_2-CV_2)y+(V_1U_2-U_1V_2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Исключая, наконецъ, y изъ двухъ послѣднихъ уравненій, найдемъ

$$(C'U_1-CV_1)(V_1U_2-U_1V_2)-(C'U_2-CV_2)^2=0.$$

Такъ какъ U_1 и V_1 содержатъ извѣстное x въ первой степени, а U_2 и V_2 во второй, то легко видѣть, что первая часть послѣдняго

уравненія есть многочленъ четвертой степени, такъ что это уравненіе имѣетъ видъ

$$Px^4 + P_1x^3 + P_2x^2 + P_3x + P_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ коэффиціенты P, P_1, P_2... суть вполнѣ опредѣленные результаты перемноженія и сложенія коэффиціентовъ данныхъ уравненій (1) кривыхъ.

Уравненіе четвертой степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ, вообще говоря, четыре рѣшенія или корня, что видно уже изъ того частнаго случая, когда это уравненіе есть биквадратное [1]).

Полагая, что эти рѣшенія суть x_1, x_2, x_3, x_4, мы для каждаго изъ нихъ найдемъ изъ уравненія (2) или (3) соотвѣтствующее единственное значеніе y.

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что *двѣ линіи второго порядка пересѣкаются, вообще говоря, въ четырехъ точкахъ.*

Эти точки могутъ быть, однако, дѣйствительныя или мнимыя.

337. Если одно изъ значеній x, удовлетворяющее уравненію (4), будетъ мнимое вида

$$a + b\sqrt{-1},$$

то, подставляя его въ это уравненіе, получимъ тождество вида

$$M + N\sqrt{-1} = 0,$$

гдѣ M и N суть дѣйствительныя величины, получающіяся, какъ результаты перемноженій и сложеній величинъ a и b и коэффиціентовъ уравненія (4).

Но послѣднее равенство можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда

$$M = 0 \qquad \text{и} \qquad N = 0,$$

а въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто и равенство

$$M - N\sqrt{-1} = 0,$$

которое получается отъ замѣны въ предыдущемъ $+\sqrt{-1}$ чрезъ $-\sqrt{-1}$ и которое есть, слѣдовательно, результатъ подстановки въ уравненіе (4) вмѣсто x величины $a - b\sqrt{-1}$.

Итакъ, сопряженныя мнимыя величины

$$a + b\sqrt{-1} \qquad \text{и} \qquad a - b\sqrt{-1}$$

могутъ быть рѣшеніями уравненія (4) не иначе, какъ одновременно.

---

[1]) Случай, разсматривающійся обыкновенно въ начальной алгебрѣ.

Если двѣ такія величины подставимъ на мѣсто x въ уравненіе (2) или (3), то получимъ для y также два сопряженныя значенія. Это показываетъ, что *мнимыя точки пересѣченія линій второго порядка должны быть попарно сопряженными*.

Слѣдовательно, въ относительномъ расположеніи двухъ линій второго порядка на плоскости нужно различать слѣдующіе три главные случая: 1) когда четыре точки пересѣченія этихъ линій суть дѣйствительныя, 2) когда двѣ изъ этихъ точекъ дѣйствительныя, а двѣ другія мнимыя сопряженныя, 3) когда общія точки линій второго порядка представляютъ собою двѣ пары мнимыхъ сопряженныхъ точекъ.

338. Прямая, соединяющая двѣ точки пересѣченія линій второго порядка, есть ихъ общая сѣкущая или общая хорда.

Четыре точки пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка со всѣми соединяющими ихъ прямыми составляютъ полный четыреугольникъ (см. стр. 96), вписанный въ обѣ кривыя.

Въ томъ случаѣ, когда всѣ эти точки дѣйствительныя, кривыя имѣютъ шесть общихъ хордъ, и діагональныя точки составляемаго ими четыреугольника образуютъ общій полярный треугольникъ, т. е. такой треугольникъ, каждая сторона котораго есть поляра противоположной вершины по отношенію къ обѣимъ кривымъ (см. стр. 127 и 128).

Въ остальныхъ случаяхъ нѣкоторыя изъ общихъ хордъ, а также нѣкоторыя изъ вершинъ и сторонъ общаго полярнаго треугольника, могутъ быть мнимыми.

Если обозначимъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ чрезъ K_1, L_1, K_2 и L_2 и положимъ, что координаты точекъ K_1 и L_1 суть

$$x = a_1 \pm b_1 \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y = c_1 \pm d_1 \sqrt{-1},$$

а координаты точекъ K_2 и L_2 суть

$$x = a_2 \pm b_2 \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y = c_2 \pm d_2 \sqrt{-1},$$

то будемъ имѣть, что прямыя K_1L_1 и K_2L_2, какъ соединяющія сопряженныя мнимыя точки, суть дѣйствительныя (см. стр. 67). Прямыя же K_1L_2 и L_1K_2 суть мнимыя и сопряженныя, и точка ихъ пересѣченія дѣйствительная, въ чемъ не трудно убѣдиться, отыскивая уравненія этихъ прямыхъ по даннымъ координатамъ точекъ K_1, K_2, L и L_2, черезъ которыя онѣ проходятъ. Точно также прямыя K_1K_2 и L_1L_2 суть мнимыя сопряженныя, пересѣкающіяся въ дѣйствительной точкѣ.

Итакъ, когда всѣ четыре точки пересѣченія кривыхъ мнимыя, то существуютъ только двѣ дѣйствительныя общія хорды, и въ этомъ случаѣ всѣ три вершины, а слѣдовательно и стороны, общаго полярнаго треугольника дѣйствительныя.

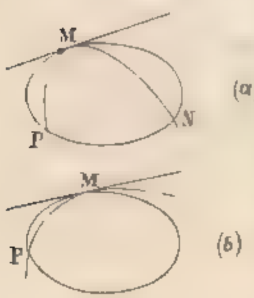
Если положимъ въ предыдущемъ $b_1 = 0$ и $d_1 = 0$, то точки K_1 и L будутъ дѣйствительныя. При этомъ прямыя $K_1 L_2$ и $L_1 K_2$, оставаясь мнимыми, уже не будутъ сопряженными, а потому и точка ихъ пересѣченія не будетъ дѣйствительною. То же самое относится и къ прямымъ $K_1 K_2$ и $L_1 L_2$.

Слѣдовательно, въ случаѣ, когда двѣ точки пересѣченія дѣйствительныя, а двѣ другія мнимыя, существуютъ тоже только двѣ дѣйствительныя общія хорды, точка пересѣченія которыхъ есть единственная дѣйствительная вершина общаго полярнаго треугольника.

Если обѣ разсматриваемыя линіи суть круги, то двѣ ихъ точки пересѣченія могутъ быть или дѣйствительныя или мнимыя; двѣ же другія, именно циклическія безконечно удаленныя точки, всегда мнимыя. Два круга имѣютъ, слѣдовательно, при всякомъ ихъ положеніи, двѣ дѣйствительныя общія хорды, изъ которыхъ одна есть безконечно удаленная прямая, а другая такъ называемая радикальная ось (см. стр. 161).

339. Если двѣ точки пересѣченія кривыхъ второго порядка совпадаютъ, то соединяющая ихъ общая хорда обращается въ общую касательную. Кривыя называются въ этомъ случаѣ соприкасающимися между собою.

При этомъ онѣ, кромѣ точки соприкосновенія M (фиг. 87, a), имѣютъ еще двѣ дѣйствительныя или мнимыя общія точки N и P.



Фиг. 87.

Если ни одна изъ этихъ послѣднихъ точекъ не совпадаетъ съ точкою соприкосновенія, то говорятъ, что соприкосновеніе есть *перваго порядка*. Но можетъ случиться, что одна изъ точекъ пересѣченія, напримѣръ N, совпадаетъ съ M (фиг. 87, b). Тогда кривыя считаются имѣющими въ точкѣ M соприкосновеніе *второго порядка*. При этомъ онѣ непремѣнно имѣютъ одну дѣйствительную точку пересѣченія P.

Возможенъ, наконецъ, случай, когда и эта точка совпадаетъ съ точкою касанія. Тогда соприкосновеніе будетъ *третьяго порядка* и, кромѣ точки касанія, кривыя общихъ точекъ имѣть не могутъ.

Порядокъ соприкосновенія опредѣляется, такимъ образомъ, числомъ сливающихся въ одну общихъ точекъ двухъ линій.

Такъ какъ для двухъ кривыхъ второго порядка такихъ точекъ не можетъ быть болѣе четырехъ, то и порядокъ соприкосновенія этихъ кривыхъ не можетъ быть выше третьяго.

340. Примемъ точку M соприкосновенія двухъ кривыхъ второго порядка за начало координатъ, а общую касательную за ось ординатъ. Въ такомъ случаѣ уравненія кривыхъ будутъ

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx = 0 \\ A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Умножая первое изъ нихъ на C', а второе на C и вычитая результаты, получимъ уравненіе

$$x[(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + (DC' - CD')] = 0,$$

которому удовлетворяютъ координаты общихъ точекъ этихъ кривыхъ.

Но такъ какъ это уравненіе выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна

$$x = 0$$

есть общая касательная, то другая, выражаемая уравненіемъ

$$(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + (DC' - CD') = 0, \ \ldots \ (6)$$

есть общая хорда, проходящая чрезъ точки пересѣченія N и P (фиг. 87).

Когда одна изъ этихъ послѣднихъ точекъ совпадаетъ съ точкою касанія, т. е. началомъ координатъ, то прямая (6) проходитъ черезъ начало координатъ, и потому должно быть

$$DC' - CD' = 0.$$

Это есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ кривыя (5) имѣютъ въ началѣ координатъ соприкосновеніе второго порядка.

Если обѣ точки N и P совпадаютъ съ точкою соприкосновенія, то прямая (6) должна совпадать съ касательною, т. е. съ осью ординатъ, для чего необходимо имѣть

$$DC' - CD' = 0 \qquad \text{и} \qquad BC' - CB' = 0.$$

Это суть, слѣдовательно, условія, при которыхъ кривыя (5) имѣютъ въ началѣ координатъ соприкосновеніе третьяго порядка.

341. Точки N и P (фиг. 87, a), не совпадая съ точкою M, могутъ совпадать между собою. Въ этомъ случаѣ кривыя будутъ соприкасаться въ двухъ точкахъ, и потому говорятъ, что онѣ имѣютъ *двойное соприкосновеніе*. Прямая, соединяющая точки касанія, называется хордою соприкосновенія. Понятно, что въ каждой точкѣ порядокъ соприкосновенія не можетъ быть выше перваго.

Если кривыя выражаются уравненіями (5), то, умножая первое на D', а второе на D, и вычитая результаты, получимъ уравненіе

$$(AD' - DA')x^2 + (BD' - DB')xy + (CD' - DC')y^2 = 0,$$

удовлетворяющееся координатами общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ и выражающее, какъ извѣстно (см. стр. 70), совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ. Это суть прямыя, соединяющія точку M съ точками N и P.

Если эти послѣднія точки совпадаютъ, то и прямыя эти должны совпадать, для чего, какъ мы знаемъ, должно быть

$$(BD'-DB')^2-4(AD'-DA')(CD'-DC')=0 .$$

Это есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ кривыя (5) имѣютъ двойное соприкосновеніе.

342. Если одна кривая дана, то другая, обладающая какими-либо частными свойствами, можетъ быть отыскиваема такъ, чтобы она съ данною кривою имѣла соприкосновеніе наивысшаго порядка. Такимъ образомъ можетъ быть найденъ кругъ, имѣющій наиболѣе тѣсное соприкосновеніе съ какой-нибудь кривой второго порядка. Такой кругъ называется вообще соприкасающимся.

Положимъ, что данъ эллипсъ и требуется найти кругъ, соприкасающійся съ нимъ въ данной точкѣ.

Примемъ за ось абсциссъ діаметръ эллипса, проходящій черезъ данную точку, а за ось ординатъ діаметръ, съ нимъ сопряженный. Уравненіе эллипса въ такомъ случаѣ будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 .$$

Перенеся начало координатъ въ данную точку касанія и сохраняя при этомъ то же направленіе осей, преобразуемъ это уравненіе въ

$$\frac{(x-a')^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

или

$$b'^2x^2+a'^2y^2-2a'b'^2x=0 .$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко видѣть изъ общаго уравненія круга, отнесеннаго къ косоугольной системѣ координатъ (см. стр. 152), что кругъ, касающійся въ началѣ координатъ оси y-овъ, выражается уравненіемъ

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2rx\sin\omega=0 ,$$

гдѣ r есть его радіусъ и ω уголъ между осями.

Послѣднія два уравненія имѣютъ видъ уравненій (5), а потому заключаемъ, на основаніи предыдущаго, что кругъ будетъ имѣть съ эллипсомъ соприкосновеніе второго порядка, если

$$a'r\sin\omega-b'^2=0 .$$

Отсюда находимъ радіусъ соприкасающагося круга

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin \omega}$$

и такъ какъ, по теоремѣ Аполлонія,

$$a'b' \sin \omega = ab,$$

то этому выраженію можно дать видъ

$$r = \frac{b'^3}{ab}.$$

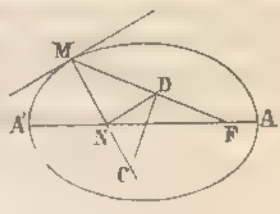
343. Если положимъ, что эллипсъ отнесенъ къ его осямъ, и обозначимъ координаты точки соприкосновенія, т. е. конца діаметра a', черезъ x_1 и y_1, а координаты конца діаметра b' черезъ x_2 и y_2, то будемъ имѣть (см. стр. 193)

$$b'^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + \frac{b^2 x_1^2}{a^2} = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right).$$

Вслѣдствіе этого для радіуса соприкасающагося круга получимъ выраженіе

$$r = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right)^{3/2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Соединимъ какой-нибудь фокусъ F съ точкою соприкосновенія M (фиг. 68) и обозначимъ черезъ ψ уголъ FMN радіуса вектора съ нормалью MN. Положимъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, что ϱ и l обозначаютъ послѣдовательно длину радіуса вектора FM и длину перпендикуляра изъ фокуса F на касательную въ M. Въ такомъ случаѣ должно быть



Фиг. 68.

$$l = \varrho \cos \psi.$$

Но мы видѣли выше (см. стр. 178 и 187), что

$$\varrho = a \pm \frac{\alpha}{a} x_1$$

и

$$l = \frac{1 \pm \dfrac{\alpha x_1}{a^2}}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\cos^2\psi = \frac{1}{a^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)}.$$

Перемножая это равенство съ равенствомъ (7), получимъ

$$r\cos^2\psi = b^2\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}.$$

Здѣсь вторая часть есть выраженіе длины нормали MN (см. стр. 186). Слѣдовательно,

$$r = \frac{MN}{\cos^2\psi}.$$

Это послѣднее выраженіе легко можетъ быть построено.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ N прямую, параллельную касательной, до пересѣченія съ радіусомъ векторомъ въ точкѣ D, и затѣмъ черезъ D прямую, перпендикулярную къ радіусу вектору, до пересѣченія съ нормалью въ точкѣ C, будемъ имѣть изъ прямоугольныхъ треугольниковъ MND и MDC, изъ которыхъ каждый содержитъ острый уголъ ψ,

$$MD = \frac{MN}{\cos\psi} \quad \text{и} \quad MC = \frac{MD}{\cos\psi},$$

откуда, по перемноженіи,

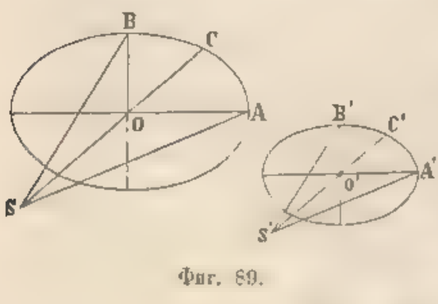
$$MC = \frac{MN}{\cos^2\psi}.$$

Слѣдовательно, точка C есть центръ соприкасающагося круга.

Такимъ же точно образомъ можетъ быть найденъ соприкасающійся кругъ для гиперболы и параболы.

§ 4. Подобныя линіи второго порядка.

344. Положимъ, что дана какая-нибудь кривая второго порядка ACB и какая-нибудь точка S (фиг. 89).



Фиг. 89.

Соединимъ эту точку съ различными точками кривой прямыми линіями SA, SB, SC... и проведемъ чрезъ нѣкоторую точку S' прямыя $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$..., имъ параллельныя, такъ же направленныя и пропорціональныя, такъ что

$$\frac{S'A'}{SA} = \frac{S'B'}{SB} = \frac{S'C'}{SC} = \ldots$$

Такимъ образомъ получится рядъ точекъ A', C', B'..., который, при непрерывности ряда точекъ A, C, B... на данной кривой, образуетъ также непрерывную линію, которая называется *подобною данной и подобно съ ней расположенною.*

Каждой точкѣ одной изъ такихъ кривыхъ соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, единственная и опредѣленная точка другой и обратно.

Точки S и S' называются центрами подобія кривыхъ.

Если радіусы векторы, соединяющіе центры подобія съ соотвѣтственными точками, вмѣсто того, чтобы быть параллельными, будутъ составлять между собою одинъ и тотъ же уголъ, то кривыя, оставаясь подобными, уже не будутъ подобно расположены. Очевидно, что одну изъ двухъ подобныхъ кривыхъ можно перемѣстить такъ, чтобы она сдѣлалась подобно расположенной съ другою. Для этого нужно только повернуть ее въ плоскости около какой-нибудь точки на уголъ, составляемый радіусами векторами соотвѣтственныхъ точекъ обѣихъ кривыхъ [1]).

345. Легко убѣдиться, что для двухъ подобныхъ кривыхъ одинъ изъ центровъ подобія можетъ быть взятъ произвольно, такъ что существуетъ безчисленное множество центровъ подобія.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ на двухъ какихъ-нибудь соотвѣтственныхъ радіусахъ векторахъ SC и $S'C'$ точки O и O' такъ, что

$$\frac{S'O'}{SO}=\frac{S'C'}{SC},$$

и соединивъ эти точки съ соотвѣтственными точками A и A', будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ SOA и $S'O'A'$

$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{S'O'}{SO}.$$

Точно также изъ подобія треугольниковъ SOB и $S'O'B'$ имѣемъ

$$\frac{O'B'}{OB}=\frac{S'O'}{SO}.$$

Слѣдовательно, вообще

$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'B'}{OB}=\ldots.$$

Прямыя, соединяющія точки O и O' съ соотвѣтственными точками кривыхъ, будутъ, такимъ образомъ, параллельны и пропорціональны, а потому точки O и O' будутъ также центрами подобія.

[1]) Это есть опредѣленіе подобія не только линій второго порядка, но и, вообще, какихъ угодно плоскихъ фигуръ.

346. Положимъ, что относительно какой-нибудь прямолинейной системы координатъ двѣ подобныя и подобно расположенныя кривыя ACB и $A'C'B'$ выражаются уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots(1)$$

и пусть относительно этой системы координаты центровъ подобія S и S' будутъ послѣдовательно

$$x=p,\quad y=q$$

и

$$x=p',\quad y=q'.$$

Въ такомъ случаѣ, замѣняя въ уравненіи первой кривой x и y чрезъ $x'+p$ и $y'+q$, получимъ уравненіе той же кривой относительно системы координатъ, имѣющей начало въ точкѣ S и прежнее направленіе осей. Точно также, замѣняя во второмъ уравненіи (1) x и y чрезъ $x''+p'$ и $y''+q'$, получимъ уравненіе второй кривой относительно системы координатъ, имѣющей начало въ точкѣ S' и то же направленіе осей.

Эти преобразованныя уравненія будутъ имѣть видъ

$$A_1x'^2+B_1x'y'+C_1y'^2+D_1'x'+E_1'y'+F_1'=0$$

и

$$A_2x''^2+B_2x''y''+C_2y''^2+D_2'x''+E_2'y''+F_2'=0,$$

гдѣ D_1', E_1', F_1' суть извѣстныя выраженія, составленныя изъ коэффиціентовъ перваго изъ уравненій (1) и координатъ p и q, а D_2', E_2', F_2' такія же выраженія изъ коэффиціентовъ второго изъ уравненій (1) и координатъ p' и q' (см. стр. 140 и 141).

Если назовемъ буквами r_1 и r_2 радіусы векторы, соединяющіе двѣ какія-нибудь соотвѣтственныя точки кривыхъ съ центрами подобія, то будемъ имѣть, вслѣдствіе параллельности осей координатъ,

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{r''}{r'}.$$

Послѣднее отношеніе, по самому опредѣленію подобія, имѣетъ величину постоянную. Обозначая ее черезъ m, будемъ имѣть

$$x''=mx' \quad \text{и} \quad y''=my',$$

вслѣдствіе чего второму изъ уравненій (1) можно будетъ дать видъ

$$A_2m^2x'^2+B_2m^2x'y'+C_2m^2y'^2+D_2'mx'+E_2'my'+F_2'=0$$

Такъ какъ здѣсь x' и y' имѣютъ то же геометрическое значеніе, какъ и въ первомъ изъ уравненій (1), то и сами уравненія должны

имѣть одно и то же геометрическое значеніе, а потому ихъ коэффиціенты должны быть пропорціональны.

Изъ пропорціональности коэффиціентовъ трехъ первыхъ членовъ заключаемъ, что

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Итакъ, если двѣ линіи второго порядка подобны и подобно расположены, то въ уравненіяхъ ихъ относительно какой-либо прямолинейной системы координатъ коэффиціенты членовъ второго измѣренія должны быть пропорціональны.

347. Чтобы убѣдиться въ обратномъ, замѣтимъ прежде всего, что изъ пропорціональности (2) слѣдуетъ, что

$$\frac{B_2^2 - 4A_2C_2}{B_1^2 - 4A_1C_1} = \frac{B_2^2}{B_1^2},$$

т. е. что разности

$$B_1^2 - 4A_1C_1 \quad \text{и} \quad B_2^2 - 4A_2C_2$$

имѣютъ одинаковые знаки или одновременно равняются нулю. Это значитъ, что при условіи (2) обѣ кривыя второго порядка (1) будутъ одного и того же рода, и если онѣ параболы, то направленіе ихъ діаметровъ одно и то же.

Положимъ сперва, что кривыя, выражаемыя уравненіями (1), при условіи (2), суть центральныя. Въ такомъ случаѣ, перенеся для каждой кривой систему координатъ такъ, чтобы начало совпадало съ центромъ, а направленіе осей оставалось то же самое, преобразуемъ уравненія (1) въ

$$\left.\begin{aligned} &A_1x'^2 + B_1x'y' + C_1y'^2 + K_1 = 0 \\ \text{и} \quad &A_2x''^2 + B_2x''y'' + C_2y''^2 + K_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Называя при этомъ полудіаметры обѣихъ кривыхъ, проведенныхъ въ одномъ и томъ же направленіи, черезъ ϱ_1 и ϱ_2, будемъ имѣть, вслѣдствіе параллельности осей координатъ,

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Изъ этихъ соотношеній и соотношеній (2) находимъ

$$\frac{A_2x''^2 + B_2x''y'' + C_2y''^2}{A_1x'^2 + B_1x'y' + C_1y'^2} = \frac{A_2\varrho_2^2}{A_1\varrho_1^2}.$$

Но изъ уравненій (3) видно, что первая часть этого послѣдняго равенства равняется отношенію постоянныхъ членовъ K_2 и K_1. Слѣдовательно,

$$\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}=\frac{A_1K_2}{A_2K_1}=\text{пост.},$$

а это и доказываетъ, что разсматриваемыя кривыя подобны и подобно расположены и что центры ихъ суть центры подобія.

Если обѣ разсматриваемыя кривыя суть параболы, то, выбирая для каждой изъ нихъ новую систему координатъ такъ, чтобы оси ординатъ были параллельныя между собою касательныя, а оси абсциссъ проходящія черезъ ихъ точки прикосновенія діаметры (см. стр. 146—150), дадимъ уравненіямъ (1) видъ

$$y'^2=2p_1x' \qquad \text{и} \qquad y''^2=2p_2x''.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{y''^2}{y'^2}=\frac{p_2x''}{p_1x'}.$$

Называя же черезъ ϱ_1 и ϱ_2 длины двухъ прямыхъ, проведенныхъ въ одномъ и томъ же направленіи изъ началъ координатъ до пересѣченія съ кривыми, будемъ имѣть

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

вслѣдствіе чего предыдущая пропорція обращается въ

$$\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}=\frac{p_2\varrho_2}{p_1\varrho_1}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{p_2}{p_1}=\text{пост.},$$

что и доказываетъ, что параболы подобны и подобно расположены.

Изъ всего сказаннаго видимъ, что необходимымъ и вполнѣ достаточнымъ условіемъ, чтобы двѣ какія бы ни было линіи второго порядка, отнесенныя къ одной и той же прямолинейной системѣ координатъ, были подобны и подобно расположены, служитъ пропорціональность въ ихъ уравненіяхъ коэффиціентовъ трехъ членовъ второго измѣренія.

348. Мы видѣли (см. стр. 109), что уравненіе, которое получимъ, приравнявши нулю сумму трехъ членовъ второго измѣренія въ уравненіи кривой второго порядка, выражаетъ совокупность двухъ пря-

мыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ), встрѣчающихъ эту кривую въ безконечности. Принимая во вниманіе указанное сейчасъ условіе, мы заключаемъ, что для двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ кривыхъ эти прямыя однѣ и тѣ же и, наоборотъ, тождественность этихъ прямыхъ есть достаточное условіе для того, чтобы кривыя были подобны и подобно расположены.

Слѣдовательно, можно сказать, что подобными и подобно расположенными кривыми второго порядка называются такія, которыя имѣютъ общія (дѣйствительныя или мнимыя) безконечно удаленныя точки.

Сказанное приводитъ также къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Всякіе два круга суть линіи подобныя и подобно расположенныя.

Два эллипса подобны и подобно расположены, когда ихъ оси пропорціональны и соотвѣтственно параллельны.

Двѣ гиперболы подобны и подобно расположены, когда ихъ ассимптоты и дѣйствительныя оси параллельны.

Всякія двѣ параболы подобны и подобно расположены, если только оси ихъ параллельны и одинаково направлены.

Эксцентриситеты подобныхъ кривыхъ равны.

349. Если двѣ кривыя (1) подобны, но не подобно расположены, то, повернувши систему координатъ на постоянный уголъ, который составляютъ радіусы векторы, проведенные изъ двухъ центровъ подобія къ двумъ какимъ-нибудь соотвѣтственнымъ точкамъ кривыхъ, мы преобразуемъ уравненіе второй кривой въ

$$A_3x^2 + B_3xy + C_3y^2 + D_3x + E_3y + F_3 = 0,$$

причемъ должно быть

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_3}{C_1} = k,$$

откуда

$$A_3 = kA_1, \quad B_3 = kB_1, \quad C_3 = kC_1.$$

Но, какъ извѣстно (см. ст. 144), при названномъ преобразованіи координатъ между коэффиціентами двухъ уравненій второй кривой должны имѣть мѣсто соотношенія

$$A_2 + C_2 - B_2\cos\omega = A_3 + C_3 - B_3\cos\omega$$

и

$$B_2^2 - 4A_2C_2 = B_3^2 - 4A_3C_3,$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ.

Подставивъ сюда предыдущія выраженія коэффиціентовъ A_3, B_3, C_3 получимъ

$$A_2 + C_2 - B_2\cos\omega = k(A_1 + C_1 - B_1\cos\omega)$$

и

$$B_2^2 - 4A_2C_2 = k^2(B_1^2 - 4A_1C_1),$$

откуда, исключивъ k, получимъ соотношеніе

$$\frac{B_2^2 - 4A_2C_2}{(A_2 + C_2 - B_2\cos\omega)^2} = \frac{B_1^2 - 4A_1C_1}{(A_1 + C_1 - B_1\cos\omega)^2},$$

имѣющее мѣсто, когда кривыя (1) подобны, хотя бы и не были подобно расположены.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

СОКРАЩЕННЫЙ СПОСОБЪ ВЪ ПРИМѢНЕНІИ КЪ ЛИНІЯМЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Пучки линій второго порядка.

350. Пусть уравненія двухъ какихъ-нибудь линій второго порядка относительно прямолинейной системы координатъ будутъ

$$S_1 = 0 \quad \text{и} \quad S_2 = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 74), уравненіе

$$S_1 - kS_2 = 0, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (2)$$

при данномъ опредѣленномъ k, выражаетъ линію того же порядка, проходящую черезъ всѣ точки (дѣйствительныя или мнимыя), общія даннымъ линіямъ. Если же k есть величина неопредѣленная, то этимъ уравненіемъ выражается пучекъ линій второго порядка, имѣющихъ четыре общія точки.

Всякая линія второго порядка, принадлежащая данному пучку, вполнѣ опредѣляется одною ея точкою, ибо по координатамъ этой точки постоянное k въ уравненіи пучка можетъ быть найдено.

Если положимъ, что S_1' и S_2' суть результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ данной точки, то уравненіе кривой, принадлежащей пучку (2) и проходящей черезъ эту точку, очевидно, будетъ

$$S_1 S_2' - S_2 S_1' = 0 .$$

Въ частномъ случаѣ одно или оба уравненія (1) могутъ выражать совокупности прямыхъ.

Если положимъ, напримѣръ, что многочленъ S_2 разлагается на два множителя U_2 и V_2 первой степени, то уравненіе (2) обращается въ

$$S_1 - kU_2 V_2 = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

и выражаетъ пучекъ кривыхъ второго порядка, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія кривой $S_1 = 0$ съ прямыми $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$.

Если и многочленъ S_1 разлагается на два множителя первой степени U_1 и V_1, то уравненіе (2) обращается въ

$$U_1 V_1 - kU_2 V_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

и выражаетъ всѣ возможныя кривыя второго порядка, проходящія через четыре дѣйствительныя точки пересѣченія прямыхъ $U_1 = 0$ и $V_1 = 0$ съ прямыми $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$, которыя представляютъ, слѣдовательно, двѣ пары противоположныхъ сторонъ четыреугольника, вписаннаго въ каждую изъ этихъ кривыхъ.

Такъ какъ кривыя или прямыя линіи, черезъ точки пересѣченія которыхъ проходитъ данная кривая, могутъ быть взяты произвольно, то въ видахъ (2), (3) и (4) можетъ быть представлено уравненіе всякой кривой второго порядка.

351. Если одна изъ прямыхъ

$$U_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad V_2 = 0$$

есть касательная къ кривой, выражаемой уравненіемъ

$$S_1 = 0,$$

то очевидно, что уравненіе (3) будетъ представлять кривыя, касающіяся этой прямой въ той же точкѣ, какова бы ни была другая прямая.

Слѣдовательно, полагая, что намъ дана линія второго порядка, выражаемая уравненіемъ $S = 0$, и допуская, что $T = 0$ есть уравненіе касательной къ ней въ данной точкѣ (x_1, y_1), мы будемъ имѣть въ уравненіи

$$S - T(mx + ny + p) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5$$

общее выраженіе всѣхъ линій второго порядка, имѣющихъ съ данною въ этой точкѣ соприкосновеніе перваго порядка.

Если случится, что прямая

$$mx + ny + p = 0$$

проходитъ черезъ точку (x_1, y_1), то, какъ было показано выше (см. стр. 256), соприкосновеніе будетъ второго порядка.

Слѣдовательно, уравненіе

$$S - T(mx + ny - mx_1 - ny_1) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

при неопредѣленныхъ m и n, выражаетъ всѣ возможныя кривыя второго порядка, имѣющія съ кривой $S = 0$ въ точкѣ (x_1, y_1) соприкосновеніе второго порядка.

Постоянныя m и n могутъ быть опредѣляемы по какимъ-нибудь дополнительнымъ условіямъ, напр. по условію, чтобы кривая, выражаемая уравненіемъ (6), была кругъ. Такимъ образомъ получается уравненіе соприкасающагося круга.

Если прямая

$$mx + ny + p = 0$$

сама есть касательная въ точкѣ (x_1, y_1), такъ что уравненіе это отличается отъ уравненія $T = 0$ только произвольнымъ постояннымъ множителемъ, то уравненіе (5) обращается въ

$$S - kT^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

и выражаетъ пучекъ кривыхъ второго порядка, имѣющихъ въ точкѣ (x_1, y_1) соприкосновеніе третьяго порядка.

352. Если прямыя $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$ совпадаютъ, то и точки ихъ пересѣченія съ кривой $S_1 = 0$ совпадаютъ между собою по двѣ, такъ что уравненіе (3) представляетъ въ этомъ случаѣ кривыя второго порядка, соприкасающіяся съ кривой $S_1 = 0$ въ двухъ точкахъ.

Уравненіе

$$S - kU^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

есть, слѣдовательно, общее выраженіе пучка линій второго порядка, имѣющихъ двойное соприкосновеніе.

Точки прикосновенія всѣхъ этихъ линій суть двѣ точки, въ которыхъ кривая $S = 0$ пересѣкается прямой $U = 0$. Понятно, что онѣ могутъ быть какъ дѣйствительныя, такъ и мнимыя. Въ томъ случаѣ, когда онѣ совпадаютъ, мы возвращаемся къ уравненію (7) линій, имѣющихъ соприкосновеніе третьяго порядка.

Если положимъ, что

$$T_1 = 0 \quad \text{и} \quad T_2 = 0$$

суть уравненія касательныхъ къ кривой $S = 0$ въ точкахъ ея пересѣченія съ прямою $U = 0$, то уравненіе (8), при неопредѣленномъ k, равнозначуще съ

$$T_1 T_2 - k U^2 = 0.$$

353. Можетъ случиться, что одна изъ прямыхъ, уравненія которыхъ входятъ въ составъ уравненій (3) или (4), есть безконечно удаленная.

Припоминая, что уравненіе первой степени

$$mx + ny + p = 0$$

представляетъ такую прямую, когда въ немъ $m = 0$ и $n = 0$ (см. стр. 4‥) мы можемъ заключить, что уравненіе

$$S - kU = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (‥$$

гдѣ U какой угодно многочленъ первой степени, выражаетъ всевозможныя кривыя, имѣющія общія съ кривой $S = 0$ безконечно удаленныя точки. Это суть, какъ мы видѣли (см. стр. 265), кривыя подобныя и подобно расположенныя. Очевидно, что въ уравненіяхъ ихъ коэффиціенты членовъ второго измѣренія одни и тѣ же.

Если прямая $U = 0$ сама есть безконечно удаленная, то уравненіе (9) дѣлается равнозначущимъ съ (8) и обращается въ

$$S - k = 0.$$

Такое уравненіе выражаетъ, слѣдовательно, кривыя второго порядка, имѣющія съ кривой $S = 0$ двойное соприкосновеніе въ безконечности. Безконечно удаленныя точки прикосновенія могутъ быть, конечно, какъ дѣйствительными, такъ и мнимыми.

Такъ какъ въ послѣднемъ уравненіи, при различныхъ значеніяхъ k, коэффиціенты всѣхъ членовъ, кромѣ постояннаго, одни и тѣ же, то выражаемыя имъ кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же центръ. Слѣдовательно, эти кривыя не только суть подобныя и подобно расположенныя, но и концентрическія. На такія кривыя нужно поэтому смотрѣть, какъ на соприкасающіяся въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ. Такъ всякіе два концентрическіе круга соприкасаются между собою въ циклическихъ безконечно удаленныхъ точкахъ.

На основаніи сказаннаго уравненіе

$$UV - k = 0$$

выражаетъ всякую линію, касающуюся въ безконечности прямыхъ $U = 0$ и $V = 0$, т. е. всѣ гиперболы, для которыхъ эти прямыя суть ассимптоты.

Частный случай этого уравненія представляетъ уравненіе $xy = m^2$ гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ.

Если въ уравненіи (9) положимъ $S = V^2$, то оно обратится въ

$$V^2 - kU = 0$$

и будетъ выражать, при всякомъ k, кривую, касающуюся безконечно удаленной прямой, т. е. параболу. Частный случай этого уравненія представляетъ простѣйшее уравненіе параболы $y^2 = 2px$.

354. Извѣстно, что, подставляя въ многочленъ U, составляющій первую часть уравненія прямой $U = 0$, координаты различныхъ точекъ

плоскости, мы будемъ получать величины, пропорціональныя разстояніямъ этихъ точекъ отъ этой прямой. Имѣя это въ виду, мы, изъ возможности представить уравненіе всякой линіи второго порядка въ видѣ

$$U_1 V_1 - k U_2 V_2 = 0\,,$$

заключаемъ слѣдующее:

Произведеніе разстояній всякой точки кривой второго порядка отъ двухъ противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ эту кривую четыреугольника находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній той же точки отъ двухъ другихъ противоположныхъ сторонъ этого четыреугольника.

Подобнымъ же образомъ уравненію

$$T_1 T_2 - k U^2 = 0\,,$$

представляющему какую угодно кривую второго порядка, касающуюся прямыхъ $T_1 = 0$ и $T_2 = 0$ въ точкахъ ихъ пересѣченія съ прямою $U = 0$, можно дать слѣдующее геометрическое истолкованіе:

Произведеніе разстояній всякой точки кривой второго порядка отъ двухъ ея касательныхъ находится въ постоянномъ отношеніи къ квадрату разстоянія этой точки отъ хорды ихъ прикосновенія.

355. Всякая линія второго порядка имѣетъ двойное соприкосновеніе съ безчисленнымъ множествомъ круговъ, центры которыхъ находятся на ея осяхъ.

Это показываетъ, что уравненіе какой угодно линіи второго порядка можетъ быть представлено въ видѣ

$$C - k U^2 = 0\,,$$

гдѣ C означаетъ многочленъ, составляющій первую часть уравненія круга.

Припоминая, что результатъ подстановки въ такой многочленъ координатъ какой-нибудь точки плоскости означаетъ квадратъ длины касательной къ кругу изъ этой точки (см. стр. 156), мы выводимъ изъ послѣдняго уравненія слѣдующее заключеніе:

Всякая линія второго порядка есть геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ данному кругу находятся въ постоянномъ отношеніи къ разстояніямъ ихъ отъ данной прямой.

Это есть обобщеніе свойства кривыхъ второго порядка относительно фокусовъ, ибо очевидно, что въ случаѣ, когда радіусъ круга $C = 0$ равняется нулю, этотъ кругъ обратится въ фокусъ кривой, а прямая $U = 0$ будетъ ея директрисой.

356. Положимъ, что намъ даны два пучка прямыхъ линій

$$U_1 - k_1 V_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_2 - k_2 V_2 = 0\,, \;.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

связанные проективнымъ соотвѣтствіемъ (см. стр. 98—100), и требуется найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей этихъ пучковъ.

Мы видѣли, что зависимость между величинами k_1 и k_2, опредѣляющими въ разсматриваемыхъ пучкахъ соотвѣтственные лучи, выражается уравненіемъ

$$Ak_1k_2 + Bk_1 + Ck_2 + D = 0.$$

Уравненіе искомаго геометрическаго мѣста получается, слѣдовательно, какъ результатъ исключенія неопредѣленныхъ постоянныхъ k_1 и k_2 изъ этого послѣдняго уравненія и уравненій (10) пучковъ.

Это будетъ, очевидно, уравненіе

$$AU_1U_2 + BU_1V_2 + CU_2V_1 + DV_1V_2 = 0.$$

Такъ какъ оно второй степени, то заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть линія второго порядка. При неопредѣленныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ A, B, C, D и при произвольномъ выборѣ центровъ пучковъ, т. е. точекъ пересѣченія прямыхъ $U_1 = 0$ и $V_1 = 0$, а также прямыхъ $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$, это уравненіе можетъ, очевидно, выражать какую угодно кривую второго порядка.

Итакъ, всякая линія второго порядка можетъ быть опредѣляема какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ проективныхъ пучковъ.

На основаніи этого опредѣленія линіи второго порядка разсматриваются въ Проективной Геометріи.

357. Положимъ, что стороны треугольника должны проходить черезъ три данныя точки и двѣ его вершины должны находиться на двухъ данныхъ прямыхъ. Такъ какъ этими условіями треугольникъ не опредѣляется вполнѣ, то геометрическимъ мѣстомъ третьей вершины будетъ нѣкоторая линія.

Легко видѣть, что, въ силу самыхъ условій, стороны треугольника, пересѣкающіяся въ третьей вершинѣ, образуютъ при своемъ перемѣщеніи два проективно-соотвѣтственные пучка. Поэтому заключаемъ изъ сказаннаго, что геометрическое мѣсто этой вершины есть, вообще говоря, линія второго порядка.

Выше были указаны тѣ частные случаи, когда это геометрическое мѣсто есть прямая линія (см. стр. 59—62).

§ 2. Сѣти линій второго порядка.

358. Если намъ даны три линіи второго порядка, уравненія которыхъ суть:

$$S_1 = 0\,,\quad S_2 = 0\,,\quad S_3 = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

то уравненіе

$$S_1 - kS_2 - lS_3 = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

въ которомъ k и l суть нѣкоторыя опредѣленныя постоянныя величины, выражаетъ также нѣкоторую линію второго порядка.

Если же k и l имѣютъ неопредѣленныя значенія, то послѣднимъ уравненіемъ выражается цѣлая система линій, называемая *сѣтью* кривыхъ второго порядка.

Обозначая многочленъ $S_1 - kS_2$ чрезъ T, мы можемъ представить уравненіе (2) въ видѣ

$$T - lS_3 = 0\,.$$

Отсюда видимъ, что сѣти, выражаемой этимъ уравненіемъ, принадлежитъ всякая кривая второго порядка, проходящая черезъ точки пересѣченія одной изъ кривыхъ (1) съ какою бы ни было кривою, проходящею черезъ точки пересѣченія двухъ другихъ.

359. Если кривая, выражаемая уравненіемъ (2), проходитъ черезъ данную точку (x', y'), то, называя чрезъ S_1', S_2', S_3' результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ этой точки, будемъ имѣть

$$S_1' - kS_2' - lS_3' = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого уравненію (2) можно дать видъ

$$(S_1S_3' - S_3S_1') - k(S_2S_3' - S_3S_2') = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

и такъ какъ оно содержитъ только одно неопредѣленное постоянное, то выражаетъ пучекъ кривыхъ.

Итакъ, всѣ кривыя второго порядка, принадлежащія сѣти и проходящія черезъ данную точку, составляютъ пучекъ.

Если кривая (2) должна проходить черезъ двѣ данныя точки, то, обозначая чрезъ S_1'', S_2'', S_3'' результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ второй изъ этихъ точекъ, мы изъ условій

$$S_1' - kS_2' - lS_3' = 0$$

и

$$S_1'' - kS_2'' - lS_3'' = 0$$

найдемъ для каждой изъ величинъ k и l единственное значеніе.

Отсюда заключаемъ, что черезъ двѣ данныя точки проходитъ, вообще говоря, единственная и опредѣленная линія второго порядка, принадлежащая данной сѣти.

Уравненіе этой линіи будетъ, очевидно,

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ S_1', & S_2', & S_3' \\ S_1'', & S_2'', & S_3'' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$S_1(S_2'S_3'' - S_3'S_2'') + S_2(S_3'S_1'' - S_1'S_3'') + S_3(S_1'S_2'' - S_2'S_1'') = 0.$$

Оно не будетъ имѣть опредѣленнаго геометрическаго значенія тольк тогда, когда каждая изъ разностей

$$(S_2'S_3'' - S_3'S_2''),\quad (S_3'S_1'' - S_1'S_3''),\quad (S_1'S_2'' - S_2'S_1'')$$

равняется нулю.

Изъ уравненія (3) видно, что это можетъ имѣть мѣсто только тогда когда одна изъ данныхъ точекъ принадлежитъ къ числу точекъ пересѣченія кривыхъ, проходящихъ черезъ другую.

360. Умножая уравненіе (2) на какое-нибудь постоянное m и обозначая $-mk$ черезъ n, $a-ml$ черезъ p, мы можемъ дать ему слѣдующій видъ:

$$mS_1 + nS_2 + pS_3 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

Обратимъ особенное вниманіе на нѣкоторые частные виды этог уравненія.

Если положимъ $S_1 = UV$, $S_2 = UW$ и $S_3 = VW$, гдѣ U, V и W суть многочлены первой степени, то будемъ имѣть

$$mUV + nUW + pVW = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (5$$

Этимъ уравненіемъ выражается, очевидно, всякая кривая второг порядка, проходящая черезъ вершины треугольника, стороны котораго суть:

$$U = 0,\quad V = 0,\quad W = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Возьмемъ на кривой (5) двѣ точки (x', y') и (x'', y'') и пусть результаты подстановки координатъ этихъ точекъ въ многочлены U, V, W будутъ послѣдовательно U', V', W' и U'', V'', W''.

Въ такомъ случаѣ уравненіе

$$m(U' - U'')(V - V'') + n(U - U'')(W - W') + p(V - V')(W - W'') = \\ = mUV + nUW + pVW$$

будетъ представлять прямую, проходящую чрезъ эти двѣ точки, так какъ оно первой степени и удовлетворяется ихъ координатами.

Если положимъ, что точки (x', y') и (x'', y'') совпадаютъ и, слѣдовательно,

$$U' = U'', \quad V' = V'', \quad W' = W'',$$

то это уравненіе, по раскрытіи скобокъ и сокращеніи, обратится въ

$$m(U'V' + V'U') + n(U'W' + W'U') + p(V'W' + W'V') = 0$$

или

$$U'(mV + nW) + V'(mU + pW) + W'(nU + pV) = 0$$

и будетъ выражать касательную къ кривой (5) въ точкѣ (x', y').

Когда точка (x', y') совпадаетъ съ точкою пересѣченія какихъ-нибудь двухъ изъ прямыхъ (6), то послѣднее уравненіе обращается въ одно изъ слѣдующихъ:

$$mV + nW = 0, \quad mU + pW = 0, \quad nU + pV = 0. \quad . \; . \; . \; (7)$$

Это суть, слѣдовательно, касательныя къ кривой (5) въ вершинахъ треугольника, образуемаго прямыми (6).

Точка пересѣченія прямой $U = 0$ съ первою изъ этихъ касательныхъ удовлетворяетъ, очевидно, уравненію

$$mnU + mpV + npW = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Этому же уравненію удовлетворяетъ и точка пересѣченія прямой $V = 0$ со второю изъ касательныхъ (7), а также прямой $W = 0$ съ третьей.

Такъ какъ уравненіе (8) первой степени, то заключаемъ, что *точки пересѣченія сторонъ треугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, съ касательными въ противоположныхъ вершинахъ лежатъ на одной прямой.*

361. Прямыя (7), будучи касательными, составляютъ треугольникъ, описанный около кривой (5).

Обозначая первыя части уравненій (7) послѣдовательно черезъ Z_1, Z_2, Z_3, будемъ имѣть тождественно:

$$pZ_1 - nZ_2 = m(pV - nU),$$
$$nZ_2 - mZ_3 = p(nW - mV),$$
$$mZ_3 - pZ_1 = n(mU - pW).$$

Отсюда видимъ, что уравненія

$$pV - nU = 0, \quad nW - mV = 0, \quad mU - pW = 0$$

выражаютъ три прямыя, соединяющія точки пересѣченія касательныхъ (7) съ ихъ точками прикосновенія.

*

Изъ того, что сумма произведеній первыхъ частей этихъ уравненій на коэффиціенты m, p, n тождественно равняется нулю, заключаемъ, что прямыя эти проходятъ черезъ одну точку.

Итакъ, *прямыя, соединяющія вершины треугольника, описаннаго около кривой второго порядка, съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

362. Положимъ теперь, что въ уравненіи (4)

$$S_1 = U^2, \quad S_2 = V^2, \quad S_3 = W^2,$$

гдѣ U, V и W суть, какъ и прежде, многочлены первой степени.

Въ такомъ случаѣ это уравненіе, принимая видъ

$$mU^2 + nV^2 + pW^2 = 0,$$

будетъ имѣть дѣйствительное значеніе только тогда, когда два изъ коэффиціентовъ m, n и p имѣютъ знакъ, противоположный знаку третьяго. Вслѣдствіе этого, не нарушая общности значенія этого уравненія, мы можемъ разсматривать его въ видѣ

$$mU^2 + nV^2 - pW^2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

гдѣ m, n, p суть величины положительныя.

Такъ какъ мы можемъ представить его въ видѣ

$$pW^2 - nV^2 = mU^2$$

или

$$(W\sqrt{p} + V\sqrt{n})(W\sqrt{p} - V\sqrt{n}) = mU^2,$$

то заключаемъ, что выражаемая имъ кривая касается прямыхъ

$$W\sqrt{p} + V\sqrt{n} = 0 \qquad \text{и} \qquad W\sqrt{p} - V\sqrt{n} = 0$$

въ точкахъ ихъ пересѣченія съ прямою $U = 0$

Это значитъ, что послѣдняя прямая, будучи хордою прикосновенія, есть поляра точки пересѣченія двухъ первыхъ, которая есть въ то же время точка пересѣченія прямыхъ

$$V = 0 \qquad \text{и} \qquad W = 0.$$

Такимъ же точно образомъ, представивъ уравненіе (9) въ видѣ

$$pW^2 - mU^2 = nV^2$$

или

$$(W\sqrt{p} + U\sqrt{m})(W\sqrt{p} - U\sqrt{m}) = nV^2,$$

убѣждаемся, что прямая $V = 0$ есть поляра точки пересѣченія прямыхъ $U = 0$ и $W = 0$.

Отсюда же заключаемъ, что и прямая $W=0$ должна быть полярою точки пересѣченія прямыхъ $U=0$ и $V=0$.

Итакъ, треугольникъ, стороны котораго суть $U=0$, $V=0$. $W=0$, есть полярный относительно кривой (9).

При неопредѣленныхъ коэффиціентахъ m, n, p уравненіе (9) выражаетъ, слѣдовательно, сѣть линій втораго порядка, имѣющихъ общій полярный треугольникъ.

363. Въ справедливости этого заключенія можно убѣдиться еще слѣдующимъ образомъ.

Если положимъ, что (x', y') и (x'', y'') суть двѣ точки, лежащія на кривой (9), то будемъ имѣть, что уравненіе

$$m(U-U')(U-U'')+n(V-V')(V-V'')-p(W-W')(W-W'')=$$
$$=mU^2+nV^2-pW^2,$$

въ которомъ U', V', W', U'', V'', W'' суть результаты подстановки координатъ этихъ точекъ въ многочлены U, V, W, выражаетъ сѣкущую.

Въ предположеніи же

$$U'=U''; \quad V'=V'', \quad W'=W'',$$

что соотвѣтствуетъ совпаденію точекъ (x', y') и (x'', y''), мы получимъ изъ него уравненіе касательной въ кривой (9) въ видѣ

$$mUU'+nVV'-pWW'=0.$$

Но извѣстно, что тѣмъ же самымъ уравненіемъ выражается поляра точки (x', y'), когда эта точка дана какъ-нибудь на плоскости.

При совпаденіи точки (x', y'), съ точкою пересѣченія какихъ-либо двухъ изъ прямыхъ $U=0$, $V=0$, $W=0$, послѣднее уравненіе обращается, очевидно, въ уравненіе третьей прямой, а это и значитъ, что треугольникъ, образуемый этими прямыми, есть полярный.

364. Частные виды уравненія (9) представляютъ уравненія эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ. Слѣдовательно, для всякой центральной кривой второго порядка два сопряженные діаметра и безконечно удаленная прямая составляютъ полярный треугольникъ.

Точно также къ виду уравненія (9) принадлежитъ уравненіе

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+k)^2,$$

выражающее, какъ мы видѣли, относительно прямоугольной системы координатъ всякую линію второго порядка, для которой α и β суть координаты фокуса, а

$$mx+ny+k=0$$

уравненіе соотвѣтствующей директрисы.

Это показываетъ, что директриса и двѣ какія-нибудь перпендикулярныя между собою прямыя, проходящія черезъ фокусъ, составляютъ полярный треугольникъ.

Отсюда заключаемъ, что фокусъ кривой второго порядка характеризуется еще тѣмъ свойствомъ, что всякія двѣ проходящія черезъ него взаимно перпендикулярныя прямыя суть сопряженныя.

§ 3. Теоремы Паскаля и Бріаншона.

365. Посредствомъ сокращеннаго способа доказываются очень просто два замѣчательныя предложенія о кривыхъ второго порядка, извѣстныя подъ названіемъ теоремъ Паскаля и Бріаншона. Первая изъ нихъ выражаетъ свойство всякаго шестиугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка (hexagrammum mysticum), а вторая—свойство шестиугольника, описаннаго около кривой второго порядка.

Положимъ сперва, что намъ даны три линіи второго порядка, имѣющія общую хорду. Пусть $S=0$ будетъ уравненіе одной изъ этихъ линій и $U=0$ уравненіе общей хорды.

Въ такомъ случаѣ уравненія двухъ другихъ кривыхъ могутъ быть представлены въ видѣ

$$S-kUV=0 \quad \text{и} \quad S-lUW=0, \ldots \ldots (1)$$

гдѣ k и l суть нѣкоторыя постоянныя, а V и W два многочлена первой степени. При этомъ очевидно, что уравненія

$$V=0 \quad \text{и} \quad W=0$$

будутъ представлять двѣ другія общія хорды, которыя кривая $S=0$ имѣетъ послѣдовательно съ двумя кривыми (1).

Вычитая уравненіе (1) одно изъ другого, получимъ уравненіе

$$U(kV-lW)=0,$$

выражающее совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія этихъ кривыхъ между собою. Слѣдовательно, уравненіе

$$kV+lW=0$$

выражаетъ общую хорду этихъ двухъ кривыхъ.

Такъ какъ она, очевидно, проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V=0$ и $W=0$, то убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія:

Если три кривыя втораго порядка имѣютъ общую хорду, то три другія общія хорды каждыхъ двухъ изъ этихъ кривыхъ проходятъ черезъ одну точку.

Частный случай этого предложенія представляетъ свойство трехъ круговъ, состоящее въ томъ, что три ихъ радикальныя оси проходятъ черезъ одну точку, ибо всѣ круги имѣютъ, какъ извѣстно, общую безконечно удаленную хорду.

Изъ того же предложенія получается, какъ слѣдствіе, слѣдующее:

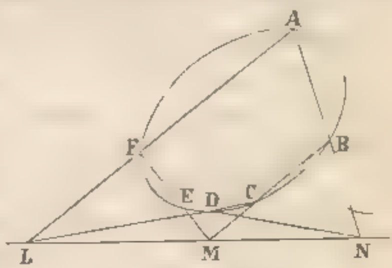
Если черезъ двѣ точки данной линіи второго порядка проходятъ такія же линіи, составляющія пучекъ, то общія хорды каждой изъ этихъ послѣднихъ линій съ данною также составляютъ пучекъ.

366. Теорема Паскаля доказывается также, какъ слѣдствіе изъ предыдущаго предложенія. Она состоитъ въ слѣдующемъ:

Три точки, въ которыхъ пересѣкаются противоположныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, лежатъ на одной прямой.

Положимъ, что въ кривую второго порядка вписанъ шестиугольникъ $ABCDEF$ (фиг. 90). Точки пересѣченія его противоположныхъ сторонъ суть: L, M и N.

Если совокупность двухъ прямыхъ AB и CD будемъ разсматривать, какъ линію второго порядка и точно также совокупность двухъ прямыхъ AF и ED, то точки A и D будутъ общими у этихъ двухъ линій и у кривой, въ которую вписанъ шестиугольникъ. Прямая AD будетъ, слѣдовательно, общею хордою всѣхъ трехъ линій. Въ силу предыдущаго предложенія три другія общія хорды, которыя имѣютъ эти линіи между собою попарно, должны проходить черезъ одну точку. Эти общія хорды суть: BC, EF и LN. Слѣдовательно, точка M пересѣченія двухъ первыхъ лежитъ на третьей, что и доказываетъ теорему.



Фиг. 90.

367. Теорема Паскаля даетъ весьма простой способъ построенія точекъ линіи второго порядка въ какомъ угодно числѣ, когда извѣстны пять ея точекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что даны пять точекъ: A, B, C, D и E (фиг. 90). Проведемъ черезъ точку A въ произвольномъ направленіи прямую до встрѣчи въ точкѣ L съ прямою CD. Затѣмъ соединимъ прямою линіей эту точку съ точкою N пересѣченія прямыхъ AB и DE и найдемъ точку M ея пересѣченія съ прямою BC. Проведя, наконецъ,

прямую через точки M и E, получимъ при пересѣченіи ея съ прямою AL, шестую точку F линіи второго порядка, проходящей черезъ пять данныхъ точекъ.

Измѣняя направленіе прямой AL, можно такимъ же точно образомъ построить сколько угодно точекъ той же кривой и притомъ сколь угодно близкихъ между собою.

368. Свойство, выражаемое теоремой Паскаля, не зависитъ отъ расположенія на кривой шести точекъ, составляющихъ вершины шестиугольника. Слѣдовательно, она имѣетъ мѣсто и тогда, когда нѣкоторыя изъ этихъ точекъ совпадаютъ. Въ такихъ случаяхъ стороны шестиугольника, соединяющія эти точки, обращаются въ касательныя.

Отсюда заключаемъ, что стороны четыреугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, и двѣ касательныя въ его вершинахъ составляютъ шестиугольникъ, вписанный въ эту кривую. Поэтому, на основаніи теоремы Паскаля, приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, и двѣ точки пересѣченія касательныхъ въ противоположныхъ вершинахъ этого четыреугольника лежатъ на одной прямой.

Точно также частный случай теоремы Паскаля представляетъ доказанное выше предложеніе о точкахъ пересѣченія сторонъ треугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, съ касательными въ противоположныхъ вершинахъ (см. стр. 275).

369. Положимъ теперь, что намъ даны три кривыя второго порядка, имѣющія двойное соприкосновеніе съ четвертой. Пусть $S=0$ будетъ уравненіе послѣдней изъ этихъ кривыхъ, а $U=0$, $V=0$, $W=0$ уравненія трехъ хордъ прикосновенія.

Въ такомъ случаѣ уравненія трехъ первыхъ кривыхъ будутъ

$$S-kU^2=0,\quad S-lV^2=0,\quad S-mW^2=0 \ldots\ldots (2)$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получимъ уравненіе

$$kU^2-lV^2=0,$$

выражающее совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія первой и второй кривой, т. е. совокупность двухъ общихъ хордъ этихъ кривыхъ.

Точно такъ же находимъ, что уравненія

$$lV^2-mW^2=0 \qquad \text{и} \qquad mW^2-kU^2=0$$

выражаютъ двѣ пары общихъ хордъ третьей изъ кривыхъ (2) съ двумя первыми.

Такимъ образомъ, всего будемъ имѣть шесть общихъ хордъ, уравненія которыхъ, взятыя въ отдѣльности, могутъ быть соединены въ слѣдующія четыре группы:

1) $U\sqrt{k}-V\sqrt{l}=0, \quad V\sqrt{l}-W\sqrt{m}=0, \quad W\sqrt{m}-U\sqrt{k}=0,$

2) $U\sqrt{k}-V\sqrt{l}=0, \quad V\sqrt{l}+W\sqrt{m}=0, \quad W\sqrt{m}+U\sqrt{k}=0,$

3) $U\sqrt{k}+V\sqrt{l}=0, \quad V\sqrt{l}-W\sqrt{m}=0, \quad W\sqrt{m}+U\sqrt{k}=0,$

4) $U\sqrt{k}+V\sqrt{l}=0, \quad V\sqrt{l}+W\sqrt{m}=0, \quad W\sqrt{m}-U\sqrt{k}=0,$

Въ каждой изъ этихъ группъ находятся уравненія трехъ хордъ, принадлежащихъ каждымъ двумъ изъ кривыхъ (2) и, какъ показываетъ самый видъ уравненій, эти три хорды проходятъ черезъ одну точку.

Такимъ образомъ, получается слѣдующее предложеніе:

Если три линіи второго порядка имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертой, то общія хорды этихъ трехъ линій пересѣкаютія по три въ одной точкѣ.

370. Отсюда, какъ слѣдствіе, получается теорема Бріаншона, состоящая въ слѣдующемъ:

Прямыя линіи, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, описаннаго около кривой второго порядка, проходятъ черезъ одну точку.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая совокупность двухъ противоположныхъ сторонъ шестиугольника, какъ линію второго порядка, имѣющую съ данной двойное соприкосновеніе, будемъ имѣть, что всѣ шесть сторонъ представляютъ три такихъ линіи. Слѣдовательно, прямыя, соединяющія противоположныя вершины, будучи общими хордами каждыхъ двухъ изъ этихъ линій, должны проходить черезъ одну точку.

371. Теорема Бріаншона, указывая на зависимость между шестью какими бы ни было касательными къ кривой второго порядка, даетъ способъ построенія касательныхъ къ кривой въ какомъ угодно числѣ, когда дано пять касательныхъ. Это построеніе аналогично съ построеніемъ точекъ кривой на основаніи теоремы Паскаля.

Въ случаѣ, когда двѣ стороны описаннаго шестиугольника совпадаютъ, ихъ точка пересѣченія, т. е. одна изъ вершинъ шестиугольника, дѣлается точкою прикосновенія. Вслѣдствіе этого изъ теоремы Бріаншона выводимъ слѣдующее заключеніе:

Двѣ прямыя, соединяющія противоположныя вершины описаннаго около кривой второго порядка четыреугольника, и двѣ прямыя, соединяющія точки прикосновенія противоположныхъ сторонъ этого четыреугольника, сходятся въ одной точкѣ.

Подобнымъ же образомъ, какъ слѣдствіе теоремы Бріаншона, получается доказанное выше предложеніе о прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника, описаннаго около кривой второго порядка, съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ (см. стр. 276).

372. Теорема Бріаншона можетъ быть сама выведена изъ теоремы Паскаля посредствомъ слѣдующихъ соображеній.

Если въ вершинахъ шестиугольника $ABCDEF$ (фиг. 90), вписаннаго въ кривую второго порядка, построимъ касательныя, то получимъ шестиугольникъ, описанный около этой кривой. Оба эти шестиугольника будутъ, очевидно, таковы, что стороны каждаго суть, по отношенію къ кривой, поляры вершинъ другого. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя, соединяющія противоположныя вершины описаннаго шестиугольника, суть поляры точекъ L, M, N пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго. Слѣдовательно, эти три прямыя должны проходить черезъ одну точку, именно черезъ полюсъ прямой LMN.

373. Двѣ какія бы то ни было фигуры, находящіяся между собою въ такой зависимости, что прямыя, принадлежащія одной, суть поляры, относительно какой-либо кривой второго порядка, точекъ, принадлежащихъ другой, называются *взаимными полярами*. Таковы въ приведенныхъ соображеніяхъ вписанный и описанный шестиугольники.

Способъ доказательства, состоящій, подобно предыдущему, въ заключеніи о свойствахъ одной изъ взаимныхъ поляръ по свойствамъ другой, называется *методомъ взаимныхъ поляръ*. Въ сущности онъ представляетъ лишь болѣе конкретную форму примѣненія закона двойственности, о которомъ мы говорили выше (см. стр. 91).

Основываясь на этомъ законѣ, мы могли бы самое аналитическое доказательство теоремы Бріаншона представить совершенно въ такомъ же видѣ, какъ и доказательство теоремы Паскаля, или обратно. Для этого нужно было бы только за элементъ, опредѣляемый координатами, принимать не точку, а прямую линію.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

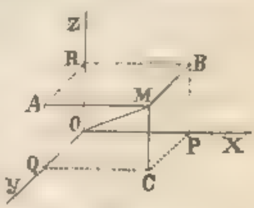
ГЛАВА ПЕРВАЯ

КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНІЯ.

§ 1. Прямолинейныя координаты.

374. Изученіе геометрическихъ формъ или фигуръ, не помѣщающихся на плоскости, при помощи метода координатъ составляетъ второй отдѣлъ Аналитической Геометріи — Геометрію въ пространствѣ. Самое понятіе о координатахъ представляется при этомъ въ болѣе широкомъ или обобщенномъ видѣ, чѣмъ въ первомъ отдѣлѣ — Геометріи на плоскости.

Положимъ, что мы имѣемъ въ пространствѣ прямой триграный уголъ, вершина котораго есть O и ребра OX, OY, OZ (фиг. 91) Три плоскости XOY, XOZ и YOZ, составляющія грани этого угла, будутъ, слѣдовательно, перпендикулярны между собою.



Фиг. 91.

Всякая точка M, имѣющая опредѣленное положеніе внутри этого триграннаго угла, находится на опредѣленныхъ разстояніяхъ отъ его граней. Эти разстоянія суть длины перпендикуляровъ MA, MB, MC, опущенныхъ изъ точки M на плоскости YOZ, XOZ и XOY. Очевидно, что всякое измѣненіе положенія точки M влечетъ за собою измѣненіе по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ разстояній.

Разстоянія эти называются *координатами* точки M. Будучи измѣрены какою-нибудь линейною единицею, они могутъ быть выражены въ числахъ.

Пусть a, b, c будутъ эти числа. Предполагая, что единица мѣры извѣстна, будемъ имѣть

$$MA = a, \quad MB = b, \quad MC = c.$$

375. Три плоскости BMC, AMC и AMB, проходящія черезъ каждые два перпендикуляра, опущенные изъ точки M на грани разсматриваемаго триграннаго угла, очевидно, параллельны этимъ гранямъ.

Поэтому, называя послѣдовательно черезъ P, Q, R точки, въ которы[…] эти плоскости пересѣкаютъ ребра OX, OY, OZ, будемъ имѣть:

$$OP = MA = a, \quad OQ = MB = b, \quad OR = MC = c.$$

Это показываетъ, что координаты точки M можно опредѣлять, как[…] отрѣзки OP, OQ, OR, отсѣкаемые на ребрахъ разсматриваемаго т[…]граннаго угла плоскостями, проходящими черезъ точку M параллель[…] его гранямъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда видно, что числовыми вел[…]чинами a, b, c положеніе точки M внутри этого триграннаго угл[…] опредѣляется вполнѣ, ибо по этимъ величинамъ точка M можетъ быт[…] построена.

Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ на прямыхъ OX, OY, OZ отрѣзки OP[…] OQ, OR, содержащіе послѣдовательно a, b, c единицъ длины, [.] проведя черезъ точки P, Q, R плоскости, параллельныя гранямъ YOZ[…] XOZ, XOY, получимъ точку M при пересѣченіи этихъ трехъ пло[…]костей.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ также, что отрѣзки OP, PC и CM, со[…]ставляя ломаную линію, соединяющую вершину триграннаго угла съ точкою M, равняются координатамъ этой точки. Вслѣдствіе этого, для построенія точки M по даннымъ числовымъ величинамъ координатъ a[…] b, c, можно поступать слѣдующимъ образомъ.

На прямой OX откладываемъ длину OP, равную a единицъ; затѣмъ проводимъ изъ точки P прямую PC, параллельную OY и имѣющую длину b единицъ, и изъ точки C прямую CM, параллельную OZ и заключающую въ себѣ c единицъ.

376. Неопредѣленныя координаты обозначаютъ обыкновенно буквами x, y, z. Для точки M, координаты которой выражаются въ данныхъ единицахъ черезъ a, b, c, будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

Прямыя OX, OY, OZ называются *осями координатъ* и, согласно указанному сейчасъ обозначенію самихъ координатъ, ихъ различаютъ наименованіями оси x-овъ, оси y-овъ и оси z-овъ.

Плоскости XOY, XOZ, YOZ называются *плоскостями координатъ*, а точка O *началомъ координатъ*.

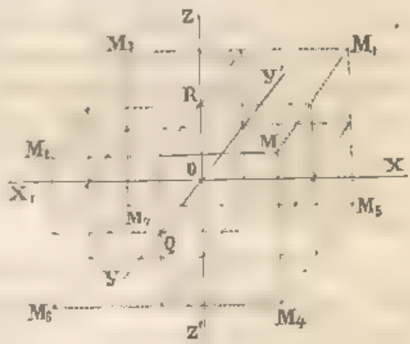
Оси и плоскости координатъ въ совокупности составляютъ *систему координатъ*, именуемую *прямолинейною*, такъ какъ всѣ три координаты, опредѣляющія точку, суть прямолинейные отрѣзки.

377. Плоскости координатъ, будучи продолжены неопредѣленно, образуютъ восемь трегранныхъ угловъ.

Эти углы суть $O(XYZ)$, $O(X'YZ)$, $O(XY'Z)$, $O(X'Y'Z)$, $O(XYZ')$, $O(XY'Z')$, $O(X'YZ')$, $O(X'Y'Z')$ (фиг. 92).

Сказанное выше объ опредѣленіи положенія точки внутри одного такого угла примѣняется, очевидно, къ каждому изъ остальныхъ. Вслѣдствіе этого одними и тѣми же числовыми значеніями координатъ

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$



Фиг. 92.

опредѣляется въ пространствѣ восемь различныхъ точекъ: M, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, по одной въ каждомъ изъ названныхъ угловъ. Чтобы различать эти точки, достаточно координатамъ придавать значенія алгебраическихъ величинъ, т. е. могущихъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными, сообразно общему правилу знаковъ, значеніе котораго указано было въ Геометріи на плоскости.

Если положимъ, что плоскость XOY горизонтальна, а плоскость XOZ вертикальна и совпадаетъ съ плоскостью чертежа, то, условившись принимать за положительныя разстоянія, отмѣриваемыя по оси x-овъ вправо, по оси y-овъ впередъ и по оси z-овъ кверху, будемъ имѣть для координатъ названныхъ восьми точекъ слѣдующія алгебраическія значенія:

для точки M	$x = +a$,	$y = +b$,	$z = +c$
„ „ M_1	$x = +a$,	$y = -b$,	$z = +c$
„ „ M_2	$x = -a$,	$y = +b$,	$z = +c$
„ „ M_3	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = +c$
„ „ M_4	$x = +a$,	$y = +b$,	$z = -c$
„ „ M_5	$x = +a$,	$y = -b$,	$z = -c$
„ „ M_6	$x = -a$,	$y = +b$,	$z = -c$
„ „ M_7	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = -c$.

Между этими точками не будетъ, слѣдовательно, имѣющихъ одинаковыя координаты.

Такимъ образомъ видимъ, что при условіи, чтобы координаты разсматривались, какъ величины алгебраическія, каждой точкѣ пространства будутъ соотвѣтствовать три особыя координаты, значеніями которыхъ положеніе этой точки опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Уголъ $O(XYZ)$, внутри котораго всѣ точки имѣютъ всѣ три положительныя координаты, принято называть *нормальнымъ*.

378. Въ предыдущемъ предполагалось, что нормальный уголъ прямой, т. е. что всѣ три плоскости координатъ перпендикулярны между собою. Легко видѣть, однако, что это предположеніе не существенно и не необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что три координаты точки M суть длины трехъ отрѣзковъ OP, OQ, OR (фиг. 91), отсѣкаемыхъ на осяхъ координатъ плоскостями, проведенными черезъ эту точку параллельно плоскостямъ координатъ. Такое опредѣленіе координатъ имѣетъ мѣсто и тогда, когда перпендикулярности между плоскостями координатъ не существуетъ, причемъ все сказанное объ опредѣляемости точекъ пространства алгебраическими значеніями координатъ сохраняетъ свою силу.

Если всѣ три плоскости координатъ перпендикулярны между собою, то система координатъ называется *прямоугольною*. Въ противномъ случаѣ ее называютъ *косоугольною*.

379. Условію $x = a$, гдѣ a есть алгебраическая величина, удовлетворяютъ, очевидно, всѣ точки, лежащія въ плоскости, которая, будучи параллельна плоскости YOZ, пересѣкаетъ ось OX въ точкѣ P, отстоящей отъ начала координатъ на разстояніе a (по ту или по другую отъ него сторону, смотря по знаку этой алгебраической величины). Подобное же значеніе имѣютъ и условія $y = b$ и $z = c$, разсматриваемыя въ отдѣльности.

Понятно, что какими-нибудь двумя изъ этихъ трехъ условій выдѣляются изъ всѣхъ точекъ пространства тѣ, которыя лежатъ одновременно на двухъ плоскостяхъ, параллельныхъ двумъ плоскостямъ координатъ, т. е. точки прямой параллельной одной изъ осей координатъ. Понятно также, что всѣми тремя этими условіями, взятыми совмѣстно, должна опредѣляться единственная точка пересѣченія трехъ плоскостей.

Въ частности условія

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

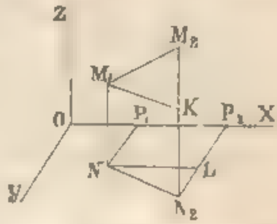
взятыя всѣ вмѣстѣ, опредѣляютъ начало координатъ. Взятыя по два, они опредѣляютъ оси координатъ, а каждое въ отдѣльности одну изъ плоскостей координатъ.

380. При опредѣленной и извѣстной системѣ координатъ точка, которой координаты $x = a$, $y = b$, $z = c$ даны, должна считаться извѣстною и называется сокращенно точкою (a, b, c). Найти неизвѣстную точку (x, y, z) значитъ, слѣдовательно, какъ и въ Геометріи на плоскости, найти величины ея координатъ.

Простое построеніе координатъ данныхъ и искомыхъ точекъ приводитъ къ общему рѣшенію слѣдующихъ двухъ задачъ, разсматривавшихся также въ Геометріи на плоскости.

381. *Даны двѣ точки* (x_1, y_1, z_1) *и* (x_2, y_2, z_2) *относительно прямоугольной системы координатъ: требуется найти разстояніе между ними.*

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 93). Опустивъ изъ нихъ перпендикуляры M_1N_1 и M_2N_2 на плоскость XOY и проведя затѣмъ черезъ основанія N_1 и N_2 этихъ перпендикуляровъ прямыя N_1P_1 и N_2P_2, перпендикулярныя къ оси OX, будемъ имѣть:



Фиг. 93.

$$x_1 = OP_1, \quad y_1 = P_1N_1, \quad z_1 = N_1M_1,$$
$$x_2 = OP_2, \quad y_2 = P_2N_2, \quad z_2 = N_2M_2.$$

Такъ какъ прямыя M_1N_1 и M_2N_2 параллельны между собою, то онѣ лежатъ въ одной плоскости, и потому прямая, проведенная черезъ M_1 параллельно прямой N_1N_2, будучи перпендикулярна къ прямымъ M_1N_1 и M_2N_2 и находясь въ той же плоскости, встрѣтитъ прямую M_2N_2 въ нѣкоторой точкѣ K, такъ что получится прямоугольный треугольникъ M_1KM_2, изъ котораго будемъ имѣть

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1K}^2 + \overline{M_2K}^2.$$

Проведя затѣмъ черезъ точку N_1 прямую N_1L, параллельную оси OX, до пересѣченія съ прямою N_2P_2, получимъ изъ прямоугольнаго треугольника N_1LN_2

$$\overline{N_1N_2}^2 = \overline{N_1L}^2 + \overline{N_2L}^2.$$

Но очевидно, что $M_1K = N_1N_2$. Слѣдовательно,

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{N_1L}^2 + \overline{N_2L}^2 + \overline{M_2K}^2.$$

Отсюда, обозначая искомое разстояніе чрезъ d и замѣчая, что

$$N_1L = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1,$$
$$N_2L = N_2P_2 - LP_2 = N_2P_2 - N_1P_1 = y_2 - y_1,$$
$$M_2K = M_2N_2 - KN_2 = M_2N_2 - M_1N_1 = z_2 - z_1,$$

получимъ

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

и, слѣдовательно,

$$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Это равенство и рѣшаетъ задачу и, притомъ, очевидно, при всякомъ положеніи точекъ M_1 и M_2, если только подъ обозначеніями $x_1, y_1 \ldots$ разумѣются алгебраическія величины координатъ этихъ точекъ [1].

[1]) Рѣшеніе этой задачи въ случаѣ, когда система координатъ косоугольная, будетъ дано ниже (см. стр. 299).

Если одна изъ данныхъ точекъ находится въ началѣ координатъ, то, обозначая координаты другой черезъ x, y, z, будемъ имѣть

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

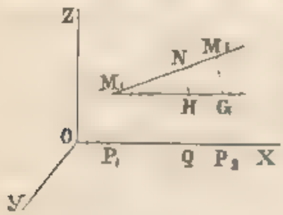
Это есть выраженіе разстоянія какой-нибудь точки $(x, y, z,)$ отъ начала координатъ.

382. *Даны двѣ точки* (x_1, y_1, z_1) *и* (x_2, y_2, z_2); *раздѣлить отрѣзокъ между ними въ данномъ отношеніи* $(m : n)$.

Вопросъ состоитъ въ отысканіи по координатамъ двухъ данныхъ точекъ M_1 и M_2 (фиг. 94) координатъ такой третьей точки N на прямой, ихъ соединяющей, чтобы было

$$\frac{M_1N}{NM_2} = \frac{m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

Обозначимъ искомыя координаты чрезъ x, y, z и вообразимъ, что чрезъ обѣ данныя точки M_1, M_2 и чрезъ искомую N проведены плоскости, параллельныя плоскости YOZ. Пусть точки пересѣченія этихъ трехъ плоскостей съ осью OX будутъ послѣдовательно P_1, P_2, Q. Въ такомъ случаѣ должно быть



Фиг. 94.

$$OP_1 = x_1, \quad OP_2 = x_2, \quad OQ = x.$$

Если проведемъ черезъ M_1 прямую, параллельную оси OX, и обозначимъ чрезъ G и H двѣ точки пересѣченія этой прямой съ плоскостями, проведенными черезъ M_2 и N параллельно плоскости YOZ, то будемъ имѣть

$$M_1H = P_1Q = OQ - OP_1 = x - x_1$$

и

$$HG = QP_2 = OP_2 - OQ = x_2 - x.$$

Но изъ треугольниковъ GM_1M_2 и HM_1N, въ которыхъ GM_2 и HN параллельны, какъ прямыя пересѣченія плоскости M_2M_1G съ двумя параллельными плоскостями, находимъ

$$\frac{M_1N}{NM_2} = \frac{M_1H}{HG} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Слѣдовательно, по условію задачи (3),

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n},$$

откуда

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Подобнымъ же образомъ, вообразивъ, что чрезъ точки M_1, M_2 и N проведены плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ XOZ и YOZ, найдемъ

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \quad \text{и} \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Найденное рѣшеніе, очевидно, не зависитъ отъ угловъ между плоскостями координатъ, и потому оно имѣетъ мѣсто, какъ въ случаѣ прямоугольной, такъ и въ случаѣ косоугольной системы координатъ.

383. Замѣчаніе о положеніи точки N внутри или внѣ отрѣзка M_1M_2, сдѣланное нами при рѣшеніи той же задачи въ Геометріи на плоскости (см. стр. 9), сохраняетъ и здѣсь свое значеніе.

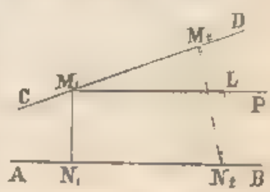
Если положимъ $\frac{m}{n} = 1$ и, слѣдовательно, $m = n$, то будемъ имѣть, что точка N есть средина отрѣзка M_1M_2. Вмѣстѣ съ тѣмъ, изъ общаго рѣшенія задачи получимъ для этого случая

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Такъ какъ каждому алгебраическому значенію отношенія $\frac{m}{n}$ соотвѣтствуетъ на прямой M_1M_2 единственное положеніе точки N, и выраженія (4) и (5) получаютъ безконечно большія величины только тогда, когда $\frac{m}{n} = -1$ и, слѣдовательно, $m = -n$, то принимаютъ, что и въ пространствѣ, такъ же какъ на плоскости, всякая прямая имѣетъ единственную безконечно удаленную точку.

§ 2. Проекціи. Угловыя соотношенія.

384. Пусть M_1 будетъ данная точка и AB данная прямая въ пространствѣ (фиг. 95). Точка N_1, въ которой эта прямая пересѣкается перпендикулярною къ ней и проходящею черезъ M_1 плоскостью, называется *проекціею точки* M_1 *на прямую* AB. Плоскость же, посредствомъ которой получается, такимъ образомъ, проекція данной точки, носитъ названіе *проектирующей*.



Фиг. 95.

Если въ пространствѣ дана какъ-нибудь прямая CD (вообще говоря, не пересѣкающаяся съ прямой AB), то, построивши проекціи двухъ какихъ-нибудь ея точекъ M_1 и M_2 на прямую AB, получимъ на послѣдней опредѣленный отрѣзокъ N_1N_2, который называютъ *проекціей отрѣзка* M_1M_2 *на прямую* AB.

*

Проектировать точки на данную прямую можно также плоскостями не перпендикулярными къ этой прямой, но составляющими съ нею какой-нибудь уголъ и параллельными между собою. Въ этомъ случаѣ проекція называется *наклонною* или *косоугольною*.

Проекцію же посредствомъ перпендикулярныхъ плоскостей отличаютъ наименованіемъ *прямоугольной* или *ортогональной*.

Если въ Аналитической Геометріи, говоря о проекціяхъ на прямую не указываютъ на направленіе проектирующихъ плоскостей, то разумѣютъ всегда проекціи ортогональныя.

385. Изъ даннаго опредѣленія проекцій слѣдуетъ, что прямолинейныя координаты какой нибудь данной точки M (фиг. 91) суть проекціи на оси координатъ прямой OM, соединяющей эту точку съ началомъ посредствомъ проектирующихъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ. Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ онѣ суть ортогональныя проекціи.

Точно также легко видѣть, что проекціи разстоянія между двумя точками на три оси координатъ посредствомъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, равняются разностямъ соотвѣтствующихъ координатъ этихъ точекъ. Такъ, въ двухъ предыдущихъ задачахъ (фиг. 93 и 94), отрѣзокъ P_1P_2 есть проекція отрѣзка M_1M_2 на ось OX и равняется разности $x_2 - x_1$.

386. Между длинами проектируемаго отрѣзка и его ортогональной проекціи существуетъ соотношеніе, зависящее отъ угла, образуемаго прямыми, на которыхъ берутся эти отрѣзки.

Уголъ, образуемый двумя не пересѣкающимися прямыми въ пространствѣ, равняется, вообще говоря, углу между прямыми, имъ параллельными и проходящими черезъ какую-нибудь точку.

Проведя чрезъ M_1 прямую M_1P, параллельную прямой AB (фиг. 9?) будемъ имѣть, слѣдовательно, что уголъ DM_1P равняется углу между прямыми AB и CD. Обозначимъ этотъ уголъ буквою φ.

Если положимъ, что L есть точка пересѣченія прямой M_1P съ плоскостью, проектирующей точку M_2, то, соединивъ прямою M_2 съ L получимъ треугольникъ M_1M_2L, въ которомъ уголъ при L прямой, такъ какъ M_2L лежитъ въ проектирующей плоскости, а M_1L перпендикулярна къ ней. Изъ этого треугольника находимъ, что

$$M_1L = M_1M_2 \cos\varphi.$$

Но $M_1L = N_1N_2$, какъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ между параллельными плоскостями. Поэтому

$$N_1N_2 = M_1M_2 \cos\varphi.$$

Проекція равняется проектируемому отрѣзку, умноженному на косинусъ угла между этими прямыми.

Понимая это предложеніе, какъ выраженіе зависимости между абсолютными величинами отрѣзковъ M_1M_2 и N_1N_2, мы должны подъ обозначеніемъ φ разумѣть острый уголъ между прямыми.

387. Прямыя AB и CD могутъ имѣть опредѣленныя направленія подобно тому, какъ оси координатъ, т. е. можетъ быть указано для каждой прямой, въ какомъ направленіи отмѣриваются отрѣзки положительные и въ какомъ отрицательные. Въ этомъ случаѣ должно принимать во вниманіе и знаки проектируемаго отрѣзка и его проекціи.

Если случится, что, при перемѣщеніи точки по прямой CD въ положительномъ направленіи, ея проекція движется по прямой AB также въ положительномъ направленіи, или какъ сама точка, такъ и ея проекція движутся по прямымъ CD и AB въ отрицательномъ направленіи, то принимаютъ, что проектируемый отрѣзокъ и его проекція имѣютъ одинаковые знаки. Если же, при движеніи точки по прямой CD въ положительномъ направленіи, ея проекція движется по AB въ отрицательномъ направленіи, или обратно, то проектируемый отрѣзокъ и его проекцію считаютъ имѣющими разные знаки.

Обозначая черезъ m абсолютную величину отрѣзка M_1M_2, а черезъ n алгебраическую величину его проекціи N_1N_2, и понимая, какъ и прежде, подъ φ острый уголъ между этими прямыми, будемъ поэтому имѣть

$$n = \pm m\cos\varphi\,,$$

гдѣ верхній знакъ во второй части соотвѣтствуетъ первому изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ, а нижній второму.

388. Когда двѣ прямыя имѣютъ опредѣленныя направленія, то, проведя изъ какой-нибудь точки два луча, параллельные этимъ прямымъ, и въ томъ направленіи, куда онѣ считаются положительными, получимъ вполнѣ опредѣленный уголъ, острый или тупой, смотря по направленіямъ самихъ прямыхъ. Этотъ уголъ называется *угломъ наклоненія* прямыхъ между собою и будетъ, очевидно, острымъ въ первомъ изъ названныхъ выше случаевъ и тупымъ во второмъ.

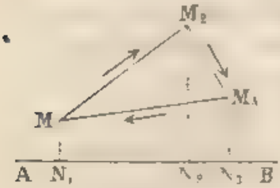
Вслѣдствіе этого, обозначая черезъ ψ уголъ наклоненія прямыхъ AB и CD, будемъ имѣть, что въ первомъ случаѣ $\cos\varphi = \cos\psi$, а во второмъ $\cos\varphi = -\cos\psi$. Послѣднее равенство приметъ, поэтому, въ обоихъ случаяхъ видъ

$$n = m\cos\psi\,.$$

Алгебраическая величина проекціи равняется абсолютной величинѣ проектируемаго отрѣзка, умноженной на косинусъ угла наклоненія этихъ прямыхъ между собою.

Понятно, что, при измѣненіи направленія одной изъ прямыхъ AB и CD, измѣняется уголъ ихъ наклоненія въ дополнительный къ прежнему до 180^0 и, съ тѣмъ вмѣстѣ, измѣняется знакъ проекціи.

389. Положимъ теперь, что мы имѣемъ въ пространствѣ треугольникъ $M_1M_2M_3$ (фиг. 96). Каково бы ни было положеніе этого треугольника, проекція одной изъ сторонъ его на прямую AB будетъ равняться, по абсолютной величинѣ, суммѣ проекцій двухъ другихъ сторонъ. Такъ, при сдѣланномъ обозначеніи вершинъ, будемъ имѣть



Фиг. 96.

$$N_1N_3 = N_1N_2 + N_2N_3.$$

Если же стороны треугольника имѣютъ направленія и, притомъ, такія, что, слѣдуя положительному направленію каждой стороны, можно обойти непрерывно весь периметръ треугольника (какъ показано стрѣлками), то каково-бы ни было направленіе прямой AB, проекція стороны M_1M_3 должна имѣть знакъ, обратный знаку проекцій двухъ другихъ сторонъ. Слѣдовательно, алгебраическая сумма проекцій всѣхъ трехъ сторонъ должна равняться нулю.

Обозначая абсолютныя величины сторонъ M_1M_2, M_2M_3 и M_1M_3 послѣдовательно черезъ a_1, a_2, a_3, а углы наклоненія этихъ сторонъ съ прямою AB черезъ α_1, α_2, α_3, будемъ поэтому имѣть

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3 = 0.$$

Но если измѣнимъ направленіе одной стороны, напримѣръ M_1M_3, то измѣнится знакъ соотвѣтствующаго косинуса, т. е. $\cos\alpha_3$, и послѣднее равенство обратится въ

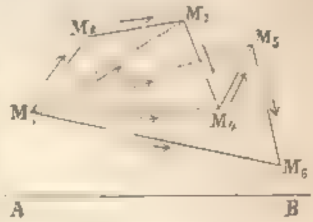
$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 = a_3\cos\alpha_3.$$

Первая часть этого равенства есть проекція на прямую AB ломаной линіи $M_1M_2M_3$, которая, слѣдуя положительному направленію отдѣльныхъ ея частей, начинается въ M_1 и оканчивается въ M_3. Вторая же часть есть проекція прямой M_1M_3, соединяющей концы этой ломаной и направленной также отъ M_1 къ M_3.

Послѣднее равенство показываетъ, слѣдовательно, что *проекція ломаной, соединяющей двѣ точки въ опредѣленномъ направленіи, равняется проекціи прямой, соединяющей эти точки въ томъ же направленіи.*

390. Ломаная линія, о которой говорится въ послѣднемъ предложеніи, предполагалась состоящей изъ двухъ только прямолинейныхъ частей или колѣнъ. Не трудно показать, однако, что предложеніе это имѣетъ мѣсто и для ломаной, состоящей изъ какого угодно числа колѣнъ.

Положимъ, что ломаная проведена отъ точки M_1 къ M_6 и состоитъ изъ колѣнъ M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5 и M_5M_6 (фиг. 97). Назовемъ абсолютныя величины этихъ колѣнъ послѣдовательно черезъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, и пусть a_6 будетъ абсолютная длина прямой, соединяющей точки M_1 и M_6 въ томъ же направленіи. Проведемъ прямыя изъ M_1 къ M_3, M_4 и M_5 (принимая это ихъ направленіе за положительное) и обозначимъ ихъ абсолютныя величины черезъ b_1, b_2 и b_3. Если кромѣ того обозначимъ углы наклоненія прямыхъ a_1, a_2,...b_1, b_2,... къ прямой AB послѣдовательно черезъ α_1, α_2,...β_1, β_2,..., то будемъ имѣть на основаніи предыдущаго:



Фиг. 97.

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 = b_1\cos\beta_1\,,$$
$$b_1\cos\beta_1 + a_3\cos\alpha_3 = b_2\cos\beta_2\,,$$
$$b_2\cos\beta_2 + a_4\cos\alpha_4 = b_3\cos\beta_3\,,$$
$$b_3\cos\beta_3 + a_5\cos\alpha_5 = a_6\cos\alpha_6\,.$$

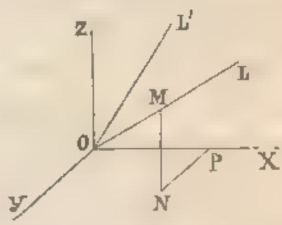
Сложивъ почленно эти равенства, получимъ по сокращеніи,

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3 + a_4\cos\alpha_4 + a_5\cos\alpha_5 = a_6\cos\alpha_6\,,$$

что и доказываетъ справедливость предыдущаго предложенія для разсматриваемой произвольно взятой ломаной.

391. Предыдущее предложеніе представляетъ собою очень важную лемму, на которой основываются многіе выводы и доказательства Геометріи въ пространствѣ. Приложимъ его прежде всего къ выводу нѣкоторыхъ угловыхъ соотношеній.

Положимъ, что намъ дана прямая OL, проходящая черезъ начало координатъ и составляющая съ тремя осями OX, OY, OZ прямоугольной системы координатъ углы α, β, γ (фиг. 98). Возьмемъ на этой прямой какую-нибудь точку M и обозначимъ черезъ d разстояніе ея отъ начала. Проведя черезъ M прямую, параллельную оси OZ, до пересѣченія въ точкѣ N съ плоскостью XOY и черезъ N прямую, параллельную оси OY, до пересѣченія въ точкѣ P съ осью OX, получимъ ломаную линію $OPNM$, состоящую изъ трехъ колѣнъ, которыя суть координаты точки M. Проекція этой ломаной на прямую OL должна равняться отрѣзку OM, и такъ какъ углы наклоненія прямыхъ OP, PN и NM къ прямой OL суть α, β и γ, то будемъ имѣть



Фиг. 98.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d\,.$$

Но сами координаты точки M суть, какъ было показано, проекціи прямой OM на оси и потому

$$x = d\cos\alpha, \quad y = d\cos\beta, \quad z = d\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Вслѣдствіе этого предыдущее равенство принимаетъ видъ

$$d\cos^2\alpha + d\cos^2\beta + d\cos^2\gamma = d,$$

откуда, по раздѣленіи всѣхъ членовъ на d, получимъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Такъ какъ всякая прямая, параллельная съ OL, составляетъ съ осями координатъ тѣ же углы α, β, γ, то заключаемъ, что послѣднее равенство представляетъ соотношеніе между тремя углами какой угодно прямой въ пространствѣ съ тремя осями прямоугольной системы координатъ, а слѣдовательно и съ тремя какими бы ни было взаимно перпендикулярными прямыми.

Равенство (2), по замѣнѣ въ немъ косинусовъ ихъ выраженіями черезъ синусы, можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

392. Положимъ теперь, что черезъ начало координатъ проведены двѣ прямыя OL и OL' (фиг. 98), составляющія между собою уголъ φ. Обозначимъ углы первой изъ этихъ прямыхъ съ осями прямоугольной системы координатъ послѣдовательно черезъ α, β, γ, а второй черезъ α', β', γ'.

Если возьмемъ, какъ и прежде, на первой прямой точку M, отстоящую отъ начала на произвольное разстояніе d, и построимъ ломаную линію $OPNM$, состоящую изъ координатъ точки M, то будемъ имѣть, что проекція отрѣзка OM на прямую OL' должна равняться проекціи этой ломаной на ту же прямую. Это равенство аналитически выразится слѣдующимъ образомъ:

$$d\cos\varphi = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'.$$

Замѣняя здѣсь координаты x, y, z ихъ выраженіями (1) черезъ разстояніе d, будемъ имѣть

$$d\cos\varphi = d\cos\alpha\cos\alpha' + d\cos\beta\cos\beta' + d\cos\gamma\cos\gamma',$$

откуда, по сокращеніи всѣхъ членовъ на d, получимъ

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \quad \ldots\ldots (3)$$

Такъ какъ всякія двѣ прямыя, параллельныя прямымъ OL и OL', составляютъ между собою тотъ же самый уголъ φ, то заключаемъ, что

послѣднее равенство представляетъ выраженіе косинуса угла между двумя какими бы ни было прямыми черезъ углы наклоненія этихъ прямыхъ съ тремя осями прямоугольной системы координатъ.

Если двѣ разсматриваемыя прямыя перпендикулярны между собою, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Вслѣдствіе этого равенство

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

есть условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ.

393. Возвышая обѣ части равенства (3) въ квадратъ и вычитая почленно изъ тождества

$$1 = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'),$$

получимъ

$$\sin^2\varphi = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') -$$
$$- (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2.$$

Отсюда, раскрывъ скобки и сокративъ подобные члены, находимъ

$$\sin^2\varphi = \cos^2\alpha\cos^2\beta' + \cos^2\beta\cos^2\gamma' + \cos^2\gamma\cos^2\alpha' +$$
$$+ \cos^2\beta\cos^2\alpha' + \cos^2\gamma\cos^2\beta' + \cos^2\alpha\cos^2\gamma' -$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta' - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma' - 2\cos\alpha\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'$$

или

$$\sin^2\varphi = (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 +$$
$$+ (\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2,$$

выраженіе синуса угла между двумя прямыми черезъ углы этихъ прямыхъ съ осями прямоугольной системы координатъ.

394. Положимъ теперь, что система координатъ, относительно которой разсматриваются двѣ прямыя OL и OL' (фиг. 98), есть косоугольная, и обозначимъ углы между осями YOZ, XOZ и XOY послѣдовательно черезъ λ, μ и ν.

Если сохранимъ для угловъ, составляемыхъ прямыми линіями между собою и съ осями координатъ, прежнее обозначеніе и будемъ проектировать ломаную линію $OPNM$ и прямую OM сперва на три оси координатъ, а потомъ на прямыя OL и OL', то получимъ слѣдующія пять равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l} x + y\cos\nu + z\cos\mu = d\cos\alpha \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = d\cos\beta \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = d\cos\gamma \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d \\ x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = d\cos\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Исключивъ изъ первыхъ четырехъ равенствъ величины x, y, z и d, получимъ (см. стр. 30)

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Это есть соотношеніе между тремя углами какой-нибудь прямой съ осями косоугольной системы координатъ и тремя углами наклоненія этихъ осей между собою.

Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ будемъ имѣть $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$, и послѣднее равенство, по разложеніи опредѣлителя, обращается въ равенство (2).

Если исключимъ величины x, y, z и d изъ трехъ первыхъ и послѣдняго изъ равенствъ (4), то получимъ соотношеніе

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma', & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

изъ котораго опредѣляется уголъ φ между двумя прямыми по угламъ этихъ прямыхъ съ осями косоугольной системы координатъ и угламъ между осями.

При $\cos\varphi = 0$ это равенство представляетъ условіе перпендикулярности.

Въ предположеніи же, что $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$, будемъ имѣть, что система координатъ прямоугольная, и равенство (6) обратится въ равенство (3).

395. Помноживъ четвертое изъ равенствъ (4) на d и замѣняя въ первой части произведенія $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ ихъ выраженіями изъ трехъ первыхъ равенствъ, получимъ

$$\begin{gathered} x(x + y\cos\nu + z\cos\mu) + \\ + y(x\cos\nu + y + z\cos\lambda) + \\ + z(x\cos\mu + y\cos\lambda + z) = d^2, \end{gathered}$$

откуда находимъ

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2xz\cos\mu + 2xy\cos\nu\,.$$

Это есть выраженіе разстоянія какой-нибудь точки отъ начала координатъ чрезъ координаты этой точки относительно косоугольной сис-

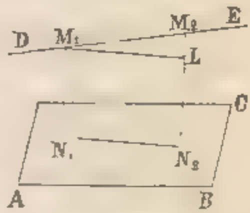
темы. Изъ него, какъ частный случай, получается равенство (2) предыдущаго параграфа (см. стр. 290).

Подобнымъ же образомъ, припоминая, что разности соотвѣтствующихъ координатъ двухъ какихъ-нибудь точекъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) равняются косоугольнымъ проекціямъ разстоянія между этими точками на оси координатъ (см. стр. 292), и замѣчая, что поэтому три отрѣзка, равные этимъ разностямъ и параллельные осямъ, могутъ составить ломаную, соединяющую данныя точки, найдемъ для разстоянія между этими точками слѣдующее выраженіе:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 +$$
$$+ 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\cos\lambda + 2(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)\cos\mu + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\nu.$$

Отсюда, какъ частный случай, получимъ найденное выше выраженіе разстоянія между двумя данными точками относительно прямоугольной системы (см. стр. 289).

396. До сихъ поръ мы разсматривали проекціи на прямыя линіи, но въ Аналитической Геометріи имѣютъ также очень важное значеніе проекціи на плоскости. Положимъ, что намъ дана нѣкоторая точка M_1 и плоскость ABC въ пространствѣ (фиг. 99). Точка N_1, въ которой эта плоскость пересѣкается прямою, перпендикулярною къ ней и проходящею черезъ точку M_1, и называется *проекціей точки M_1 на плоскость ABC*. Прямая же M_1N_1, посредствомъ которой получается проекція точки, носитъ названіе ея *проектирующей*.



Фиг. 99.

Проектирующія всѣхъ точекъ какой-нибудь прямой DE образуютъ, очевидно, плоскость, перпендикулярную къ плоскости ABC и пересѣкающую ее по прямой, которую называютъ *проекціей данной прямой DE*. При этомъ всякому опредѣленному отрѣзку M_1M_2 на прямой DE соотвѣтствуетъ опредѣленный же отрѣзокъ N_1N_2 на ея проекціи.

Подобнымъ же образомъ, опуская перпендикуляры на плоскость ABC изъ всѣхъ возможныхъ точекъ нѣкоторой кривой линіи или, вообще говоря, какой-нибудь фигуры, получимъ на этой плоскости проекцію этой фигуры. При этомъ прямыя, проектирующія кривую линію, образуютъ поверхность, называемую *цилиндрической*.

Вообще, цилиндрической поверхностью, или просто *цилиндромъ*, называется поверхность, описываемая движущеюся прямою, которая во все время движенія сохраняетъ свое направленіе (т. е. остается параллельною одной и той же прямой) и пересѣкаетъ нѣкоторую кривую линію. Прямая, описывающая поверхность, называется при этомъ *образующей*

цилиндра, а кривая, которую всѣ образующія должны пересѣкать, ея *управляющей* [1]).

При проектированіи кривой линіи на плоскость, эта кривая служитъ управляющей цилиндра, образуемаго проектирующими прямыми.

397. Проектировать точки на данную плоскость можно также прямыми, не перпендикулярными къ этой плоскости, а наклоненными къ ней подъ опредѣленнымъ угломъ и параллельными между собою. Проекція, получаемая такимъ образомъ, называется *наклонною* или *косоугольною*. Проекція же посредствомъ перпендикуляровъ именуется для отличія *прямоугольною* или *ортогональною*.

При проектированіи параллельными прямыми, проекціи на плоскости, параллельныя между собою, очевидно, тождественны.

Какъ ортогональная, такъ и наклонная проекція представляютъ частные виды *проекціи центральной*, которая получается посредствомъ проектированія прямыми линіями, исходящими изъ одной и той же точки, центра проекціи. Предполагая, что центръ проекціи удаляется въ безконечность, будемъ имѣть, что проектирующія прямыя дѣлаются параллельными между собою.

Центральную проекцію какой-нибудь фигуры называютъ также ея *перспективою* [2]).

Если въ Аналитической Геометріи, говоря о проекціяхъ на плоскость, не характеризуютъ ихъ какимъ-либо наименованіемъ, то подразумѣвается, что рѣчь идетъ о проекціяхъ ортогональныхъ.

398. Цилиндрическія поверхности, управляющими которыхъ служатъ кривыя второго порядка, называются цилиндрами второго порядка и подраздѣляются на цилиндры эллиптическіе, гиперболическіе и параболическіе, смотря по роду кривой, служащей управляющею.

Эллиптическій цилиндръ состоитъ изъ одной сплошной полости, которая всякою плоскостью, не параллельною образующимъ, пересѣкается по замкнутой линіи, т. е. эллипсу. Частный видъ этой поверхности представляетъ прямой круглый цилиндръ, разсматриваемый въ начальной Геометріи.

Гиперболическій цилиндръ, такъ же какъ и сама его управляющая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей, которыя каждою плоскостью, не параллельною образующимъ, пересѣкаются по двумъ вѣтвямъ гиперболы.

Наконецъ, параболическій цилиндръ состоитъ изъ одной полости и плоскостями, не параллельными образующимъ, пересѣкается по параболамъ.

---

[1]) Сравн. съ опредѣленіемъ коническской поверхности, стр. 240.

[2]) Понятіе о центральной проекціи лежитъ въ основаніи Проективной Геометріи и въ частности проективнаго соотвѣтствія (см. стр. 98).

Изъ всего этого видимъ, что какъ ортогональная, такъ и наклонная *проекція всякой линіи второго порядка есть линія того же порядка и рода.*

399. Между длиною проектируемаго отрѣзка прямой и его ортогональной проекціей на плоскость существуетъ такое же соотношеніе, какъ и въ случаѣ проектированія на прямую. Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ точку M_1 прямую, параллельную проекціи N_1N_2 (фиг. 99), и обозначивъ черезъ L точку пересѣченія ея съ прямою M_2N_2, получимъ прямоугольный треугольникъ M_1LM_2. Уголъ M_2M_1L этого треугольника равняется, очевидно, углу, составляемому прямой DE съ ея проекціей N_1N_2. Называя этотъ уголъ буквою φ, будемъ имѣть

$$M_1L = M_1M_2\cos\varphi$$

и, слѣдовательно,

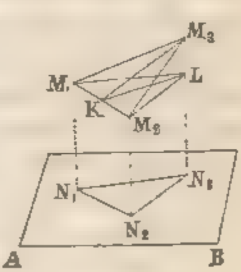
$$N_1N_2 = M_1M_2\cos\varphi.$$

Проекція равняется проектируемому отрѣзку, умноженному на косинусъ угла между ними.

Равенство это представляетъ зависимость между абсолютными величинами, а потому подъ φ нужно разумѣть острый уголъ.

400. Подобное же соотношеніе имѣетъ мѣсто между площадями проектируемой плоской фигуры и ея проекціи. Положимъ сперва, что фигура эта есть треугольникъ $M_1M_2M_3$ (фиг. 100), одна изъ сторонъ котораго, напр. M_1M_2, параллельна плоскости проекцій ABC.

Проведя черезъ эту сторону плоскость, параллельную плоскости проекцій, и обозначивъ черезъ L точку пересѣченія ея съ прямою M_3N_3, проектирующей точку M_3, получимъ треугольникъ M_1M_2L, очевидно, тождественный съ проекціей $N_1N_2N_3$ даннаго. Если затѣмъ проведемъ черезъ прямую M_3N_3 плоскость, перпендикулярную къ прямой M_1M_2, и назовемъ черезъ K точку пересѣченія ея съ этою прямою, то, обозначая буквами Δ и D площади треугольника $M_1M_2M_3$ и его проекціи $N_1N_2N_3$, будемъ имѣть



Фиг. 100.

$$2\Delta = M_1M_2 . M_3K \quad \text{и} \quad 2D = M_1M_2 . LK.$$

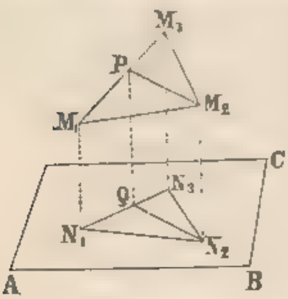
Обозначая, наконецъ, черезъ φ уголъ M_3KL, которымъ, очевидно, измѣряется двугранный уголъ между плоскостью даннаго треугольника и плоскостью проекцій, находимъ изъ прямоугольнаго треугольника KLM_3, что

$$LK = M_3K\cos\varphi.$$

Отсюда, по умноженіи обѣихъ частей на $\frac{1}{2} M_1M_2$, получимъ

$$D = \triangle \cos\varphi .$$

Допустимъ теперь, что ни одна изъ трехъ сторонъ даннаго треугольника $M_1M_2M_3$ не параллельна плоскости проекцій. Въ такомъ случаѣ черезъ одну изъ трехъ его вершинъ, напр. M_2, можно провести плоскость, параллельную плоскости проекцій и встрѣчающую противоположную сторону въ точкѣ P, лежащей между двумя другими вершинами (фиг. 101). Называя площади треугольниковъ M_1M_2P и M_3M_2P послѣдовательно черезъ $\triangle_1$ и $\triangle_2$, а площади ихъ проекцій N_1N_2Q и N_3N_2Q черезъ D_1 и D_2, будемъ имѣть



Фиг. 101.

$$\triangle_1 + \triangle_2 = \triangle \quad \text{и} \quad D_1 + D_2 = D .$$

Но, на основаніи предыдущаго,

$$D_1 = \triangle_1 \cos\varphi \quad \text{и} \quad D_2 = \triangle_2 \cos\varphi ,$$

откуда, по сложеніи, получимъ

$$D = \triangle \cos\varphi .$$

401. То же самое соотношеніе имѣетъ мѣсто и для плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ какими бы ни было ломаными линіями, т. е. для плоскихъ многоугольниковъ. Въ самомъ дѣлѣ, площадь такого многоугольника можно, очевидно, раздѣлить прямыми линіями на треугольники, при чемъ проекціи этихъ прямыхъ будутъ дѣлить проекцію многоугольника также на треугольники, служащіе проекціями первыхъ. Написавъ предыдущее равенство для каждой пары соотвѣтственныхъ треугольниковъ и сложивъ всѣ эти равенства, получимъ то же соотношеніе для многоугольниковъ.

Наконецъ, то же самое соотношеніе должно имѣть мѣсто и для площадей, ограниченныхъ кривыми линіями, въ чемъ можно убѣдиться, разсматривая кривую, какъ предѣлъ ломаной линіи, прямолинейныя части которой безпредѣльно уменьшаются при безпредѣльномъ возрастаніи ихъ числа.

Итакъ, вообще, *площадь проекціи всякой плоской фигуры равняется площади самой проектируемой фигуры, умноженной на косинусъ угла между ихъ плоскостями.*

402. Если обозначимъ площадь какой-нибудь плоской фигуры через $\triangle$ и положимъ, что D_x, D_y, D_z суть площади ея проекцій на плоскости координатъ YOX, XOZ, XOY прямоугольной системы, то, называя буквами α, β, γ углы перпендикуляра къ плоскости данной фигуры съ осями OX, OY, OZ, будемъ имѣть, на основаніи предыдущаго,

$$D_x = \triangle\cos\alpha\,, \quad D_y = \triangle\cos\beta\,, \quad D_z = \triangle\cos\gamma\,,$$

откуда находимъ

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 = \triangle^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \triangle^2$$

и слѣдовательно,

$$\triangle = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}\,.$$

Площадь всякой плоской фигуры равняется корню квадратному изъ суммы квадратовъ площадей ея проекцій на три плоскости координатъ прямоугольной системы.

§ 3. Преобразованіе координатъ.

403. Замѣна координатъ какой-нибудь точки относительно одной системы чрезъ координаты той же точки относительно другой составляетъ то, что называютъ *преобразованіемъ координатъ*. Тѣ координаты, которыя требуется замѣнить, называютъ обыкновенно *прежними*, а тѣ, которыя вводятся на мѣсто прежнихъ—*новыми*. Прежнія координаты мы будемъ обозначать чрезъ x, y, z, а новыя чрезъ x', y', z'.

Чтобы можно было произвести названную замѣну въ какомъ-либо аналитическомъ выраженіи, нужно имѣть соотношенія между прежними и новыми координатами въ видѣ выраженій прежнихъ координатъ через новыя и через тѣ данныя или постоянныя величины, которыми опредѣляется расположеніе одной системы координатъ относительно другой. Соотношенія эти извѣстны подъ названіемъ *формулъ преобразованія координатъ* [1]).

404. Найдемъ сперва формулы преобразованія прямолинейныхъ координатъ въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ.

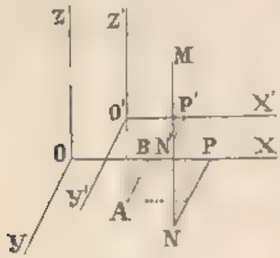
1-й случай.—*Обѣ системы координатъ имѣютъ одинаковое направленіе осей, но разныя начала.*

Положимъ, что OX, OY, OZ суть прежнія оси координатъ и $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ параллельныя имъ новыя (фиг. 102). Обозначимъ через

---

[1]) Какъ видно изъ сказаннаго, задача преобразованія координатъ въ пространствѣ имѣетъ то же самое значеніе, какъ и на плоскости, и все различіе въ аналитическомъ смыслѣ состоитъ лишь въ числѣ данныхъ и искомыхъ.

a, b, c координаты новаго начала относительно прежней системы. Этими величинами, очевидно, вполнѣ опредѣляется расположеніе одной системы координатъ относительно другой.



Фиг. 102

Если черезъ данную точку M проведемъ плоскость, параллельную плоскости YOZ, и назовемъ точки пересѣченія ея съ осями OX и $O'X'$ послѣдовательно чрезъ P и P', а точку пересѣченія плоскости $Y'O'Z'$ съ осью OX чрезъ B, то будемъ имѣть:

$$OP = x, \quad O'P' = x', \quad OB = a.$$

Предполагая, что нормальный уголъ новой системы помѣщается внутри нормальнаго угла прежней, и что данная точка M находится внутри нормальныхъ угловъ обѣихъ системъ, будемъ, очевидно, имѣть

$$OP = OB + BP = OB + O'P'$$

или

$$x = a + x'.$$

Такъ какъ, при всякомъ другомъ положеніи точекъ O' и M, могутъ измѣниться только знаки входящихъ въ это соотношеніе величинъ и, притомъ, соотвѣтственно общему правилу знаковъ, то это есть вполнѣ общее соотношеніе, имѣющее мѣсто при всякомъ расположеніи геометрическихъ данныхъ, если только подъ буквенными обозначеніями разумѣются алгебраическія значенія координатъ.

Примѣняя тѣ же соображенія къ осямъ y-овъ и z-овъ, получимъ подобныя же соотношенія между соотвѣтствующими имъ координатами и потому заключаемъ, что формулы преобразованія координатъ въ настоящемъ частномъ случаѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y', \\ z &= c + z'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Эти формулы имѣютъ мѣсто, какъ въ случаѣ прямоугольной, такъ и въ случаѣ косоугольной системы координатъ.

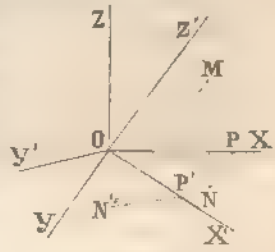
405. 2-й случай. — *Обѣ системы координатъ имѣютъ одно и то же начало, но разныя направленія осей.*

Въ этомъ случаѣ расположеніе новой системы координатъ относительно прежней опредѣляется углами, которые новыя оси составляютъ съ прежними или, вообще, съ какими-нибудь прямыми, направленіе ко-

торыхъ должно считать извѣстнымъ при данномъ направленіи прежнихъ осей.

Будемъ обозначать углы, которые какая-нибудь прямая L составляетъ съ осями координатъ обѣихъ системъ чрезъ (LX), $(LY)\ldots(LX')\ldots$

Построивши ломаную линію $OPNM$ (фиг. 103), состоящую изъ прямыхъ, равныхъ прежнимъ координатамъ разсматриваемой точки M и параллельныхъ прежнимъ осямъ, а также ломаную линію $OP'N'M$, имѣющую такое же отношеніе къ новой системѣ, будемъ имѣть, что проекціи этихъ двухъ ломаныхъ, какъ соединяющихъ однѣ и тѣ же точки O и M, на прямую L должны быть равны между собою, т. е. должно быть



Фиг. 103

$$x\cos(LX)+y\cos(LY)+z\cos(LZ)=x'\cos(LX')+y'\cos(LY')+z'\cos(LZ').$$

Если возьмемъ кромѣ того три какія-нибудь прямыя A, B, C, перпендикулярныя послѣдовательно къ плоскостямъ YOZ, XOZ и XOY, то, при такомъ же обозначеніи угловъ, будемъ имѣть:

$$\cos(AY)=\cos(AZ)=\cos\frac{\pi}{2}=0\,,$$

$$\cos(BX)=\cos(BZ)=\cos\frac{\pi}{2}=0\,,$$

$$\cos(CX)=\cos(CY)=\cos\frac{\pi}{2}=0\,.$$

Поэтому, замѣняя въ предыдущемъ равенствѣ прямую L послѣдовательно прямыми A, B, C, получимъ

$$\begin{aligned}
x\cos(AX)&=x'\cos(AX')+y'\cos(AY')+z'\cos(AZ'),\\
y\cos(BY)&=x'\cos(BX')+y'\cos(BY')+z'\cos(BZ'),\\
z\cos(CZ)&=x'\cos(CX')+y'\cos(CY')+z'\cos(CZ'),
\end{aligned}$$

откуда находимъ

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{x'\cos(AX')+y'\cos(AY')+z'\cos(AZ')}{\cos(AX)}\\
y&=\frac{x'\cos(BX')+y'\cos(BY')+z'\cos(BZ')}{\cos(BY)}\\
z&=\frac{x'\cos(CX')+y'\cos(CY')+z'\cos(CZ')}{\cos(CZ)}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Это и есть формулы преобразованія координатъ въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ. Въ нихъ двѣнадцать угловъ, входящихъ во вторыя

части, должно считать данными, такъ какъ девять изъ нихъ (находящіеся въ числителяхъ) опредѣляютъ направленіе новыхъ осей относительно прежней системы, а три остальные опредѣляютъ взаимное наклоненіе плоскостей прежней системы.

Сокращенно предыдущія формулы могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= mx' + ny' + pz' \\ y &= m'x' + n'y' + p'z' \\ z &= m''x' + n''y' + p''z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ коэффиціенты m, n, p, m', n'...суть данныя величины.

406. Въ общемъ случаѣ, когда прежняя система OX, OY, OZ и новая $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ имѣютъ какое-нибудь расположеніе, т. е. вообще говоря, различныя начала и различныя направленія осей, формулы преобразованія координатъ получаются слѣдующимъ образомъ:

Вообразимъ третью систему координатъ $O'X''$, $O'Y''$, $O'Z''$, которые оси имѣютъ направленіе, одинаковое съ осями прежней, а начало совпадаетъ съ началомъ новой системы. Обозначая координаты точки M относительно этой вспомогательной системы черезъ x'', y'', z'', будемъ имѣть для перехода отъ прежней системы къ вспомогательной, на основаніи формулъ (1),

$$x = a + x'', \quad y = b + y'', \quad z = c + z'',$$

и для перехода отъ вспомогательной системы къ новой, на основаніи формулъ (3),

$$\begin{aligned} x'' &= mx' + ny' + pz', \\ y'' &= m'x' + n'y' + p'z', \\ z'' &= m''x' + n''y' + p''z'. \end{aligned}$$

Исключая отсюда вспомогательныя координаты x'', y'', z'', получимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= mx' + ny' + pz' + a \\ y &= m'x' + n'y' + p'z' + b \\ z &= m''x' + n''y' + p''z' + c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

формулы преобразованія, связывающія координаты одной и той же точки относительно двухъ какихъ бы то ни было прямолинейныхъ системъ. Изъ нихъ видимъ, что координаты точки относительно одной прямолинейной системы выражаются чрезъ ея координаты относительно другой *линейно*, т. е. многочленами первой степени.

407. Формулы (2) принимаютъ болѣе простой видъ въ томъ случаѣ, когда прежняя система координатъ прямоугольная. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ прямыя A, B, C можно предполагать совпадающими послѣдовательно съ осями OX, OY, OZ, и такъ какъ при этомъ будемъ имѣть

$$\cos(AX) = \cos(BY) = \cos(CZ) = 1,$$

то формулы (2) обратятся въ

$$\begin{aligned} x &= x'\cos(XX') + y'\cos(XY') + z'\cos(XZ'), \\ y &= x'\cos(YX') + y'\cos(YY') + z'\cos(YZ'), \\ z &= x'\cos(ZX') + y'\cos(ZY') + z'\cos(ZZ'), \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma \\ y &= x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma' \\ z &= x'\cos\alpha'' + y'\cos\beta'' + z'\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Здѣсь углы, образуемые новыми осями съ каждой изъ прежнихъ, обозначены особыми буквами α, β..., причемъ значеніе каждой буквы въ отдѣльности указывается лучше всего таблицею

	X'	Y'	Z'
X	α	β	γ
Y	α'	β'	γ'
Z	α''	β''	γ''

гдѣ въ началѣ каждой строки и вверху каждаго столбца поставлены наименованія осей, уголъ между которыми обозначается буквою, помѣщающеюся въ этой строкѣ и этомъ столбцѣ.

Вслѣдствіе того, что прежняя система координатъ прямоугольная, между этими девятью углами должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' &= 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' &= 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Кромѣ того, чрезъ тѣ же девять угловъ могутъ быть выражены углы между новыми осями слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \cos(X'Y') &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'', \\ \cos(X'Z') &= \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'', \\ \cos(Y'Z') &= \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma''. \end{aligned}$$

*

408. Если обѣ системы координатъ прямоугольныя, то формулы преобразованія координатъ сохраняютъ тотъ же видъ (5), но между углами, образуемыми осями, будутъ существовать еще три соотношенія. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$\cos(X'Y') = \cos(X'Z') = \cos(Y'Z') = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

то послѣднія три равенства даютъ

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0 \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Такимъ образомъ, девять угловъ α, β, γ, $\alpha' \ldots \gamma''$ оказываются связанными шестью независимыми между собою соотношеніями (6) и (7), а потому только три изъ этихъ угловъ могутъ быть взяты произвольно для опредѣленія расположенія одной системы координатъ относительно другой.

Когда обѣ системы координатъ прямоугольныя, то все, что говорилось о новой системѣ по отношенію къ прежней должно имѣть мѣсто и для прежней системы по отношенію къ новой. Основываясь на этомъ, заключаемъ, что на ряду съ соотношеніями (6) и (7) должны существовать еще слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 0 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0 \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0 \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Но эти послѣднія соотношенія не независимы отъ прежнихъ, а, напротивъ, составляютъ ихъ слѣдствія. Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ прежде всего, что при условіяхъ (6) и (7) изъ равенствъ (5) весьма просто получаются слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\alpha + y\cos\alpha' + z\cos\alpha'' \\ y' = x\cos\beta + y\cos\beta' + z\cos\beta'' \\ z' = x\cos\gamma + y\cos\gamma' + z\cos\gamma'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Такъ напр., чтобы получить первое изъ этихъ равенствъ, нужно только равенства (5) помножить послѣдовательно на $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$ и результаты сложить.

Далѣе очевидно, что при всякомъ положеніи точки M должно имѣть мѣсто тождество

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

обѣ части котораго выражаютъ квадратъ разстоянія этой точки отъ общаго начала обѣихъ системъ координатъ.

Подставляя во вторую часть на мѣсто x', y', z' ихъ предыдущія выраженія (10), представимъ это тождество въ видѣ

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2=&\\=x^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)&+2xy(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')+\\+y^2(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')&+2xz(\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma'')+\\+z^2(\cos^2\alpha''+\cos^2\beta''+\cos^2\gamma'')&+2yz(\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma'').\end{aligned}$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ x, y, z, то коэффиценты подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ его должны быть равны между собою. Это и приводитъ насъ къ равенствамъ (8) и (9).

409. Изъ соотношеній (6) и (7) могутъ быть выведены также, какъ слѣдствія, многія другія. Такъ изъ двухъ первыхъ равенствъ группы (7) находимъ

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma'}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta''\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma''}=\frac{\cos\alpha''}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\pm\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'+\cos^2\alpha''}}{\sqrt{(\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma')^2+(\cos\beta''\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma'')^2+(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2}}.$$

Но, какъ мы видѣли выше (см. стр. 297),

$$\begin{aligned}(\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma')^2+(\cos\beta''\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma'')^2+\\+(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2=\sin^2(Y'Z')=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.\end{aligned}$$

Вслѣдствіе этого, принимая во вниманіе первое изъ равенствъ (6), будемъ имѣть

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma'}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta''\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma''}=$$

$$=\frac{\cos\alpha''}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma}=\pm1,$$

отвуда

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \pm(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')\\ \cos\alpha' &= \pm(\cos\beta''\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma'')\\ \cos\alpha'' &= \pm(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)\end{aligned}\right\} \dots\dots (11)$$

Здѣсь во вторыхъ частяхъ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ и нижніе нижнимъ.

Подобныя же равенства можно вывести изъ каждыхъ двухъ другихъ равенствъ группы (7), а также и изъ группы (9)

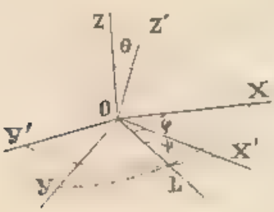
Умноживъ равенства (11) послѣдовательно на $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$ и сложивъ результаты получимъ

$$\cos\alpha(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma') + \cos\alpha'(\cos\beta''\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma'') + \\ + \cos\alpha''(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma) = \pm 1$$

или, что все то же,

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma\\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma'\\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma''\end{vmatrix} = \pm 1.$$

410. Когда двѣ прямоугольныя системы координатъ OX, OY, OZ и OX', OY', OZ' имѣютъ общее начало O (фиг. 104), то для опредѣленія расположенія одной изъ нихъ относительно другой можно употреблять слѣдующіе три угла: 1) уголъ φ, составляемый прежнею осью OX съ прямою OL пересѣченія плоскостей XOY и $X'OY'$, 2) уголъ θ наклоненія этихъ плоскостей между собою, который, очевидно, равняется углу между осями OZ и OZ', и 3) уголъ ψ, составляемый прямою OL съ новою осью OX'.



Фиг. 104.

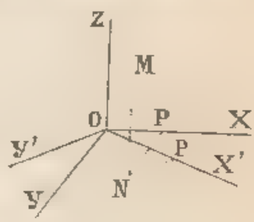
Что этихъ трехъ угловъ совершенно достаточно для названной цѣли, слѣдуетъ изъ того, что, зная ихъ и имѣя прежнюю систему координатъ, легко найти построеніемъ сперва прямую OL, а затѣмъ всѣ плоскости и оси новой системы.

Удобство употребленія этихъ угловъ заключается главнымъ образомъ въ томъ, что чрезъ ихъ тригонометрическія величины (синусы и косинусы) выражаются *раціонально* косинусы всѣхъ девяти употреблявшихся выше угловъ α, β, γ, α' ... т. е. всѣ коэффиціенты въ формулахъ преобразованія координатъ. Если же мы стали бы употреблять для опредѣленія взаимнаго расположенія системъ координатъ какіе-нибудь три изъ этихъ девяти угловъ, то для косинусовъ шести остальныхъ нельзя было бы получить изъ условій (6) и (7) или (8) и (9) раціональныхъ выраженій.

Соотношенія, опредѣляющія косинусы девяти угловъ α, β,... черезъ углы φ, ψ и θ извѣстны подъ названіемъ *формулъ Эйлера.* Займемся ихъ выводомъ.

411. Вообразимъ двѣ вспомогательныя системы координатъ OX_1, OY_1, OZ_1 и OX_2, OY_2, OZ_2. Пусть первая изъ нихъ имѣетъ такое положеніе въ пространствѣ, въ которое первоначальная система OX, OY, OZ можетъ быть приведена посредствомъ вращенія около оси z-овъ на уголъ φ. Слѣдовательно, ось OZ_1 совпадаетъ съ осью OZ и ось OX_1 съ прямой OL. Пусть вторая вспомогательная система координатъ имѣетъ такое положеніе въ пространствѣ, въ которое первая OX_1, OY_1, OZ_1 можетъ быть приведена посредствомъ вращенія на уголъ θ около оси x-овъ или прямой OL. Слѣдовательно, ось OX_2 совпадаетъ съ осью OX_1 и ось OZ_2 съ осью OZ'. Очевидно далѣе, что если вторая вспомогательная система будетъ повернута около оси z-овъ на уголъ ψ, то она придетъ въ совпаденіе съ новою изъ данныхъ системъ OX', OY', OZ'.

Итакъ, прежняя изъ данныхъ системъ координатъ приводится въ совпаденіе съ новой посредствомъ трехъ послѣдовательныхъ вращеній: 1) около оси z-овъ на уголъ φ, 2) около оси x-овъ на уголъ θ и 3) вторично около оси z-овъ на уголъ ψ. Понятно, что посредствомъ тѣхъ же трехъ вращеній, произведенныхъ въ обратномъ порядкѣ и въ обратномъ направленіи, новая система координатъ приводится въ совпаденіе съ прежней.



Фиг. 105.

Легко видѣть изъ построенія, что когда двѣ прямоугольныя системы координатъ имѣютъ общее начало и одну общую ось (напр. ось z-овъ) (фиг. 105), то одна изъ координатъ какой-либо точки, именно координата, отмѣриваемая по общей оси, будетъ та же самая относительно обѣихъ системъ. Зависимость же между остальными координатами будетъ выражаться извѣстными формулами преобразованія прямоугольныхъ координатъ на плоскости (см. стр. 13).

На этомъ основаніи формулы для перехода отъ первоначальной системы координатъ OX, OY, OZ къ первой вспомогательной OX_1, OY_1, OZ_1 будутъ:

$$\left.\begin{array}{c} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \\ z = z_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Формулы же для перехода отъ первой вспомогательной системы ко второй вспомогательной OX_2, OY_2, OZ_2 будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2\cos\theta - z_2\sin\theta \\ z_1 &= y_2\sin\theta + z_2\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Наконецъ, формулы для перехода отъ второй вспомогательной системы къ новой изъ данныхъ OX', OY', OZ' будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x'\cos\psi - y'\sin\psi \\ y_2 &= x'\sin\psi + y'\cos\psi \\ z_2 &= z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Подставляя въ равенства (12) на мѣсто x_1, y_1, z_1 ихъ значенія изъ равенствъ (13), получимъ:

$$x = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi\cos\theta + z_2\sin\varphi\sin\theta\,,$$
$$y = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi\cos\theta - z_2\cos\varphi\sin\theta\,,$$
$$z = y_2\sin\theta + z_2\cos\theta\,.$$

Подставляя же въ эти послѣднія равенства на мѣсто x_2, y_2, z_2 ихъ значенія изъ равенствъ (14), получимъ:

$$x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) -$$
$$- y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta\,,$$
$$y = x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) -$$
$$- y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta\,,$$
$$z = x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta.$$

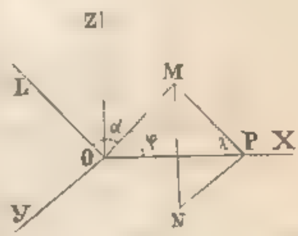
Эти три равенства и представляютъ формулы преобразованія координатъ, связывающія координаты точки относительно двухъ данныхъ системъ. Сравнивая ихъ съ формулами (5), съ которыми онѣ должны быть тождественны, мы и получимъ формулы Эйлера:

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta\,,$$
$$\cos\beta = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta\,,$$
$$\cos\gamma = \sin\varphi\sin\theta\,,$$
$$\cos\alpha' = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta\,,$$
$$\cos\beta' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta\,,$$
$$\cos\gamma' = -\cos\varphi\sin\theta\,,$$
$$\cos\alpha'' = \sin\psi\sin\theta\,,$$
$$\cos\beta'' = \cos\psi\sin\theta\,,$$
$$\cos\gamma'' = \cos\theta\,.$$

§ 4. Полярныя координаты.

412. Въ пространствѣ, какъ и на плоскости, кромѣ способа прямолинейныхъ координатъ могутъ быть употребляемы для опредѣленія положенія точки многіе другіе подобные же способы. Употребленіе полярныхъ координатъ во многихъ вопросахъ и даже наукахъ оказывается предпочтительнѣе по самой сущности этихъ вопросовъ, и потому необходимо, съ самаго же начала Геометріи въ пространствѣ, составить объ этихъ координатахъ столь же точное понятіе, какъ и о прямолинейныхъ.

Положимъ, что мы имѣемъ прямолинейную систему координатъ OX, OY, OZ и нѣкоторую точку M въ пространствѣ (фиг. 106). Соединимъ прямою линіей точку M съ началомъ координатъ и назовемъ разстояніе OM буквою r.



Фиг. 106.

Прямая OM будетъ составлять съ осью OX опредѣленный уголъ MOX, который условимся обозначать буквою φ.

Плоскость MOX будетъ составлять съ плоскостью XOY также опредѣленный двугранный уголъ, мѣрою котораго будетъ линейный уголъ MPN, получаемый отъ пересѣченія этого двуграннаго угла съ плоскостью, проведенною черезъ M перпендикулярно къ оси OX, или равный ему уголъ LOY, получаемый отъ пересѣченія того же двуграннаго угла плоскостью YOZ. Будемъ обозначать этотъ уголъ буквою λ.

Легко видѣть, что тремя величинами r, φ, λ положеніе точки M въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется точно такъ же, какъ тремя прямолинейными координатами. Дѣйствительно, зная уголъ λ, можно построить плоскость MOX. Затѣмъ, зная уголъ φ, можно построить въ этой плоскости прямую OM. Наконецъ, зная разстояніе r, можно построить и точку M.

Эти три величины r, φ, λ и называются *полярными координатами* точки M; при этомъ длину r принято называть *радіусомъ векторомъ*.

Тѣ начала, отъ которыхъ отмѣриваются эти величины, составляютъ собственно *систему координатъ*. Онѣ суть: 1) точка O, отъ которой отмѣривается разстояніе r и которая называется *полюсомъ* системы, 2) прямая OX, отъ которой отсчитывается уголъ φ и которая называется *полярною осью* и 3) плоскость XOY, отъ которой отсчитывается двугранный уголъ λ и которая называется *полярною плоскостью*.

413. Для того, чтобы въ опредѣленіи плоскости MOX посредствомъ угла λ не встрѣчалось неопредѣленности, достаточно отсчитывать этотъ

уголъ всегда въ одномъ направленіи и придавать ему положительныя значенія, не превышающія 360^0.

Точно также всякое сомнѣніе въ опредѣленіи направленія прямой OM устраняется, если, при предыдущемъ условіи, углу φ будемъ давать положительныя значенія, не превосходящія 180^0, условившись при этомъ, отъ какого направленія полярной оси и въ какую сторону этотъ уголъ долженъ отсчитываться.

Очевидно, что, при всѣхъ названныхъ условіяхъ, длинѣ r уже нѣтъ надобности приписывать отрицательныхъ значеній, такъ какъ углами λ и φ вполнѣ опредѣляется направленіе, въ которомъ слѣдуетъ отмѣривать это разстояніе по прямой OM.

Итакъ, всѣ три полярныя координаты мы можемъ считать величинами положительными, не выходящими изъ опредѣленныхъ предѣловъ, именно: для длины r предѣлы суть 0 и $+\infty$, для угла φ предѣлы суть 0^0 и 180^0, для угла λ предѣлы суть 0^0 и 360^0.

Иногда, впрочемъ, для опредѣленія направленія прямой OM въ плоскости MOX употребляется не уголъ φ, а уголъ α, дополнительный къ нему до 90^0 и измѣряющій наклоненіе прямой OM къ плоскости YOZ, проходящей черезъ полюсъ и перпендикулярной къ полярной оси. Такъ какъ прямая OM можетъ быть отклонена отъ плоскости YOZ или, что все то же, отъ прямой OL въ ту или другую сторону, то углу α приписываютъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія, но не превосходящія по абсолютной величинѣ 90^0.

Точно также можно условиться уголъ λ отсчитывать въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ и, слѣдовательно, придавать ему какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія, но при этомъ абсолютная величина его не должна превышать 180^0.

Если уголъ φ равняется нулю или 180^0, то точка M должна находиться на полярной оси, и положеніе ея опредѣлится въ этихъ случаяхъ однимъ только радіусомъ векторомъ r независимо отъ угла λ.

Точно также однимъ только условіемъ $r=0$, независимо отъ значеній угловъ φ и λ, опредѣляется единственная и опредѣленная точка пространства, именно точка O, полюсъ системы.

414. Всѣ точки, для которыхъ радіусъ векторъ имѣетъ одну и ту же величину, находятся, очевидно, на сферѣ, имѣющей центръ въ полюсѣ. Положеніе точки на этой сферѣ будетъ, слѣдовательно, опредѣляться только двумя координатами φ и λ, подобно тому, какъ двумя же координатами опредѣляется положеніе точки на плоскости.

При этомъ, вмѣсто угловъ φ и λ могутъ быть взяты измѣряющія ихъ дуги большихъ круговъ. Такимъ образомъ въ географіи опредѣ-

ляется положеніе точки на земной поверхности, гдѣ эти дуги называются *широтою и долготою.* Такимъ же образомъ въ астрономіи опредѣляется положеніе точки на небесной сферѣ, гдѣ эти дуги получаютъ различныя названія, смотря по началамъ, отъ которыхъ онѣ отсчитываются.

415. Вопросъ о преобразованіи полярныхъ координатъ въ пространствѣ рѣшается при помощи координатъ прямолинейныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ общія формулы для перехода отъ одной прямолинейной системы координатъ къ другой, также прямолинейной, намъ уже извѣстны, то достаточно найти формулы, связывающія полярныя координаты точки съ какими-нибудь прямолинейными. Удобнѣе всего для этой цѣли взять прямоугольную систему, въ связи съ которой мы и разсматривали выше полярную (фиг. 106), т. е. такую, которая имѣетъ начало координатъ въ полюсѣ полярной системы, которой ось OX совпадаетъ съ полярною осью и которой плоскость XOY совпадаетъ съ полярною плоскостью.

Для такой системы координаты точки M будутъ

$$x = OP, \qquad y = PN, \qquad z = NM.$$

Но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OPM и MNP имѣемъ

$$OP = r\cos\varphi, \qquad MP = r\sin\varphi$$

и

$$PN = MP\cos\lambda, \quad NM = MP\sin\lambda.$$

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\cos\lambda \\ z = r\sin\varphi\sin\lambda \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Эти формулы и выражаютъ прямолинейныя координаты въ полярныхъ.

Возвысивъ равенства (1) въ квадратъ и сложивъ результаты, получимъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Если же раздѣлимъ третье изъ равенствъ (1) на второе, то получимъ

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Кромѣ того, возвысивъ въ квадратъ два послѣднія равенства (1) и сложивъ результаты, найдемъ

$$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\varphi,$$

откуда

$$\sqrt{y^2+z^2}=r\sin\varphi,$$

и раздѣливъ это равенство на первое изъ равенствъ (1), получимъ

$$\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}=\operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Равенства (2), (3) и (4) даютъ намъ слѣдующія выраженія полярныхъ координатъ черезъ прямолинейныя

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x},$$

$$\lambda=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{z}{y}.$$

§ 5. Геометрическое значеніе уравненій.

416. Мы видѣли выше, какое значеніе имѣютъ условія

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=c,$$

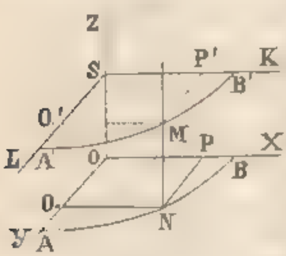
взятыя порознь или въ соединеніи между собою (см. стр. 288). Эти условія, дающія непосредственно величины координатъ, сами могутъ быть получаемы, какъ рѣшенія нѣсколькихъ уравненій съ соотвѣтствующимъ числомъ неизвѣстныхъ, означающихъ координаты.

Отдѣльно взятыя, такія уравненія могутъ быть также истолкованы геометрически. Постараемся найти ихъ значенія.

Положимъ сперва, что мы имѣемъ уравненіе съ двумя неизвѣстными

$$f(x, y)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

На плоскости XOY относительно осей OX и OY это уравненіе выражаетъ, какъ извѣстно, нѣкоторую линію AB (фиг. 107). Если возьмемъ на этой линіи какую-нибудь точку N, которой координаты суть $x=a$ и $y=b$, то величины эти будутъ удовлетворять разсматриваемому уравненію (1). Проведя же черезъ N прямую, параллельную оси OZ, будемъ имѣть, что всякая точка M, на ней лежащая, имѣетъ тѣ же координаты x и y. Уравненію (1), какъ аналитическому условію, подчиняются, слѣдовательно, всѣ точки прямой MN.



Фиг. 107.

Такъ какъ точка N взята произвольно на линіи AB, то сказанное о ней можетъ быть отнесено и ко всякой дру-

гой точкѣ этой линіи. Поэтому заключаемъ, что условію (1) удовлетворяютъ точки всѣхъ возможныхъ прямыхъ, параллельныхъ оси OZ и пересѣкающихъ линію AB. Всѣ эти прямыя образуютъ, какъ извѣстно, цилиндрическую поверхность, для которой линія AB есть управляющая.

Сказанное справедливо и для уравненій

$$f(x, z) = 0, \qquad f(y, z) = 0$$

съ тою лишь разницею, что прямыя, образующія выражаемыя ими поверхности, будутъ имѣть направленія другихъ осей координатъ.

Итакъ, *всякое уравненіе съ двумя какими-нибудь изъ трехъ неизвѣстныхъ x, y, z выражаетъ относительно прямолинейной системы координатъ цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельны одной изъ осей координатъ, а именно оси, носящей наименованіе недостающаго въ уравненіи неизвѣстнаго.*

417. Если присоединимъ къ уравненію (1) условіе

$$z = c$$

то совмѣстно они будутъ опредѣлять всѣ тѣ точки, которыя лежатъ одновременно и на цилиндрической поверхности (1) и на плоскости KSL, выражаемой этимъ условіемъ. Другими словами, совокупностью ихъ будетъ выражаться линія $A'B'$, по которой цилиндрическая поверхность (1) пересѣкается этой плоскостью.

Отсюда слѣдуетъ, что и линія AB выражается въ пространствѣ не однимъ только уравненіемъ (1), а совокупностью этого уравненія съ условіемъ $z = 0$, которое опредѣляетъ плоскость XOY.

418. Посмотримъ теперь, какое значеніе должно имѣть уравненіе вида

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

содержащее всѣ три неизвѣстныя x, y, z.

Будемъ сперва разсматривать его совмѣстно съ условіемъ $z = c$.

Такъ какъ при этомъ условіи оно обращается въ

$$F(x, y, c) = 0$$

и, въ этомъ видѣ, содержитъ только двѣ неизвѣстныя величины x и y, то заключаемъ, на основаніи предыдущаго, что совокупность уравненія (2) съ условіемъ $z = c$ выражаетъ нѣкоторую линію, лежащую въ плоскости, выражаемой этимъ условіемъ въ отдѣльности.

Если вообразимъ, что величина c измѣняется непрерывно, то плоскость эта будетъ перемѣщаться, оставаясь параллельною плоскости

XOY. Вмѣстѣ съ тѣмъ, будетъ, очевидно, измѣняться непрерывно же и линія, лежащая въ этой плоскости и выражаемая совокупностью условія $z=c$ съ уравненіемъ (2). При такомъ измѣненіи линія эта будетъ описывать нѣкоторую поверхность, всѣ точки которой имѣютъ координаты, удовлетворяющія уравненію (2).

Итакъ, при измѣняющемся c уравненіе (2) и условіе $z=c$ выражаютъ въ совокупности поверхность.

Но если c есть величина произвольно измѣняющаяся, то условіе $z=c$ не имѣетъ никакого значенія, и потому совмѣстно съ нимъ уравненіе (2) можетъ имѣть только то геометрическое значеніе, какое оно имѣетъ и безъ него, т. е. отдѣльно взятое.

Изъ сказаннаго видимъ, что *всякое уравненіе съ тремя неизвѣстными x, y, z выражаетъ относительно прямолинейной системы координатъ нѣкоторую поверхность*.

419. Не трудно убѣдиться въ справедливости обратнаго предложенія.

Положимъ, что мы имѣемъ какую-нибудь поверхность, которую будемъ разсматривать относительно нѣкоторой прямолинейной системы координатъ. Придадимъ перемѣннымъ x и y произвольныя значенія a и b. Другими словами, возьмемъ два условія

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

въ которыхъ a и b суть произвольныя величины. Этими условіями опредѣляется, какъ мы знаемъ (см. стр. 288), прямая линія, параллельная оси OZ, которая, вообще говоря, должна встрѣчать разсматриваемую поверхность въ одной или нѣсколькихъ точкахъ. Для каждой изъ этихъ точекъ координата z должна имѣть опредѣленную величину [1]).

Если величины a и b измѣнятся, то условія (3) будутъ выражать уже другую прямую, а потому и величины координаты z для точекъ пересѣченія этой прямой съ поверхностью будутъ также, вообще говоря, другія.

Отсюда видимъ, что координаты точекъ, принадлежащихъ разсматриваемой поверхности, связаны между собою такъ, что произвольнымъ значеніямъ двухъ координатъ соотвѣтствуютъ опредѣленныя значенія третьей, и всякое измѣненіе первыхъ влечетъ за собою, вообще говоря, измѣненіе послѣдней. Эта послѣдняя координата представляется, такимъ образомъ, съ аналитической точки зрѣнія функціей двухъ первыхъ и ея зависимость отъ нихъ выражается аналитически въ видѣ

$$z=f(x,y),$$

---

[1]) Исключеніе можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда разсматриваемая поверхность есть цилиндрическая, образующія которой параллельны оси OZ. Но и въ этомъ случаѣ тѣ же разсужденія останутся справедливыми, если придавать произвольныя значенія другимъ двумъ перемѣннымъ, напр. x и z.

что, послѣ простыхъ преобразованій, приводится къ виду

$$F(x, y, z) = 0,$$

а это есть общій видъ всякаго уравненія съ тремя неизвѣстными.

Итакъ, *всякая поверхность выражается относительно прямолинейной системы координатъ нѣкоторымъ уравненіемъ съ тремя неизвѣстными.*

420. Два уравненія съ тремя неизвѣстными

$$F_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_2(x, y, z) = 0$$

опредѣляютъ въ отдѣльности двѣ поверхности. Величины неизвѣстныхъ, удовлетворяющія обоимъ этимъ уравненіямъ одновременно, означаютъ, очевидно, координаты точекъ, лежащихъ на обѣихъ поверхностяхъ, т. е. координаты всѣхъ точекъ линіи, по которой поверхности пересѣкаются между собою. Отсюда слѣдуетъ, что *совокупность двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными выражаетъ относительно прямолинейной системы координатъ нѣкоторую линію, именно линію пересѣченія поверхностей, выражаемыхъ каждымъ изъ этихъ уравненій въ отдѣльности.*

Не трудно убѣдиться и въ обратномъ, т. е. въ томъ, что всякая линія можетъ быть выражена совокупностью двухъ уравненій.

Положимъ, что какая-нибудь линія разсматривается нами относительно нѣкоторой прямолинейной системы координатъ. Возьмемъ плоскость, выражаемую условіемъ $z = c$, гдѣ c есть произвольная величина. Разсматриваемая линія пересѣчется этой плоскостью въ одной или нѣсколькихъ точкахъ, для каждой изъ которыхъ координата z будетъ имѣть величину c. Величины же двухъ другихъ координатъ x и y будутъ при этомъ имѣть, вообще говоря, опредѣленныя значенія, обусловливаемыя съ одной стороны видомъ самой разсматриваемой линіи, а съ другой значеніемъ c координаты z. Изъ этого заключаемъ, что координаты точекъ, принадлежащихъ разсматриваемой линіи, связаны между собою такъ, что каждому произвольно взятому значенію одной соотвѣтствуютъ опредѣленныя значенія двухъ другихъ и, при измѣненіи первой, измѣняются, вообще говоря, и двѣ послѣднія. Аналитически это означаетъ, что двѣ координаты суть функціи третьей, что и выражается слѣдующимъ образомъ:

$$x = f_1(z) \qquad \text{и} \qquad y = f_2(z)$$

или

$$F_1(x, z) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_2(y, z) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Координаты каждой точки разсматриваемой линіи должны, такимъ образомъ, удовлетворять двумъ уравненіямъ, что и требовалось доказать.

421. Уравненія (4) выражаютъ въ отдѣльности двѣ цилиндрическ. поверхности, проходящія черезъ разсматриваемую линію, при чемъ образующія первой поверхности параллельны оси OY, а второй оси OX

Эти образующія могутъ, слѣдовательно, быть разсматриваемы, какъ проектирующія разсматриваемую линію въ направленіяхъ названныхъ осей. Вслѣдствіе этого на плоскости XOZ, т. е. при условіи $y=0$ первое изъ уравненій (4) выражаетъ проекцію разсматриваемой линіи Точно также второе изъ уравненій (4) можетъ быть разсматриваем. какъ уравненіе проекціи данной линіи на плоскость YOZ.

Если оси координатъ прямоугольныя, то это суть ортогональны. проекціи.

Исключивъ изъ двухъ уравненій (4) неизвѣстное z, получимъ уравненіе, содержащее только неизвѣстныя x и y и выражающее цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельны оси OZ. Такъ какъ координаты точекъ разсматриваемой кривой должны удовлетворять и этому уравненію, то эта цилиндрическая поверхность также проходитъ черезъ данную линію. Слѣдовательно, полученное уравненіе есть въ то же время уравненіе проекціи данной линіи на третью плоскость координатъ XOY.

Изъ того, что уравненія (4) вполнѣ опредѣляютъ выражаемую ими линію, заключаемъ, что всякая линія въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется ея проекціями на двѣ различныя и непараллельныя плоскости.

422. Величины неизвѣстныхъ x, y, z, удовлетворяющія одновременно тремъ уравненіямъ

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \quad F_3(x, y, z)=0,$$

должны быть, очевидно, координатами точекъ, принадлежащихъ всѣмъ тремъ поверхностямъ, выражаемымъ этими уравненіями въ отдѣльности, т. е. точекъ, въ которыхъ линія, опредѣляемая совокупностью двухъ изъ этихъ уравненій, пересѣкается съ поверхностью, выражаемою третьимъ.

Слѣдовательно, совокупность трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными опредѣляетъ относительно прямолинейной системы координатъ группу точекъ въ пространствѣ. Рѣшая эти уравненія совмѣстно, получимъ координаты этихъ точекъ.

Понятно, что если всѣ три уравненія суть первой степени, то ими опредѣляется только одна точка.

423. Все сказанное выше объ опредѣляемости поверхностей и линіи уравненіями относительно прямолинейной системы координатъ въ пространствѣ можетъ быть примѣнено въ общемъ смыслѣ и ко всякой другой системѣ координатъ. Такъ очевидно, что уравненіе вида

$$F(r, \varphi, \lambda)=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5$$

гдѣ r, φ, λ означаютъ полярныя координаты точки относительно нѣкоторой системы координатъ, опредѣляетъ поверхность и что совокупность двухъ такихъ уравненій опредѣляетъ линію въ пространствѣ. Также и обратно, всякая поверхность выражается относительно полярной системы координатъ уравненіемъ вида (5) и всякая линія совокупностью двухъ такихъ уравненій.

424. Изученіе поверхностей и линій, исходя изъ разсмотрѣнія выражающихъ ихъ уравненій, составляетъ главную и наиболѣе общую задачу Аналитической Геометріи въ пространствѣ. Понятно при этомъ, что изученіе поверхностей должно быть поставлено на первомъ планѣ. Линіи же, какъ опредѣляемыя пересѣченіемъ поверхностей, должны быть изучаемы лишь тогда, когда самыя необходимыя свойства поверхностей, служащихъ для ихъ опредѣленія, уже достаточно извѣстны.

Чтобы внести въ изученіе поверхностей систематичность и послѣдовательность, ихъ подраздѣляютъ на отдѣлы или классифицируютъ, причемъ основаніемъ для этой классификаціи служатъ тѣ же аналитическіе признаки, характеризующіе уравненія, какъ и въ Геометріи на плоскости (см. стр. 20 и 21). Такъ прежде всего поверхности раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя. Алгебраическія поверхности раздѣляются затѣмъ на порядки, причемъ поверхности m-го порядка суть тѣ, которыя выражаются относительно какой-либо прямолинейной системы координатъ уравненіями m-ой степени.

Мы видѣли, что формулы преобразованія прямолинейныхъ координатъ таковы, что каждая изъ прежнихъ координатъ выражается чрезъ новыя линейно. Отсюда слѣдуетъ, что отъ преобразованія координатъ степень уравненія, выражающаго поверхность, не можетъ измѣниться. Это показываетъ, что порядокъ поверхности есть ея свойство, не зависящее отъ выбора системы координатъ, къ которой эту поверхность относятъ.

425. Въ заключеніе сдѣлаемъ слѣдующія общія замѣчанія объ уравненіяхъ алгебраическихъ поверхностей, замѣчанія, которыя, какъ извѣстно, относятся и къ уравненіямъ линій на плоскости.

1) Если первая часть уравненія

$$F(x, y, z) = 0$$

разлагается на два множителя, такъ что

$$F(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z),$$

гдѣ $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ суть многочлены низшихъ степеней, то уравненіе это выражаетъ не одну поверхность, а совокупность двухъ поверхностей, которыя въ отдѣльности выражаются уравненіями

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ и } \psi(x, y, z) = 0.$$

2) Геометрическое значеніе всякаго уравненія не измѣняется, если обѣ его части будутъ помножены или раздѣлены на одну и ту же постоянную величину.

Справедливость этихъ замѣчаній выясняется точно такъ же, какъ и въ Геометріи на плоскости (см. стр. 22).

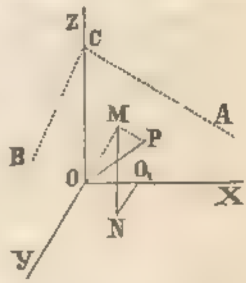
ГЛАВА ВТОРАЯ.

ПЛОСКОСТЬ.

§ 1. Уравненіе плоскости.

426. Плоскость есть алгебраическая поверхность перваго порядка Чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно доказать, что относительно прямолинейной системы координатъ всякая плоскость выражается уравненіемъ первой степени.

Положимъ, что OX, OY, OZ суть оси данной системы координатъ (фиг. 108), и пусть CA и CB будутъ прямыя, по которымъ произвольно взятая плоскость пересѣкаетъ плоскости XOZ и YOZ. Опустимъ на эту плоскость (ACB) перпендикуляръ OP изъ начала координатъ и обозначимъ длину его черезъ p, а углы, составляемые имъ съ осями координатъ, черезъ α, β, γ.



Фиг. 108.

Величинами α, β, γ и p опредѣляется вполнѣ положеніе точки P, а съ тѣмъ вмѣстѣ и самой плоскости ACB, какъ проходящей черезъ эту точку и перпендикулярной къ прямой OP. Уравненіе плоскости ACB должно, слѣдовательно, представлять зависимость между этими постоянными величинами (параметрами) и перемѣнными координатами x, y, z любой точки плоскости.

Возьмемъ какую-нибудь точку M въ пространствѣ и построимъ ея координаты

$$x = OQ, \quad y = QN, \quad z = NM.$$

Такъ какъ проекція ломаной $OQNM$ на перпендикуляръ OP равняется проекціи прямой OM на этотъ перпендикуляръ, то, обозначая длину прямой OM черезъ l, а уголъ MOP черезъ φ, будемъ имѣть

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l\cos\varphi.$$

*

Если точка M лежитъ гдѣ-нибудь на плоскости ACB, то прямая MP будетъ перпендикулярна къ OP и потому изъ прямоугольнаго треугольника OMP будемъ имѣть

$$l\cos\varphi = p, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

вслѣдствіе чего предыдущее соотношеніе принимаетъ видъ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Для всѣхъ же положеній точки M внѣ плоскости ACB равенство (1) не можетъ имѣть мѣста, а потому и соотношеніе (2) не будетъ справедливо. Это соотношеніе представляетъ, такимъ образомъ, зависимость между координатами только тѣхъ точекъ, которыя принадлежатъ плоскости ACB. Слѣдовательно, оно и есть уравненіе этой плоскости.

Первая часть этого уравненія есть многочленъ первой степени, въ которомъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть коэффиціенты при неизвѣстныхъ, а $-p$ постоянный или извѣстный членъ.

Если система координатъ прямоугольная, то между углами α, β, γ существуетъ соотношеніе

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если же система координатъ косоугольная, то между этими углами и углами, образуемыми осями координатъ между собою, имѣетъ мѣсто зависимость (см. стр. 298)

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

гдѣ λ, μ, ν означаютъ послѣдовательно углы YOZ, XOZ и XOY.

427. Общій видъ уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными таковъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Постараемся убѣдиться, что при всякихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ постоянныхъ A, B, C, D такое уравненіе выражаетъ плоскость.

Положимъ сперва, что система координатъ прямоугольная. Раздѣливъ обѣ части уравненія (4) на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, отчего значеніе его не можетъ измѣниться, дадимъ ему видъ

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

гдѣ

$$A' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad B' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$C' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad D' = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,$$

то должны существовать такіе три угла α, β, γ, что

$$\cos\alpha = A', \quad \cos\beta = B', \quad \cos\gamma = C'$$

и, притомъ, это будутъ углы, составляемые нѣкоторой прямой съ осями координатъ. Обозначая далѣе черезъ p такую длину, чтобы было

$$p = -D',$$

мы можемъ уравненіе (5) написать такъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Въ этомъ видѣ оно тождественно съ уравненіемъ (2) и потому выражаетъ плоскость. Слѣдовательно, и уравненіе (4) выражаетъ плоскость.

Такимъ образомъ, уравненіе одной и той же плоскости можетъ быть представлено и въ видѣ (2) и въ видѣ (4). Уравненіе (4) называется *общимъ уравненіемъ* плоскости, а уравненіе (2) ея уравненіемъ *въ нормальной формѣ*.

Изъ сказаннаго видимъ, что, по коэффиціентамъ общаго уравненія, углы, составляемые перпендикуляромъ къ плоскости съ осями координатъ, опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а разстояніе плоскости отъ начала координатъ опредѣляется формулою

$$p = \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

428. Такъ какъ отъ преобразованія координатъ степень уравненія не измѣняется, то заключаемъ, что уравненіе (4), и относительно косоугольной системы координатъ, выражаетъ также плоскость. Въ этомъ можно, впрочемъ, убѣдиться и непосредственно, доказывая, какъ и въ предыдущемъ, что умноженіемъ обѣихъ частей уравненія (4) на нѣко-

торый постоянный множитель это уравненіе можетъ быть приведено къ виду (2). Въ самомъ дѣлѣ, обозначая этотъ множитель буквою M, будемъ имѣть

$$\cos\alpha = MA,\quad \cos\beta = MB,\quad \cos\gamma = MC.$$

Эти косинусы должны удовлетворять соотношенію (3), которое можно представить въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & 0 \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & 0 \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & 0 \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вслѣдствіе этого, обозначая опредѣлители

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & A \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & B \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & C \\ A, & B, & C, & 0 \end{vmatrix}$$

послѣдовательно черезъ $\triangle$ и $-H$, получимъ

$$HM^2 = \triangle,$$

откуда

$$M^2 = \frac{\triangle}{H}.$$

Такимъ образомъ, множитель M, приводящій общее уравненіе (4) къ нормальной формѣ (2), опредѣлится.

Слѣдуетъ замѣтить, что этотъ множитель не можетъ равняться нулю. Въ самомъ дѣлѣ, знаменатель H предыдущаго выраженія, какъ опредѣлитель, котораго всѣ элементы суть данныя конечныя величины, есть также величина конечная. Что же касается числителя $\triangle$, то онъ не можетъ равняться нулю по слѣдующей причинѣ.

Очевидно, что

$$\triangle = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Прибавляя и отнимая во второй части $\cos^2\lambda\cos^2\mu$, дадимъ этому выраженію видъ

$$\triangle = (1 - \cos^2\lambda)(1 - \cos^2\mu) - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2$$

или

$$\triangle = \sin^2\lambda\sin^2\mu - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2 =$$

$$= [\cos(\lambda - \mu) - \cos\nu][\cos\nu - \cos(\lambda + \mu)] =$$

$$= 4\sin\frac{\lambda + \mu + \nu}{2}\sin\frac{\mu + \nu - \lambda}{2}\sin\frac{\lambda + \nu - \mu}{2}\sin\frac{\lambda + \mu - \nu}{2},$$

откуда усматриваемъ, что равенство $\triangle = 0$ можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда три оси координатъ лежатъ въ одной плоскости, что невозможно.

429. Уравненіе плоскости часто употребляется еще въ видѣ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

къ которому приводится общее уравненіе (4), если раздѣлимъ обѣ его части на $-D$ и положимъ

$$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Полагая въ уравненіи (6) $y=0$, $z=0$, получимъ $x=a$. Слѣдовательно, a означаетъ разстояніе отъ начала координатъ той точки, въ которой плоскость пересѣкается съ осью OX. Подобное же значеніе имѣютъ величины b и c по отношенію къ другимъ осямъ координатъ.

Итакъ, три постоянныя a, b, c въ уравненіи (6) означаютъ длины трехъ отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ на осяхъ координатъ плоскостью, которая этимъ уравненіемъ выражается.

Если p есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость (6), а α, β, γ углы его съ осями координатъ, то будемъ имѣть

$$p=a\cos\alpha=b\cos\beta=c\cos\gamma.$$

Отсюда видно, что, умножая обѣ части уравненія (6) на p, приведемъ его къ нормальной формѣ.

430. Въ общемъ уравненіи плоскости (4) коэффиціенты A, B, C, D могутъ имѣть какія угодно дѣйствительныя величины. Въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣкоторые изъ этихъ коэффиціентовъ равняются нулю, плоскость имѣетъ особенныя расположенія относительно системы координатъ. Обратимъ вниманіе на эти случаи.

Если $A=0$, то уравненіе обращается въ

$$By+Cz+D=0$$

и содержитъ только два неизвѣстныхъ y и z. Согласно сказанному о такихъ уравненіяхъ вообще (см. стр. 317), оно должно выражать плоскость, параллельную оси OX.

Подобнымъ же образомъ въ случаяхъ, когда $B=0$ или $C=0$, общее уравненіе (4) выражаетъ плоскость, параллельную соотвѣтственно оси OY или оси OZ.

Если $D=0$, то уравненію (4) удовлетворимъ, полагая $x=0$, $y=0$, $z=0$. Это значитъ, что плоскость проходитъ въ этомъ случаѣ черезъ начало координатъ.

Если $A=B=0$, то уравненіе (4) обращается въ

$$Cz+D=0$$

и удовлетворяется только единственнымъ значеніемъ неизвѣстнаго z при неопредѣленныхъ значеніяхъ двухъ другихъ неизвѣстныхъ. Оно равнозначуще, слѣдовательно, съ условіемъ $z=c$ и представляетъ плоскость, параллельную плоскости XOY.

Подобнымъ же образомъ въ случаяхъ, когда $A=C=0$ или $B=C=0$, общее уравненіе (4) выражаетъ плоскость, параллельную соотвѣтственно плоскости XOZ или плоскости YOZ.

Если $A=D=0$, то уравненію (4) удовлетворимъ, полагая $y=0$, $z=0$, при неопредѣленномъ значеніи x. Слѣдовательно, плоскость содержитъ въ себѣ ось OX. Въ случаяхъ же $B=D=0$ или $C=D=0$, она проходитъ соотвѣтственно черезъ ось OY или ось OZ

Если $A=B=D=0$, то уравненіе (4) обращается въ $z=0$ и выражаетъ плоскость XOY Подобнымъ же образомъ, при $A=C=D=0$, оно выражаетъ плоскость XOZ, а при $B=C=D=0$ плоскость YOZ.

Наконецъ, можетъ случиться, что $A=B=C=0$, но постоянный членъ D не равняется нулю. Въ этомъ случаѣ уравненіе (4) невозможно ни при какихъ конечныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Но его слѣдуетъ понимать, какъ выражающее плоскость, безконечно удаленную всѣми своими точками. Дѣйствительно, представивъ уравненіе (4) въ видѣ (6), мы будемъ имѣть изъ формулъ (7), что въ настоящемъ случаѣ

$$a=\infty, \quad b=\infty, \quad c=\infty.$$

Это показываетъ, что точки пересѣченія плоскости съ осями координатъ, а слѣдовательно и всѣ остальныя ея точки, суть безконечно удаленныя.

431. Плоскость можетъ быть разсматриваема, какъ данная или какъ искомая. Въ первомъ случаѣ должны считаться данными или извѣстными всѣ постоянныя величины, входящія въ уравненіе плоскости, въ какомъ бы изъ указанныхъ выше видовъ это уравненіе ни разсматривалось. Если же плоскость неизвѣстна и ищется по какимъ-либо условіямъ, то вопросъ состоитъ въ нахожденіи этихъ постоянныхъ по величинамъ, извѣстнымъ изъ условій.

При этомъ нужно замѣтить, что если уравненіе искомой плоскости разсматривается въ общемъ видѣ

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

то опредѣленію должны подлежать не самые коэффиціенты A, B, C, D, а отношенія какихъ-либо трехъ изъ нихъ къ четвертому или какія-либо четыре величины, пропорціональныя этимъ коэффиціентамъ,—величины, изъ коихъ одна можетъ быть совершенно произвольною. Это слѣдуетъ изъ того, что значеніе уравненія не мѣняется отъ умноженія всѣхъ его членовъ на *произвольный* постоянный множитель.

Въ слѣдующемъ мы разсмотримъ нѣсколько простыхъ, но важныхъ по своему теоретическому значенію задачъ, въ которыхъ плоскости даются или отыскиваются.

§ 2. Задачи на плоскости.

432. *Найти уголъ между двумя данными плоскостями.*

Пусть уравненія данныхъ плоскостей будутъ

и
$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Уголъ между двумя плоскостями равняется, какъ извѣстно, углу между прямыми, къ нимъ перпендикулярными.

Если система координатъ прямоугольная, то, называя чрезъ α, β, γ углы, составляемые перпендикуляромъ къ первой плоскости съ осями координатъ, а чрезъ α', β', γ' углы, имѣющіе то же значеніе для второй плоскости, будемъ имѣть (см. стр. 296), что искомый уголъ φ опредѣлится по формулѣ

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

изъ которой мы также имѣли (см. стр. 297)

$$\sin^2\varphi = (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + \\ + (\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2.$$

Но мы видѣли выше, что для плоскости, выражаемой первымъ изъ уравненій (1), должно быть

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Точно также для второй плоскости должно быть

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \qquad \cos\beta' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Вслѣдствіе этого для косинуса и синуса искомаго угла φ получимъ слѣдующія выраженія:

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(AC'-CA')^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(AC'-CA')^2}}{AA'+BB'+CC'}.$$

433. Когда разсматриваемыя плоскости взаимно перпендикулярны, то $\cos\varphi = 0$. Отсюда заключаемъ, что условіе перпендикулярности двухъ плоскостей, выражаемыхъ относительно прямоугольной системы координатъ общими уравненіями (1), есть

$$AA' + BB' + CC' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Если же данныя плоскости параллельны между собою, то перпендикуляры къ нимъ составляютъ равные углы съ осями координатъ, такъ что должно быть

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\beta = \cos\beta', \quad \cos\gamma = \cos\gamma';$$

отсюда находимъ

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Слѣдовательно, условіе параллельности двухъ плоскостей есть пропорціональность коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ x, y, z въ ихъ уравненіяхъ.

434. Если система координатъ косоугольная, то уголъ φ между плоскостями (1) опредѣлится изъ соотношенія

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma', & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

(см. стр. 298).

гдѣ α, β, γ, α', β', γ', означаютъ также углы перпендикуляровъ къ этимъ плоскостямъ съ осями координатъ.

Это соотношеніе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma', & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix} \cos\varphi = 0$$

и такъ какъ въ настоящемъ случаѣ

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = AM\ ,\quad \cos\beta = BM\ ,\quad \cos\gamma = CM\ ,\\ \cos\alpha' = A'M',\quad \cos\beta' = B'M',\quad \cos\gamma' = C'M',\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

гдѣ M и M' суть постоянные множители, приводящіе уравненія (1) къ нормальной формѣ, (см. стр. 326), то будемъ имѣть

$$\cos\varphi = -\begin{vmatrix} 1\ , & \cos\nu\ , & \cos\mu\ , & A \\ \cos\nu\ , & 1\ , & \cos\lambda\ , & B \\ \cos\mu\ , & \cos\lambda\ , & 1\ , & C \\ A'\ , & B'\ , & C'\ , & 0 \end{vmatrix} \frac{MM'}{\triangle}.$$

Принимая во вниманіе, что, какъ показано выше, множители M и M' не могутъ равняться нулю и опредѣлитель $\triangle$ есть величина конечная, заключаемъ, что условіе перпендикулярности плоскостей (1) въ случаѣ косоугольной системы координатъ есть

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \cos\nu\ , & \cos\mu\ , & A \\ \cos\nu\ , & 1\ , & \cos\lambda\ , & B \\ \cos\mu\ , & \cos\lambda\ , & 1\ , & C \\ A'\ , & B'\ , & C'\ , & 0 \end{vmatrix} = 0.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Что же касается условія параллельности двухъ плоскостей (1), то, какъ видно изъ равенствъ (4), оно и въ случаѣ косоугольной системы координатъ то же самое, какъ и въ случаѣ прямоугольной.

435. *Найти точку пересѣченія трехъ данныхъ плоскостей.*

Положимъ, что уравненія данныхъ плоскостей суть

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0,\\ A'x + B'y + C'z + D' = 0,\\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0.\end{aligned}$$

Координаты искомой точки, какъ принадлежащей всѣмъ тремъ плоскостямъ, должны удовлетворять этимъ тремъ уравненіямъ. Рѣшая эту систему уравненій, получимъ, слѣдовательно (см. стр. 29)

$$x = \frac{P}{\triangle},\qquad y = \frac{Q}{\triangle},\qquad z = \frac{R}{\triangle},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

гдѣ

$$\triangle = \begin{vmatrix} A\ , & B\ , & C \\ A'\ , & B'\ , & C' \\ A''\ , & B''\ , & C'' \end{vmatrix},$$

или

$$\triangle = A(B'C'' - C'B'') + A'(B''C - C''B) + A''(BC' - CB')$$

и

$$P = D(C'B'' - B'C'') + D'(C''B - B''C) + D''(CB' - BC'),$$
$$Q = D(A'C'' - C'A'') + D'(A''C - C''A) + D''(AC' - CA'),$$
$$R = D(B'A'' - A'B'') + D'(B''A - A''B) + D''(BA' - AB').$$

Кромѣ общаго случая, когда три данныя плоскости образуютъ триграннный уголъ и, слѣдовательно, имѣютъ единственную и опредѣленную общую точку, возможны слѣдующіе частные случаи ихъ относительнаго расположенія.

1) Когда три данныя плоскости параллельны одной и той же прямой и, слѣдовательно, образуютъ тригранную призму. Въ этомъ случаѣ ихъ общая точка, какъ находящаяся при пересѣченіи параллельныхъ прямыхъ, есть безконечно удаленная, и потому общій знаменатель $\triangle$ выраженій (6) долженъ равняться нулю [1]).

2) Когда всѣ три плоскости проходятъ черезъ одну прямую. Въ этомъ случаѣ всѣ точки этой прямой принадлежатъ каждой изъ данныхъ плоскостей, а потому координаты искомой общей точки должны быть неопредѣленными. Слѣдовательно, должны равняться нулю всѣ четыре многочлена $\triangle$, P, Q, R. Сюда же относится и тотъ случай, когда всѣ три плоскости параллельны между собою. Равенство нулю опредѣлителей $\triangle$, P, Q, R въ этомъ случаѣ очевидно изъ условія параллельности.

3) Когда три данныя плоскости совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ, каждая точка одной изъ плоскостей принадлежитъ и двумъ другимъ, и искомыя рѣшенія должны быть также неопредѣленными. Такъ какъ три данныя уравненія имѣютъ въ этомъ случаѣ одно и то же геометрическое значеніе, то первыя ихъ части могутъ различаться только постояннымъ множителемъ. Это значитъ, что должно быть

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} \quad \text{и} \quad \frac{A}{A''} = \frac{B}{B''} = \frac{C}{C''} = \frac{D}{D''}$$

436. Если точка пересѣченій трехъ изъ плоскостей, выражаемыхъ уравненіями

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0, \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' &= 0, \end{aligned}$$

---

[1]) Если при этомъ три прямыя, по которымъ пересѣкаются данныя плоскости, параллельны одной изъ плоскостей координатъ, то одинъ изъ числителей P, Q, R также будетъ равняться нулю.

принадлежитъ и четвертой, то координаты этой точки должны удовлетворять всѣмъ четыремъ уравненіямъ. Эти уравненія должны быть, слѣдовательно, совмѣстимы, для чего, какъ извѣстно (см. стр. 31), должно быть

$$\begin{vmatrix} A\,, & B\,, & C\,, & D \\ A'\,, & B'\,, & C'\,, & D' \\ A''\,, & B''\,, & C''\,, & D'' \\ A'''\,, & B'''\,, & C'''\,, & D''' \end{vmatrix} = 0$$

Это равенство представляетъ, такимъ образомъ, условіе, при которомъ четыре плоскости, данныя общими уравненіями, проходятъ черезъ одну точку.

437. *Найти плоскость, проходящую черезъ три данныя точки.*

Положимъ, что данныя точки суть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и пусть уравненіе искомой плоскости будетъ

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Вопросъ состоитъ въ отысканіи величинъ, пропорціональныхъ коэффиціентамъ A, B, C, D, по координатамъ данныхъ точекъ.

Условіе, что искомая плоскость проходитъ черезъ каждую изъ данныхъ точекъ, выражается равенствами

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

изъ которыхъ находимъ (см. стр. 30 и 31)

$$A = k\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = -k\begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = k\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}, \qquad D = -k\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix},$$

гдѣ k есть произвольный множитель.

Подставляя эти величины на мѣсто коэффиціентовъ уравненія (7) мы и получимъ уравненіе искомой плоскости.

Такъ какъ это уравненіе есть результатъ исключенія изъ четырехъ равенствъ (7) и (8) величинъ A, B, C, D, то его можно представить въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z\,, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если плоскость, проходящая через три данныя точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), проходитъ еще черезъ четвертую (x_4, y_4, z_4), то координаты этой послѣдней должны удовлетворять найденному уравненію, т. е. должно быть

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть, слѣдовательно, условіе что четыре точки, данныя ихъ координатами, лежатъ въ одной плоскости.

438. *Найти плоскость, проходящую черезъ двѣ данныя точки и перпендикулярную къ данной плоскости.*

Положимъ, что относительно прямоугольной системы координатъ данныя точки опредѣляются координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, а данная плоскость выражается уравненіемъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Если уравненіе искомой плоскости представимъ въ видѣ

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

то условія, что эта плоскость проходитъ чрезъ данныя точки, будутъ

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

и

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Условіе же перпендикулярности искомой плоскости съ данною есть, какъ извѣстно,

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Подобно тому, какъ и въ предыдущей задачѣ, искомое уравненіе должно получиться, какъ результатъ исключенія неизвѣстныхъ A, B, C, D изъ уравненія (9) и послѣднихъ трехъ условій. Это уравненіе есть, слѣдовательно,

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ A_1, & B_1, & C_1, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

439. *Найти плоскость, перпендикулярную къ тремъ даннымъ плоскостямъ.*

Положимъ, что уравненія данныхъ плоскостей суть

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\,,$$

и пусть

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

будетъ уравненіе искомой плоскости.

Условія перпендикулярности искомой плоскости съ данными будутъ

$$\left.\begin{array}{l} AA_1+BB_1+CC_1=0 \\ AA_2+BB_2+CC_2=0 \\ AA_3+BB_3+CC_3=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Для того, чтобы они были возможны совмѣстно при A, B и C не равныхъ нулю, необходимо, чтобы было

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

т. е. чтобы три данныя плоскости были параллельны одной и той же прямой (см. стр. 332).

Если это соотношеніе дѣйствительно имѣетъ мѣсто, то изъ условій (11) находимъ, что коэффиціенты A, B, C въ уравненіи (10) пропорціональны опредѣлителямъ

$$B_1C_2-C_1B_2\,,\quad C_1A_2-A_1C_2\,,\quad A_1B_2-B_1A_2\,,$$

постоянный же членъ D остается неопредѣленнымъ, что и должно быть, потому что въ этомъ случаѣ требованіямъ задачи должно удовлетворять безчисленное множество плоскостей, параллельныхъ между собою.

Если же соотношеніе (12) не имѣетъ мѣста, то исключая, какъ и въ предыдущей задачѣ, неизвѣстныя A, B, C, D изъ уравненія (10) и условій (11), получимъ искомое уравненіе въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ A_1, & B_1, & C_1, & 0 \\ A_2, & B_2, & C_2, & 0 \\ A_3, & B_3, & C_3, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая опредѣлителя, составляющаго первую часть, по элементамъ первой строки, видимъ, что въ этомъ уравненіи коэффиціенты

при x, y, z суть нули, а постоянный членъ не равенъ нулю. Это показываетъ (см. стр. 328), что требованіямъ задачи можетъ удовлетворять только безконечно удаленная плоскость.

440. *Найти плоскость, проходящую черезъ данную точку и параллельную данной плоскости.*

Если положимъ, что данная точка есть (x_1, y_1, z_1), а данная плоскость выражается уравненіемъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

и допустимъ, что уравненіе искомой плоскости имѣетъ видъ

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, въ силу перваго изъ условій задачи, должно имѣть мѣсто тождество

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Вслѣдствіе этого послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

При неопредѣленныхъ A, B, C это есть уравненіе любой плоскости, проходящей черезъ данную точку. Но чтобы выполнялось и второе условіе задачи, коэффиціенты A, B, C должны быть пропорціональны соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ въ уравненіи данной плоскости.

Принимая ихъ, въ частности, равными этимъ коэффиціентамъ, получимъ окончательно уравненіе искомой плоскости въ видѣ

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0.$$

441. *Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость.*

Положимъ сперва, что уравненіе плоскости дано въ нормальной формѣ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

и пусть координаты данной точки будутъ x_1, y_1, z_1.

Вообразимъ плоскость, проходящую черезъ данную точку и параллельную данной плоскости. Уравненіе ея, какъ видно изъ предыдущаго, будетъ

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0,$$

гдѣ

$$p' = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma.$$

Искомая длина, очевидно, равняется разстоянію между этими двумя параллельными плоскостями, т. е. разности перпендикуляровъ p' и p, опущенныхъ на нихъ изъ начала координатъ. Обозначая ея абсолютную величину черезъ l, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$l = \pm (p' - p),$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ случаю, когда $p' > p$, т. е. когда данная точка находится по другую сторону отъ данной плоскости, нежели начало координатъ, нижній же знакъ—случаю $p' < p$, т. е. когда данная точка и начало координатъ находятся по одну и ту же сторону отъ данной плоскости.

Подставляя въ послѣднее равенство на мѣсто p' его предыдущее выраженіе, получимъ окончательно

$$l = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p).$$

Такимъ образомъ видимъ, что длина перпендикуляра изъ данной точки на данную плоскость равняется результату подстановки въ первую часть уравненія данной плоскости, представленнаго въ нормальной формѣ, на мѣсто перемѣнныхъ x, y, z координатъ данной точки.

Если уравненіе плоскости дано въ общемъ видѣ

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, чтобы найти длину перпендикуляра, нужно прежде всего привести это уравненіе къ нормальной формѣ.

Такъ, въ случаѣ прямоугольной системы координатъ, искомая длина перпендикуляра выразится слѣдующимъ образомм:

$$l = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

442. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ данныхъ плоскостей.*

Пусть уравненія данныхъ плоскостей будутъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если обозначимъ черезъ M_1 и M_2 множители, приводящіе эти уравненія къ нормальной формѣ, то разстоянія какой-нибудь точки (x, y, z) отъ данныхъ плоскостей выразятся слѣдующимъ образомъ.

$$\pm (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) M_1 \quad \text{и} \quad \mp (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) M_2.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе искомаго геометрическаго мѣста есть

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)M_1 \pm (A_2x+B_2y+C_2z+D_2)M_2=0\,,$$

что представляетъ двѣ плоскости, проходящія чрезъ линію пересѣченія данныхъ плоскостей и дѣлящія двугранные углы между ними пополамъ.

Если система координатъ прямоугольная, то уравненія этихъ плоскостей будутъ

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=0\,.$$

443. *Найти площадь треугольника по координатамъ его вершинъ.*

Положимъ, что данныя вершины суть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и обозначимъ чрезъ A, B, C опредѣлители

$$\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы видѣли (см. стр. 333), что это суть коэффиціенты при x, y, z въ уравненіи, выражающемъ плоскость даннаго треугольника.

Если система координатъ прямоугольная, то эти выраженія означаютъ, какъ извѣстно (см. стр. 52), удвоенныя площади треугольниковъ, находящихся на плоскостяхъ координатъ и представляющихъ, очевидно, проекціи даннаго треугольника на эти плоскости. Вслѣдствіе этого, обозначая черезъ U площадь даннаго треугольника, будемъ имѣть (см. стр. 303).

$$U=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

444. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ выраженіе площади даннаго треугольника можно вывести слѣдующимъ образомъ.

Будемъ обозначать, какъ и прежде, черезъ λ, μ и ν углы YOZ, XOZ и XOY, и пусть U' будетъ площадь проекціи даннаго треугольника на плоскость XOY прямыми параллельными оси OZ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть (см. стр. 51).

$$2U'=C\sin\nu\,.$$

Очевидно, что ортогональныя проекціи площадей U и U' на какую-нибудь плоскость, перпендикулярную къ оси OZ должны быть равны между собою. Это равенство можетъ быть выражено такъ:

$$2U\cos\gamma=2U'\cos\gamma'=C\sin\nu\cos\gamma'\,,$$

гдѣ γ и γ' суть углы оси OZ съ перпендикулярами къ плоскости даннаго треугольника и къ плоскости XOY.

Если обозначимъ, далѣе черезъ M и M' постоянные множители, приводящіе уравненія этихъ плоскостей къ нормальной формѣ, то будемъ имѣть

$$\cos\gamma = CM \quad \text{и} \quad \cos\gamma' = M',$$

и потому изъ предыдущаго равенства находимъ

$$2U = \frac{M'}{M}\sin\nu.$$

Но, какъ видно изъ указаннаго выше значенія множителя M (см. стр. 326).

$$\frac{M'}{M} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H'}},$$

гдѣ

$$H = -\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & A \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & B \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & C \\ A, & B, & C, & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$H' = -\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & 0 \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & 0 \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu \\ \cos\nu, & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\nu.$$

Слѣдовательно,

$$U = \frac{\sqrt{H}}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Равенство (14) получается отсюда, какъ частный случай.

445. *Найти объемъ тетраэдра по координатамъ его вершинъ.*

Объемъ тетраэдра или триграннной пирамиды равняется, какъ извѣстно, трети произведенія площади основанія на высоту.

Пусть вершины даннаго тетраэдра будутъ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4).

Примемъ плоскость, проходящую черезъ три первыя изъ этихъ точекъ за основаніе тетраэдра и обозначимъ черезъ U площадь треугольника, имѣющаго эти три вершины. Обозначая, далѣе, черезъ l длину перпендикуляра изъ четвертой вершины на основаніе, а черезъ V искомый объемъ тетраэдра, будемъ имѣть

$$3V = U.l.$$

*

Если система координатъ прямоугольная, и мы положимъ, что плоскость основанія выражается уравненіемъ

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

которое, какъ извѣстно (см. стр. 333), имѣетъ видъ

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то должно быть (см. стр. 337 и 338)

$$l = \pm \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и

$$U = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{2}.$$

Слѣдовательно

$$V = \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D}{6}$$

или

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Если система координатъ косоугольная, то, какъ мы видѣли,

$$l = (Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D)M$$

и

$$U = \frac{\sqrt{H}}{2},$$

и такъ какъ

$$M^2 = \frac{\triangle}{H},$$

то получимъ

$$V = \frac{(Ax + By + Cz + D)\sqrt{\triangle}}{6}$$

или

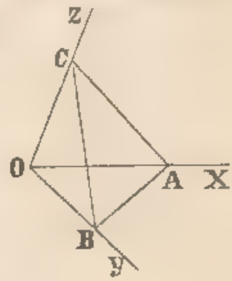
$$V=\frac{\sqrt{\Delta}}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

гдѣ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

446. Въ частномъ случаѣ, когда три какія-нибудь грани тетраэдра совпадаютъ съ плоскостями координатъ, послѣднее выраженіе принимаетъ болѣе простой видъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ длины трехъ реберъ тетраэдра OA, OB, OC (фиг. 109), совпадающихъ съ осями координатъ, послѣдовательно чрезъ a, b, c, будемъ, очевидно, имѣть

для точки O $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$.
для точки A $x_2=a$, $y_2=0$, $z_2=0$,
для точки B $x_3=0$, $y_3=b$, $z_3=0$,
для точки C $x_4=0$, $y_4=0$, $z_4=c$.



Фиг. 109.

Вслѣдствіе этого получимъ

$$V=\frac{abc}{6}\sqrt{\Delta}, \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

выраженіе объема тетраэдра чрезъ длины трехъ его смежныхъ реберъ и углы между ними.

Если положимъ, что a', b', c' суть длины трехъ остальныхъ реберъ BC, AC, AB, противолежащихъ послѣдовательно ребрамъ a, b, c, то изъ треугольниковъ BOC, AOC, AOB будемъ имѣть

$$a'^2=b^2+c^2-2bc\cos\lambda,$$
$$b'^2=a^2+c^2-2ac\cos\mu,$$
$$c'^2=a^2+b^2-2ab\cos\nu.$$

Опредѣляя отсюда $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ и подставляя ихъ въ равенство (18), получимъ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & \frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab}, & \frac{a^2+c^2-b'^2}{2ac} \\ \frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab}, & 1, & \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc} \\ \frac{a^2+c^2-b'^2}{2ac}, & \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc}, & 1 \end{vmatrix}$$

Вслѣдствіе этого изъ равенства (19) находимъ

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+b^2-c'^2, & a^2+c^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2, & 2b^2, & b^2+c^2-a'^2 \\ a^2+c^2-b'^2, & b^2+c^2-a'^2, & 2c^2 \end{vmatrix}$$

выраженіе объема тетраэдра чрезъ длины его реберъ

Послѣднее равенство, очевидно, тождественно съ слѣдующимъ

$$288\,V^2 = -\begin{vmatrix} 0, & a^2, & b^2, & c^2, & 1 \\ a^2, & -2a^2, & c'^2-a^2-b^2, & b'^2-a^2-c^2, & 0 \\ b^2, & c'^2-a^2-b^2, & -2b^2, & a'^2-b^2-c^2, & 0 \\ c^2, & b'^2-a^2-c^2, & a'^2-b^2-c^2, & 2c^2, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

въ чемъ легко убѣдиться, разлагая послѣдній опредѣлитель по элементамъ пятой строки и пятаго столбца.

Если же въ этомъ опредѣлителѣ прибавимъ элементы первой строки къ элементамъ трехъ слѣдующихъ строкъ и элементы перваго столбца къ элементамъ трехъ слѣдующихъ столбцовъ, отъ чего, какъ извѣстно (см. стр. 28), величина опредѣлителя не измѣняется, то получимъ

$$288\,V^2 = -\begin{vmatrix} 0, & a^2, & b^2, & c^2, & 1 \\ a^2, & 0, & c'^2, & b'^2, & 1 \\ b^2, & c'^2, & 0, & a'^2, & 1 \\ c^2, & b'^2, & a'^2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

447. *Найти объемъ тетраэдра по уравненіямъ его граней.*

Пусть уравненія граней будутъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$
$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0.$$

Рѣшеніе вопроса состоитъ въ опредѣленіи координатъ точекъ пересѣченія этихъ плоскостей (т. е. вершинъ тетраэдра) и внесеніи ихъ въ выраженіе (17) или (16).

Обозначимъ чрезъ R опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix}$$

и чрезъ α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2 ... его опредѣлители миноры, соотвѣтствующіе послѣдовательно элементамъ A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, ... Въ такомъ случаѣ для координатъ вершинъ тетраэдра будемъ имѣть выраженія (см. стр. 331)

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\delta_1}, \qquad y_1 = \frac{\beta_1}{\delta_1}, \qquad z_1 = \frac{\gamma_1}{\delta_1},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_2}{\delta_2}, \qquad y_2 = \frac{\beta_2}{\delta_2}, \qquad z_2 = \frac{\gamma_2}{\delta_2},$$

и т. д.

Вносяэти значенія координатъ въ выраженіе (17) объема тетраэдра, получимъ

$$V = \frac{\sqrt{\Delta}}{6\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4} \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель, составляющій послѣдній множитель этого выраженія, есть производный опредѣлителя R и, слѣдовательно, равняется R^3.

Такимъ образомъ окончательно получимъ

$$V = \frac{R^3\sqrt{\Delta}}{6\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4}.$$

§ 3. Примѣненіе сокращеннаго способа.

448. Сокращенный способъ состоитъ, какъ мы видѣли (см. стр. 74), въ разсужденіи надъ первыми частями уравненій, какъ надъ количествами, зависимость которыхъ отъ перемѣнныхъ координатъ опредѣляется лишь въ общихъ чертахъ. При изученіи Геометріи въ пространствѣ, гдѣ, вслѣдствіе большаго числа перемѣнныхъ, частныя свойства такихъ зависимостей представляютъ больше разнообразія, примѣненіе этого способа бываетъ особенно выгодно.

Пусть $U_1 = 0$ и $U_2 = 0$ будутъ уравненія двухъ какихъ-нибудь плоскостей. Въ такомъ случаѣ уравненіе

$$U_1 - kU_2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

при неопредѣленномъ постоянномъ множителѣ k, будетъ выражать цѣлую систему плоскостей, проходящихъ черезъ линію пересѣченія данныхъ. Эту систему называютъ *пучкомъ* плоскостей.

Каждому опредѣленному значенію k соотвѣтствуетъ опредѣленная и единственная плоскость пучка (1), и обратно. Слѣдовательно, пучекъ плоскостей есть система одного измѣренія (см. стр. 91).

Если $U_5=0$ есть уравненіе какой-нибудь плоскости, принадлежащей пучку (1), то постоянному k можно дать такое значеніе, при которомъ многочлены U_1-kU_2 и U_3 будутъ различаться только постояннымъ множителемъ, такъ что должно имѣть мѣсто тождество

$$U_1-kU_2=lU_3.$$

Помножая обѣ его части на какое-нибудь постоянное p_1 и обозначая $-kp_1$ черезъ p_2, а $-lp_1$ черезъ p_3, дадимъ ему видъ

$$p_1U_1+p_2U_2+p_3U_3=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Существованіе такого тождества есть, слѣдовательно, условіе, что три плоскости

$$U_1=0,\quad U_2=0,\quad U_3=0$$

проходятъ черезъ одну прямую.

449. Положимъ теперь, что $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$ суть уравненія трехъ плоскостей, не проходящихъ черезъ одну и ту же прямую. Въ такомъ случаѣ уравненіе

$$U_1-kU_2-lU_3=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

при неопредѣленныхъ значеніяхъ k и l, будетъ выражать безчисленное множество плоскостей, проходящихъ черезъ точку пересѣченія трехъ данныхъ. Систему плоскостей, проходящихъ черезъ одну точку называютъ *связкою* плоскостей.

Такъ какъ уравненіе (3) представляетъ одну опредѣленную плоскость только тогда, когда постоянныя k и l имѣютъ опредѣленныя значенія, то заключаемъ, что положеніе плоскости, принадлежащей данной связкѣ, опредѣляется двумя величинами (координатами). Слѣдовательно, связка плоскостей есть система двухъ измѣреній.

Если $U_4=0$ есть уравненіе какой-нибудь плоскости принадлежащей связкѣ (3), то должны существовать такія значенія постоянныхъ k и l, при которыхъ первая часть уравненія (3) отличается отъ U_4 только постояннымъ множителемъ, т. е. должно существовать тождество

$$U_1-kU_2-lU_3=mU_4.$$

Это тождество, по умноженіи обѣихъ частей на какое-нибудь постоянное p_1, можетъ быть представлено въ видѣ

$$p_1U_1+p_2U_2+p_3U_3+p_4U_4=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ положено $-kp_1=p_2$, $-lp_1=p_3$ и $-mp_1=p_4$. Оно представляетъ, слѣдовательно, условіе, что четыре плоскости

$$U_1=0,\quad U_2=0,\quad U_3=0,\quad U_4=0$$

проходятъ черезъ одну точку.

450. Изъ условій (2) и (4) легко обнаруживаются соотношенія между коэффиціентами плоскостей, проходящихъ черезъ одну прямую или черезъ одну точку. Такъ, если U_1, U_2, U_3 означаютъ многочлены

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1\,,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2\,,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3\,,$$

то возможность равенства (2) при всякихъ значеніяхъ x, y, z требуетъ существованія равенствъ

$$p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3=0\,,$$
$$p_1B_1+p_2B_2+p_3B_3=0\,,$$
$$p_1C_1+p_2C_2+p_3C_3=0\,,$$
$$p_1D_1+p_2D_2+p_3D_3=0\,.$$

Но существованіе трехъ величинъ p_1, p_2, p_3, удовлетворяющихъ одновременно этимъ четыремъ равенствамъ возможно только тогда (см. стр. 30), когда имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ D_1, & D_2, & D_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \\ D_1, & D_2, & D_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \\ D_1, & D_2, & D_3 \end{vmatrix}=0.$$

Очевидно, что изъ этихъ соотношеній какія-либо два суть необходимыя слѣдствія двухъ другихъ.

Если положимъ, далѣе, что U_4 означаетъ многочленъ

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4\,,$$

то изъ условія (4) заключаемъ такимъ же образомъ о существованіи равенствъ

$$p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+p_4A_4=0\,,$$
$$p_1B_1+p_2B_2+p_3B_3+p_4B_4=0\,,$$
$$p_1C_1+p_2C_2+p_3C_3+p_4C_4=0\,,$$
$$p_1D_1+p_2D_2+p_3D_3+p_4D_4=0\,,$$

совмѣстимость которыхъ обусловливается, какъ извѣстно, соотношеніемъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

что было показано выше (см. стр. 333).

451. Приложимъ сказанное къ доказательству слѣдующаго свойства плоскостей.

Два тетраэдра могутъ быть вписаны одновременно другъ въ друга.

Иными словами это предложеніе можетъ быть выражено такъ.

Черезъ вершины даннаго тетраэдра можно провести четыре плоскости, пересѣкающіяся между собою по три на его граняхъ.

Положимъ, что уравненія четырехъ граней даннаго тетраэдра суть

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0,$$

а уравненія граней второго тетраэдра пусть будутъ

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 0.$$

Условія, что каждая изъ послѣднихъ плоскостей проходитъ черезъ точку пересѣченія трехъ изъ первыхъ, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4 + mV_1 &= 0 \\ b_1U_1 \qquad\quad + b_3U_3 + b_4U_4 + mV_2 &= 0 \\ c_1U_1 + c_2U_2 \qquad\quad + c_4U_4 + mV_3 &= 0 \\ d_1U_1 + d_2U_2 + d_3U_3 \qquad\quad + mV_4 &= 0 \end{aligned}$$

гдѣ $a_2, a_3 \ldots b_1, b_3 \ldots d_3, m$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Разсматривая эти равенства, какъ систему уравненій съ четырьмя неизвѣстными U_1, U_2, U_3, U_4 и рѣшая ихъ относительно этихъ неизвѣстныхъ, получимъ (см. стр. 29)

$$\left.\begin{aligned} \triangle U_1 &= \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \alpha_4 V_4 \\ \triangle U_2 &= \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 V_3 + \beta_4 V_4 \\ \triangle U_3 &= \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + \gamma_3 V_3 + \gamma_4 V_4 \\ \triangle U_4 &= \delta_1 V_1 + \delta_2 V_2 + \delta_3 V_3 + \delta_4 V_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

гдѣ $\triangle$ есть опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 0, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & 0, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & 0, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & 0 \end{vmatrix}$$

а $\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots$ его опредѣлители миноры, помноженные на $-m$. Такъ въ частности α_1, β_2, γ_3 и δ_4 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\alpha_1 = -m\begin{vmatrix} 0, & b_3, & b_4 \\ c_2, & 0, & c_4 \\ d_2, & d_3, & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta_2 = -m\begin{vmatrix} 0, & a_3, & a_4 \\ c_1, & 0, & c_4 \\ d_1, & d_3, & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_3 = -m\begin{vmatrix} 0, & a_2, & a_4 \\ b_1, & 0, & b_4 \\ d_1, & d_2, & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta_4 = -m\begin{vmatrix} 0, & a_2, & a_3 \\ b_1, & 0, & b_3 \\ c_1, & c_2, & 0 \end{vmatrix},$$

или, по разложеніи опредѣлителей,

$$\alpha_1 = -m(c_2d_3b_4 + d_2b_3c_4), \quad \beta_2 = -m(c_1d_3a_4 + d_1a_3c_4)$$
$$\gamma_3 = -m(b_1d_2a_4 + d_1a_2b_4), \quad \delta_4 = -m(b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3).$$

Изъ равенствъ (5) видно, что если плоскость $U_1 = 0$ проходитъ черезъ точку пересѣченія плоскостей $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, $V_4 = 0$, то должно быть $\alpha_1 = 0$. Точно также условіемъ, что плоскости $U_2 = 0$, $V_1 = 0$, $V_3 = 0$, $V_4 = 0$ проходятъ черезъ одну точку, служитъ равенство $\beta_2 = 0$, а условіемъ, что плоскости $U_3 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_4 = 0$ проходятъ черезъ одну точку, равенство $\gamma_3 = 0$.

Но, какъ видно изъ выраженій для α_1, β_2, γ_3 и δ_4, необходимымъ слѣдствіемъ равенствъ

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0$$

должно быть равенство

$$\delta_4 = 0,$$

а это показываетъ, что, при названныхъ условіяхъ, и плоскости $U_4 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ проходятъ черезъ одну точку.

Такимъ образомъ предложеніе доказано.

452. Положимъ, что

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

суть уравненія двухъ данныхъ плоскостей, представленныя въ нормальной формѣ, такъ что

$$A_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1$$

и

$$A_2 = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2.$$

Пусть

$$A_1 - kA_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

будетъ уравненіе опредѣленной плоскости, проходящей чрезъ прямую ихъ пересѣченія. Въ такомъ случаѣ множитель k будетъ имѣть опредѣленную величину, геометрическое значеніе которой легко обнаружить.

Въ самомъ дѣлѣ, если x_1, y_1, z_1 суть координаты точки, лежащей на послѣдней плоскости, то должно быть

$$(x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1-p_1)-k(x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2-p_2)=0$$

и, слѣдовательно,

$$k=\frac{x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1-p_1}{x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2-p_2}.$$

Отсюда заключаемъ, что множитель k въ уравненіи (6) означаетъ отношеніе разстояній какой-либо точки на плоскости, выражаемой этимъ уравненіемъ, отъ двухъ данныхъ плоскостей.

453. Не трудно показать, исходя изъ этого заключенія, что положеніе точки въ пространствѣ можетъ быть опредѣляемо четырьмя величинами, пропорціональными разстояніямъ этой точки отъ четырехъ данныхъ плоскостей, не проходящихъ черезъ одну точку.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что уравненія данныхъ плоскостей, представленныя въ нормальной формѣ, суть

$$A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=0,\quad A_4=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

и пусть h_1, h_2, h_3, h_4 будутъ разстоянія какой-нибудь точки M отъ этихъ плоскостей, а x_1, x_2, x_3, x_4 какія-нибудь величины, пропорціональныя этимъ разстояніямъ, такъ что

$$\frac{x_1}{h_1}=\frac{x_2}{h_2}=\frac{x_3}{h_3}=\frac{x_4}{h_4}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Вообразимъ три плоскости, проходящія черезъ линіи пересѣченія первой изъ данныхъ плоскостей съ каждой изъ остальныхъ. Уравненія ихъ будутъ

$$A_1-kA_2=0,\quad A_1-lA_3=0,\quad A_1-mA_4=0.\ .\ .\ .\ (9)$$

Если эти плоскости проходятъ черезъ точку M, то согласно предыдущему, должно быть

$$k=\frac{h_1}{h_2},\quad l=\frac{h_1}{h_3},\quad m=\frac{h_1}{h_4}$$

или, какъ слѣдуетъ изъ (8),

$$k=\frac{x_1}{x_2},\quad l=\frac{x_1}{x_3},\quad m=\frac{x_1}{x_4}.$$

Отсюда видимъ, что величинами x_1, x_2, x_3, x_4 опредѣляются множители k, l, m, а такъ какъ чрезъ это вполнѣ опредѣляются плоскости (9), то и точка M будетъ опредѣленною, какъ точка ихъ пересѣченія.

454. Величины x_1, x_2, x_3, x_4, опредѣляющія такимъ образомъ положеніе точки M въ пространствѣ, могутъ быть разсматриваемы, какъ координаты этой точки.

Четыре плоскости (7) называются въ этомъ случаѣ *плоскостями координатъ*, а тетраэдръ, ими образуемый, *координатнымъ тетраэдромъ*.

Понятіе объ этихъ координатахъ есть непосредственное обобщеніе понятія о трилинейныхъ координатахъ на плоскости. Поэтому все, что говорилось о трилинейныхъ координатахъ, можетъ быть распространено въ общемъ смыслѣ и на эти новыя координаты въ пространствѣ. Ихъ называютъ иногда *тетраэдрическими*.

Частный видъ этихъ новыхъ координатъ представляютъ четыре величины, пропорціональныя тремъ прямолинейнымъ координатамъ x, y, z и единицѣ длины, чрезъ которую онѣ выражены. Это суть однородныя координаты въ пространствѣ.

455. Если плоскость выражается общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, какъ мы видѣли (см. стр. 329), она будетъ вполнѣ опредѣленною, когда извѣстны четыре величины u_1, u_2, u_3, u_4, пропорціональныя коэффиціентамъ A, B, C, D. На эти величины можно, слѣдовательно, смотрѣть, какъ на координаты плоскости, опредѣляющія ея положеніе въ пространствѣ такимъ же точно образомъ, какъ однородными (или вообще тетраэдрическими) координатами опредѣляется положеніе точки. Чрезъ это обнаруживается двойственность воззрѣнія на всѣ возможныя геометрическія фигуры въ пространствѣ. Послѣднія представляются съ одной стороны, какъ образуемыя точками, съ другой, какъ образуемыя плоскостями, иначе говоря, какъ геометрическія мѣста точекъ или какъ геометрическія мѣста плоскостей.

Двойственность эта имѣетъ мѣсто по отношенію ко всѣмъ возможнымъ условіямъ и заключеніямъ Аналитической Геометріи, ибо всякая зависимость между координатами можетъ быть истолкована двоякимъ образомъ, смотря по тому, опредѣляются ли этими координатами точки или плоскости.

Это есть общій *законъ двойственности* или *взаимности*, на который мы указывали съ нѣсколько большими подробностями и въ Геометріи на плоскости (см. стр. 91). Но тамъ его основаніемъ служитъ взаимность между точками и прямыми, какъ элементами фигуръ; въ пространствѣ же онъ обусловливается взаимностью между точками и плоскостями.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

§ 1. Уравненія прямой линіи.

455. Всякая линія въ пространствѣ выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 319), совокупностью двухъ уравненій, которыя въ отдѣльности опредѣляютъ двѣ поверхности, проходящія черезъ эту линію. Такъ какъ прямая линія можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, то заключаемъ, что она должна выражаться совокупностью двухъ уравненій первой степени, напр.

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Чрезъ одну и ту же прямую можно провести безчисленное множество плоскостей, составляющихъ пучекъ, и каждыя двѣ плоскости этого пучка будутъ опредѣлять ту же прямую. Такъ, обозначая через U и U' первыя части уравненій (1), будемъ имѣть, что прямая, выражаемая ими, выражается также двумя уравненіями

$$kU-k'U'=0,$$

$$lU-l'U'=0,$$

гдѣ k, k', l, l' какія угодно постоянныя величины.

Полагая въ частности $k=B'$, $k'=B$, $l=A'$, $l'=A$ и замѣняя U и U' ихъ значеніями, получимъ для опредѣленія той же прямой уравненія

$$(AB'-BA')x+(CB'-BC')z+(DB'-BD')=0,$$

$$(BA'-AB')y+(CA'-AC')z+(DA'-AD')=0,$$

которыя можно разсматривать въ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} x=mz+a \\ y=nz+b \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

гдѣ

$$m = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \qquad n = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'},$$

$$a = \frac{BD' - DB'}{AB' - BA'}, \qquad b = \frac{DA' - AD'}{AB' - BA'}.$$

Уравненіями (2) можетъ быть, слѣдовательно, выражена какая угодно прямая въ пространствѣ. Это есть одинъ изъ наиболѣе употребительныхъ видовъ уравненій прямой.

456. Уравненія (2), которыя суть не что иное, какъ результаты исключенія изъ уравненій (1) перемѣнныхъ y и x, представляютъ въ отдѣльности двѣ плоскости, проходящія черезъ разсматриваемую прямую и параллельныя послѣдовательно осямъ OY и OX. На плоскостяхъ же XOZ и YOZ эти уравненія выражаютъ проекціи разсматриваемой прямой. Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ это суть ортогональныя проекціи.

Выражать прямую уравненіями вида (2) значитъ, слѣдовательно, опредѣлять ее посредствомъ двухъ проекцій.

Понятно, что результатъ исключенія неизвѣстнаго z изъ уравненій (2) или (1) будетъ представлять проекцію той же прямой на плоскость XOY (см. стр. 320).

457. Точки, въ которыхъ прямая линія пересѣкается съ плоскостями координатъ, называются ея *слѣдами*.

Полагая въ уравненіяхъ (2) $z = 0$, получимъ

$$x = a, \qquad y = b,$$

откуда заключаемъ, что постоянныя a и b въ этихъ уравненіяхъ суть координаты слѣда прямой на плоскости XOY.

Что же касается коэффиціентовъ m и n, то ими опредѣляется направленіе прямой. Такъ, изъ Геометріи на плоскости извѣстно (см. стр. 38 и 39), что m означаетъ отношеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ проекціею прямой на плоскость XOZ съ осями OZ и OX. Точно такъ же n означаетъ отношеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ проекцію прямой на плоскость YOZ съ осями OZ и OY [1].

Полагая въ уравненіяхъ (2) сперва $x = 0$, а потомъ $y = 0$, получимъ, что координаты слѣда прямой на плоскости YOZ будутъ

$$z = -\frac{a}{m}, \qquad y = \frac{bm - an}{m},$$

[1] Зависимость отъ этихъ коэффиціентовъ угловъ, составляемыхъ самою прямою съ осями координатъ, будетъ указана ниже.

а на плоскости XOZ

$$z = -\frac{b}{n}, \qquad x = \frac{an - bm}{n}.$$

Если въ уравненіяхъ (2) $a = 0$ и $b = 0$, то прямая, выражаемая ими, проходитъ черезъ начало координатъ, въ которомъ будутъ, слѣдовательно, находиться слѣды прямой на всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ.

458. Мы видѣли выше (см. стр. 290 и 291), что если какая-нибудь точка N находится на прямой, соединяющей двѣ данныя точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты ея x, y, z удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{m}{n},$$

гдѣ $\frac{m}{n}$ есть отношеніе разстояній точки N отъ данныхъ точекъ, алгебраическимъ значеніемъ котораго опредѣляется положеніе этой точки на прямой.

Понятно, что при неопредѣленномъ значеніи этого отношенія точка N будетъ любою точкою этой прямой.

Послѣднія равенства можно представить въ видѣ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{m}{m+n},$$

откуда слѣдуетъ, что при всякихъ значеніяхъ m и n должно быть

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{и} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad \ldots \ldots (3)$$

Такъ какъ этимъ соотношеніямъ удовлетворяютъ координаты всякой точки прямой M_1M_2, то они суть не что иное, какъ уравненія этой прямой. Въ отдѣльности ихъ можно разсматривать, какъ выражающія проекціи прямой на плоскости XOZ и YOZ.

Уравненіе

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

которое есть ихъ необходимое слѣдствіе, выражаетъ проекцію той же прямой на плоскость XOY.

Уравненія (3) принято изображать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

и такъ какъ значеніе ихъ не можетъ измѣниться отъ умноженія всѣхъ членовъ на какую-нибудь постоянную величину, то знаменатели $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ могутъ быть замѣнены какими-нибудь величинами, имъ пропорціональными.

Отсюда заключаемъ, что всякая прямая въ пространствѣ можетъ быть выражена уравненіями вида

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ a, b, c суть координаты какой-нибудь точки этой прямой, а m, n, p величины, пропорціональныя разностямъ координатъ двухъ какихъ-нибудь ея точекъ. Это есть одинъ изъ употребительныхъ видовъ уравненій прямой, предпочитаемый уравненіямъ вида (2) вслѣдствіе симметричности относительно всѣхъ трехъ перемѣнныхъ.

Уравненія (2) могутъ быть приведены также къ виду (4). Въ самомъ дѣлѣ, рѣшивъ каждое изъ нихъ относительно z, получимъ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=z,$$

что представляетъ частный случай уравненій (4) при $c=0$ и $p=1$.

Уравненія (4) представляютъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ, когда въ нихъ $a=0$, $b=0$, $c=0$.

§ 2. Задачи на прямыя линіи и плоскости.

459. *Найти углы, составляемые прямою съ осями координатъ.*

Положимъ, что система координатъ прямоугольная, и пусть уравненія прямой даны въ видѣ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

По свойству пропорцій имѣемъ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Здѣсь предыдущій членъ послѣдняго отношенія есть выраженіе разстоянія между точками (x, y, z) и (a, b, c). Обозначивъ это разстояніе черезъ d, получимъ

$$(x-a)=\frac{md}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ (y-b)=\frac{nd}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ (z-c)=\frac{pd}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Но такъ какъ система координатъ прямоугольная, то разности $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ суть ортогональныя проекціи отрѣзка d между названными точками на три оси координатъ. Поэтому, обозначая чрезъ α, β, γ искомые углы прямой съ осями координатъ, будемъ имѣть

$$x-a=d\cos\alpha,\quad y-b=d\cos\beta,\quad z-c=d\cos\gamma.$$

Сравнивая эти равенства съ предыдущими, находимъ

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ .\ (2)$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что постоянныя m, n и p въ уравненіяхъ (1) пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ.

Если уравненія прямой даны въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} x&=mz+a\\ y&=nz+b \end{aligned}\right\},\ \dots\dots\dots\dots (3)$$

то, замѣчая, что въ этомъ случаѣ они представляютъ частный видъ уравненій (1) при $c=0$ и $p=1$, будемъ имѣть для косинусовъ искомыхъ угловъ слѣдующія выраженія:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}},\ \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}.$$

Наконецъ, если прямая дана уравненіями въ общемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0\\ A'x+B'y+C'z+D'&=0 \end{aligned}\right\}\ \dots\dots\dots (4)$$

то, приводя ихъ къ виду (3), будемъ имѣть, какъ показано выше,

$$m=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}\quad \text{и}\quad n=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}.$$

Внесеніе этихъ выраженій на мѣсто m и n въ предыдущія равенства даетъ намъ выраженія искомыхъ величинъ въ видѣ

$$\cos\alpha=\frac{BC'-CB'}{R},\ \cos\beta=\frac{CA'-AC'}{R},\ \cos\gamma=\frac{AB'-BA'}{R}..\ (5)$$

гдѣ

$$R=\sqrt{(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2}.$$

460. Если система координатъ косоугольная и разсматриваемая прямая выражается уравненіями (1), то разстояніе между точками (x, y, z) и (a, b, c) выражается, какъ мы видѣли, слѣдующимъ образомъ (см. стр. 299):

$$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 +$$
$$+ 2(y-b)(z-c)\cos\lambda + 2(x-a)(z-c)\cos\mu + 2(x-a)(y-b)\cos\nu ,$$

гдѣ λ, μ, ν суть углы между осями координатъ YOZ, XOZ, XOY.

Отсюда заключаемъ, что

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} = \frac{d}{r} ,$$

гдѣ

$$r = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + 2np\cos\lambda + 2mp\cos\mu + 2mn\cos\nu} .$$

Слѣдовательно,

$$(x-a) = \frac{md}{r} , \ (y-b) = \frac{nd}{r} , \ (z-c) = \frac{pd}{r} .$$

Далѣе, обозначая искомые углы прямой съ осями координатъ черезъ α, β, γ и замѣчая, что отрѣзки $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, по своей величинѣ и направленію, могутъ составить ломаную линію, замыкающуюся отрѣзкомъ d разсматриваемой прямой, будемъ имѣть, по свойству проекцій (см. стр. 297), что

$$d\cos\alpha = (x-a) + (y-b)\cos\nu + (z-c)\cos\mu ,$$
$$d\cos\beta = (x-a)\cos\nu + (y-b) + (z-c)\cos\lambda ,$$
$$d\cos\gamma = (x-a)\cos\mu + (y-b)\cos\lambda + (z-c) .$$

Внеся сюда на мѣсто разностей $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ ихъ предыдущія выраженія, получимъ, по сокращеніи на d,

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m + n\cos\nu + p\cos\mu}{r} \\ \cos\beta &= \frac{m\cos\nu + n + p\cos\lambda}{r} \\ \cos\gamma &= \frac{m\cos\mu + n\cos\lambda + p}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Отсюда не трудно уже получить, какъ сейчасъ показано, выраженія $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и для случаевъ, когда прямая дана уравненіями вида (3) или (4).

461. *Найти уголъ между двумя прямыми, отнесенными къ прямоугольной системѣ координатъ.*

Если двѣ прямыя составляютъ съ осями координатъ послѣдовательно углы α, β, γ и α', β', γ', то, обозначая уголъ между ними черезъ φ, будемъ, какъ извѣстно, имѣть (см. стр. 296 и 297).

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \quad \ldots\ldots (7)$$

и
$$\sin^2\varphi = (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + \\ + (\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2 \quad \ldots\ldots (8)$$

Полагая, что прямыя даны уравненіями

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad \text{и} \quad \frac{x-a'}{m'} = \frac{y-b'}{n'} = \frac{z-c'}{p'}, \ldots (9)$$

мы составимъ по формуламъ (2) выраженія косинусовъ ихъ угловъ съ осями координатъ. Внеся, затѣмъ, эти выраженія въ предыдущія равенства, получимъ

$$\cos\varphi = \frac{mm' + nn' + pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}} \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(mn'-nm')^2+(np'-pn')^2+(mp'-pm')^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}} \quad \ldots (11)$$

что и составляетъ рѣшеніе задачи.

Если положимъ въ этихъ равенствахъ $p=1$ и $p'=1$, то получимъ, очевидно, рѣшеніе задачи для случая, когда уравненія прямыхъ даны въ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} x = mz + a \\ y = nz + b \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} x = m'z + a' \\ y = n'z + b' \end{array}\right\}.$$

Подобнымъ же образомъ легко получить изъ выраженій (7), (8) и (5) рѣшеніе задачи для случая, когда уравненія прямой даны въ видѣ (4).

Если разсматриваемыя прямыя перпендикулярны между собою, то $\cos\varphi = 0$, и потому изъ выраженія (10) находимъ, что равенство

$$mm' + nn' + pp' = 0$$

есть условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ.

Если же прямыя параллельны, то $\sin\varphi = 0$ и потому, какъ видно изъ (11), должно быть

$$mn' - nm' = 0, \; np' - pn' = 0, \; mp' - pm' = 0,$$

откуда

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}.$$

Условіе параллельности двухъ прямыхъ состоитъ, такимъ образомъ, въ пропорціональности постоянныхъ, обозначаемыхъ черезъ m, n и p. Это видно, между прочимъ, изъ того, что эти постоянныя пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ прямыми съ осями координатъ, а въ случаѣ параллельности прямыхъ эти косинусы соотвѣтственно равны (съ одинаковыми или обратными знаками).

Если прямыя выражены уравненіями вида (3), то условіе ихъ перпендикулярности будетъ

$$mm' + nn' = -1.$$

Условіе же параллельности приводится въ этомъ случаѣ къ равенству угловыхъ коэффиціентовъ

$$m = m' \qquad \text{и} \qquad n = n'.$$

Это значитъ, что признакомъ параллельности двухъ прямыхъ служитъ параллельность ихъ проекцій на двѣ плоскости координатъ, что очевидно геометрически.

462. Если система координатъ косоугольная, то уголъ φ между прямыми (9) опредѣлится (см. стр. 298) изъ соотношенія

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma', & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

гдѣ на мѣсто $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ должны быть поставлены выраженія вида (6).

Отсюда легко видѣть, что условіе перпендикулярности прямыхъ (9) есть

$$mm' + nn' + pp' +$$
$$+ (mn' + nm')\cos\nu + (mp' + pm')\cos\mu + (np' + pn')\cos\lambda = 0.$$

Въ случаѣ же параллельности прямыхъ, изъ равенствъ

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\beta = \cos\beta', \quad \cos\gamma = \cos\gamma'$$

будемъ имѣть, согласно формуламъ (6),

$$\frac{m + n\cos\nu + p\cos\mu}{m' + n'\cos\nu + p'\cos\mu} = \frac{m\cos\nu + n + p\cos\lambda}{m'\cos\nu + n' + p'\cos\lambda} =$$
$$= \frac{m\cos\mu + n\cos\lambda + p}{m'\cos\mu + n'\cos\lambda + p'}.$$

откуда получимъ

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}.$$

Условіе параллельности двухъ прямыхъ при косоугольной системѣ координатъ есть, слѣдовательно, то же, что и въ случаѣ прямоугольной.

463. *Найти прямую линію, проходящую черезъ данную точку и параллельную данной прямой.*

Пусть уравненія данной прямой будутъ

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}.$$

Если координаты данной точки обозначимъ при этомъ черезъ x_1, y_1, z_1, то уравненія искомой прямой можно представить въ видѣ

$$\frac{x-x_1}{m'} = \frac{y-y_1}{n'} = \frac{z-z_1}{p'}.$$

Вслѣдствіе параллельности этихъ двухъ прямыхъ, m', n', p' должны быть *какими-нибудь* величинами, пропорціональными съ m, n, p. Принимая ихъ равными этимъ послѣднимъ величинамъ, получимъ, что уравненія прямой, удовлетворяющей условіямъ задачи, будутъ

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}.$$

464. *Найти прямую, проходящую черезъ данную точку и перпендикулярную къ двумъ даннымъ прямымъ.*

Положимъ, что система координатъ прямоугольная, и пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}.$$

Такъ же какъ и въ предыдущей задачѣ, уравненія искомой прямой можно представить въ видѣ

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p},$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты данной точки.

По условію перпендикулярности этой прямой съ данными должно быть

$$mm_1+nn_1+pp_1=0,$$

$$mm_2+nn_2+pp_2=0,$$

откуда

$$\frac{m}{n_1p_2-p_1n_2}=\frac{n}{p_1m_2-m_1p_2}=\frac{p}{m_1n_2-n_1m_2}.$$

Слѣдовательно, уравненія искомой прямой будутъ

$$\frac{x-x_1}{n_1p_2-p_1n_2}=\frac{y-y_1}{p_1m_2-m_1p_2}=\frac{z-z_1}{m_1n_2-n_1m_2}.$$

Въ случаѣ косоугольной системы координатъ, условія перпендикулярности могутъ быть представлены въ видѣ

$$(m_1+n_1\cos\nu+p_1\cos\mu)m+(m_1\cos\nu+n_1+p_1\cos\lambda)n+$$
$$+(m_1\cos\mu+n_1\cos\lambda+p_1)p=0,$$

$$(m_2+n_2\cos\nu+p_2\cos\mu)m+(m_2\cos\nu+n_2+p_2\cos\lambda)n+$$
$$+(m_2\cos\mu+n_2\cos\lambda+p_2)p=0.$$

Такъ какъ изъ уравненія искомой прямой мы имѣемъ

$$m=(x-x_1)k,\quad n=(y-y_1)k,\quad p=(z-z_1)k,$$

гдѣ k величина неопредѣленная, то, замѣняя въ послѣднихъ условіяхъ m, n и p чрезъ $(x-x_1)$, $(y-y_1)$ и $(z-z_1)$, получимъ два уравненія

$$(m_1+n_1\cos\nu+p_1\cos\mu)(x-x_1)+(m_1\cos\nu+n_1+p_1\cos\lambda)(y-y_1)+$$
$$+(m_1\cos\mu+n_1\cos\lambda+p_1)(z-z_1)=0,$$

$$(m_2+n_2\cos\nu+p_2\cos\mu)(x-x_1)+(m_2\cos\nu+n_2+p_2\cos\lambda)(y-y_1)+$$
$$+(m_2\cos\mu+n_2\cos\lambda+p_2)(z-z_1)=0,$$

совокупность которыхъ и выражаетъ, очевидно, искомую прямую.

465. *Найти уголъ, образуемый данной прямою и данной плоскостью.* Угломъ прямой линіи съ плоскостью называется, какъ извѣстно, уголъ между этою прямою и ея ортогональною проекціей на плоскость. Очевидно, что этотъ уголъ есть дополнительный до 90^0 къ углу между данной прямой и перпендикуляромъ къ плоскости. Обозначая этотъ послѣдній уголъ черезъ ψ, а искомый черезъ φ, будемъ имѣть, въ случаѣ прямоугольной системы координатъ,

$$\sin\varphi=\cos\psi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

гдѣ α, β, γ суть углы, образуемые съ осями координатъ данною прямою, а α', β', γ' углы, образуемые съ осями координатъ перпендикуляромъ къ данной плоскости.

Если положимъ, что данная прямая выражается уравненіями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

а данная плоскость уравненіемъ

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

то будемъ имѣть (см. стр. 354 и 325)

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

и

$$\cos\alpha'=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta'=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma'=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Слѣдовательно,

$$\sin\varphi=\frac{mA+nB+pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

Изъ послѣдняго равенства видимъ, что условіе параллельности прямой и плоскости, выражаемыхъ уравненіями (12) и (13), есть

$$mA+nB+pC=0.$$

Если же прямая перпендикулярна къ плоскости, то должно быть

$$\cos\alpha=\cos\alpha', \quad \cos\beta=\cos\beta', \quad \cos\gamma=\cos\gamma'$$

и, слѣдовательно, какъ видно изъ предыдущихъ выраженій этихъ косинусовъ,

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}.$$

Если прямая линія дана уравненіями вида

$$x=mz+a,$$

$$y=nz+b,$$

то условіе ея параллельности съ плоскостью (13) будетъ

$$mA+nB+C=0,$$

а условіе перпендикулярности приводится къ равенствамъ

$$m=\frac{A}{C}, \quad n=\frac{B}{C}.$$

466. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ уголъ φ прямой линіи (12) съ плоскостью (13) опредѣлится изъ соотношенія

$$\begin{vmatrix} 1\,, & \cos\nu\,, & \cos\mu\,, & \cos\alpha \\ \cos\nu\,, & 1\,, & \cos\lambda\,, & \cos\beta \\ \cos\mu\,, & \cos\lambda\,, & 1\,, & \cos\gamma \\ \cos\alpha'\,, & \cos\beta'\,, & \cos\gamma'\,, & \sin\varphi \end{vmatrix}=0\,,$$

въ которое на мѣсто $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ должны быть поставлены слѣдующія выраженія (см. стр. 355 и 326).

$$\cos\alpha=\frac{m+n\cos\nu+p\cos\mu}{r}, \quad \cos\beta=\frac{m\cos\nu+n+p\cos\lambda}{r},$$

$$\cos\gamma=\frac{m\cos\mu+n\cos\lambda+p}{r},$$

$$\cos\alpha'=AM, \quad \cos\beta'=BM, \quad \cos\gamma'=CM,$$

гдѣ

$$r=\sqrt{m^2+n^2+p^2+2mn\cos\nu+2mp\cos\mu+2np\cos\lambda}$$

и гдѣ M есть множитель, приводящій уравненіе (13) къ нормальной формѣ.

Отсюда легко видѣть, что условіе параллельности прямой съ плоскостью есть

$$mA+nB+pC=0\,,$$

т. е. то же, что и въ случаѣ прямоугольной системы координатъ.

Условіе же перпендикулярности, какъ видно изъ равенствъ

$$\cos\alpha=\cos\alpha', \quad \cos\beta=\cos\beta', \quad \cos\gamma=\cos\gamma',$$

должно состоять въ слѣдующемъ:

$$\frac{m+n\cos\nu+p\cos\mu}{A}=\frac{m\cos\nu+n+p\cos\lambda}{B}=\frac{m\cos\mu+n\cos\lambda+p}{C}. \quad (14)$$

467. *Найти прямую, проходящую черезъ данную точку и перпендикулярную къ данной плоскости.*

Положимъ, что система координатъ прямоугольная, и пусть уравненіе данной плоскости будетъ

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Если, кромѣ того, координаты данной точки обозначимъ черезъ x_1, y_1, z_1, то уравненія искомой прямой будутъ имѣть видъ

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Но, по условію перпендикулярности ея съ данной плоскостью, должно быть

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C},$$

вслѣдствіе чего послѣднее уравненіе обращается въ

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C},$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

Если система координатъ косоугольная, то уравненія искомой прямой получимъ, исключая m, n и p изъ уравненій (15) и условія перпендикулярности (14). Легко видѣть, что эти уравненія будутъ

$$\frac{(x-x_1)+(y-y_1)\cos\nu+(z-z_1)\cos\mu}{A}=\frac{(x-x_1)\cos\nu+(y-y_1)+(z-z_1)\cos\lambda}{B}=$$

$$=\frac{(x-x_1)\cos\mu+(y-y_1)\cos\lambda+(z-z_1)}{C}.$$

468. *Найти плоскость, проходящую черезъ данную точку и перпендикулярную къ данной прямой.*

Положимъ, что данная прямая выражается уравненіями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Уравненіе всякой плоскости, проходящей чрезъ данную точку (x_1, y_1, z_1), представляется, какъ мы видѣли (см. стр. 336), слѣдующимъ образомъ:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Если эта плоскость перпендикулярна къ данной прямой и система координатъ прямоугольная, то должно быть

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}.$$

Слѣдовательно, уравненіе искомой плоскости будетъ

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0.$$

Въ случаѣ же косоугольной системы координатъ, какъ видно изъ условій перпендикулярности (14), уравненіе искомой плоскости будетъ

$$(m+n\cos\nu+p\cos\mu)(x-x_1)+(m\cos\nu+n+p\cos\lambda)(y-y_1)+$$
$$+(m\cos\mu+n\cos\lambda+p)(z-z_1)=0\,.$$

469. *Найти точку пересѣченія прямой линіи съ плоскостью.*

Такъ какъ прямая выражается уравненіями двухъ проходящихъ черезъ нее плоскостей, то вопросъ сводится на отысканіе точки пересѣченія трехъ данныхъ плоскостей. Слѣдовательно, въ общемъ видѣ настоящая задача оказывается уже рѣшенною въ предыдущемъ (см. стр. 331). Укажемъ ея рѣшеніе для частныхъ видовъ уравненій прямой, въ которыхъ, какъ замѣчено выше, они чаще всего употребляются.

Пусть уравненія данной плоскости и данной прямой будутъ

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\,.$$

Обозначивъ отношеніе $\frac{x-a}{m}$ черезъ k, будемъ, очевидно, имѣть

$$x-a=km,\quad y-b=kn,\quad z-c=kp\,.$$

Представивъ затѣмъ уравненіе данной плоскости въ видѣ

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)+Aa+Bb+Cc+D=0\,,$$

получимъ, на основаніи этихъ послѣднихъ равенствъ,

$$(Am+Bn+Cp)k+Aa+Bb+Cc+D=0\,,$$

откуда

$$k=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} x&=a-m\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}\\ y&=b-n\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}\\ z&=c-p\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}\end{aligned}\right\}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

Изъ этихъ выраженій видно, что точка пересѣченія будетъ безконечно удаленною и, слѣдовательно, прямая будетъ параллельна плоскости, когда

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Такимъ образомъ. мы другимъ путемъ получили условіе параллельности прямой съ плоскостью, которое было выведено выше.

Если прямая совпадаетъ съ плоскостью, то общая ихъ точка будетъ неопредѣленною. Изъ предыдущихъ выраженій видно, что это имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$Aa+Bb+Cc+D=0$$

и

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Эти два равенства представляютъ, слѣдовательно, условіе, что данная плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Изъ нихъ второе есть условіе параллельности, а первое показываетъ, что точка (a, b, c), принадлежащая данной прямой, находится на данной плоскости. Отсюда совмѣстное ихъ значеніе, какъ условій совпаденія, очевидно само собою.

Если прямая линія дана уравненіями

$$x=mz+a,$$
$$y=nz+b,$$

то координаты точки пересѣченія получимъ, рѣшая ихъ совмѣстно съ уравненіемъ плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Результатъ исключенія неизвѣстныхъ x и y будетъ, очевидно,

$$A(mz+a)+B(nz+b)+Cz+D=0,$$

откуда

$$z=-\frac{Aa+Bb+D}{Am+Bn+C}$$

и, слѣдовательно,

$$x=-m\frac{Aa+Bb+D}{Am+Bn+C}+a$$

и

$$y=-n\frac{Aa+Bb+D}{Am+Bn+C}+b.$$

Эти выраженія могли бы быть получены прямо изъ выраженій (16), полагая $c=0$ и $p=1$ (см. стр. 353).

Условія совпаденія прямой съ плоскостью будутъ въ настоящемъ случаѣ

$$Aa+Bb+D=0,$$
$$Am+Bn+C=0.$$

470. *Найти условіе, что три данныя точки лежатъ на одной прямой.*

Пусть данныя точки будутъ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

Мы видѣли (см. стр. 352), что прямая, проходящая черезъ двѣ первыя, выражается уравненіями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{и} \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Если и третья точка лежитъ на этой прямой, то эти уравненія должны удовлетворяться ея координатами, т. е. должны имѣть мѣсто тождества

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{и} \quad \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},$$

которыя и представляютъ искомое условіе.

Легко видѣть, что они могутъ быть представлены въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} z_1, & y_1, & 1 \\ z_2, & y_2, & 1 \\ z_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}=0$$

и что изъ нихъ, какъ слѣдствія, получаются равенства

$$\begin{vmatrix} y_1, & x_1, & 1 \\ y_2, & x_2, & 1 \\ y_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Вообще, изъ четырехъ послѣднихъ равенствъ каждыя два суть необходимыя слѣдствія двухъ другихъ, а потому любыя два изъ нихъ представляютъ искомое условіе.

Мы видѣли выше (см. стр. 333), что первыя части этихъ четырехъ равенствъ суть коэффиценты въ уравненіи плоскости, проходящей черезъ три данныя точки. Равенство ихъ нулю показываетъ, что эта плоскость неопредѣленная, что и дѣйствительно должно быть, когда опредѣляющія ее точки лежатъ на одной прямой.

471. *Найти плоскость, проходящую через данную прямую и перпендикулярную к данной плоскости.*

Пусть уравненія данной прямой и данной плоскости будутъ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Полагая, что уравненіе искомой плоскости есть

$$A'x+B'y+C'z+D'=0\,, \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

будемъ имѣть, по первому условію задачи,

$$\left.\begin{array}{r} A'a+B'b+C'c+D'=0 \\ A'm+B'n+C'p=0 \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots (18)$$

а, по условію перпендикулярности, въ случаѣ прямоугольной системы координатъ,

$$A'A+B'B+CC'=0.$$

Въ силу перваго изъ этихъ трехъ равенствъ, уравненію искомой плоскости можно дать видъ

$$A'(x-a)+B'(y-b)+C'(z-c)=0\,;$$

изъ двухъ же послѣднихъ равенствъ находимъ

$$\frac{A'}{Bp-Cn}=\frac{B'}{Cm-Ap}=\frac{C'}{An-Bm}.$$

Вслѣдствіе этого искомое уравненіе будетъ

$$(Bp-Cn)(x-a)+(Cm-Ap)(y-b)+(An-Bm)(z-c)=0.$$

Оно есть не что иное, какъ результатъ исключенія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ A', B', C', D' изъ уравненія (17) и условій задачи.

Въ случаѣ косоугольной системы координатъ сперва находимъ изъ (17) и (18)

$$\frac{A'}{n(z-c)-p(y-b)}=\frac{B'}{p(x-a)-m(z-c)}=\frac{C'}{m(y-b)-n(x-a)}$$

и затѣмъ, подставивъ послѣдующіе члены этихъ трехъ отношеній на мѣсто A', B', C' въ условіе перпендикулярности

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & A' \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & B' \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & C' \\ A, & B, & C, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

получимъ уравненіе искомой плоскости.

472. Рѣшеніе предыдущей задачи можно получить еще слѣдующимъ образомъ.

Данная прямая опредѣляется пересѣченіемъ двухъ плоскостей. Пусть уравненія этихъ плоскостей будутъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Искомая плоскость, какъ проходящая через линію ихъ пересѣченія, можетъ быть выражена уравненіемъ

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

или

$$(A_1 - kA_2)x + (B_1 - kB_2)y + (C_1 - kC_2)z + (D_1 - kD_2) = 0,$$

гдѣ k постоянный множитель, подлежащій опредѣленію.

По условію перпендикулярности искомой плоскости съ данною

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

будемъ имѣть

$$A(A_1 - kA_2) + B(B_1 - kB_2) + C(C_1 - kC_2) = 0$$

или

$$(AA_1 + BB_1 + CC_1) = k(AA_2 + BB_2 + CC_2),$$

откуда k опредѣляется.

Уравненіе искомой плоскости получается, такимъ образомъ, въ видѣ

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{AA_1 + BB_1 + CC_1} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{AA_2 + BB_2 + CC_2}.$$

473. *Найти плоскость, проходящую черезъ данную точку и параллельную двумъ даннымъ прямымъ.*

Положимъ, что уравненія данныхъ прямыхъ суть

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-a_1}{m_1} = \dfrac{y-b_1}{n_1} = \dfrac{z-c_1}{p_1} \\ \dfrac{x-a_2}{m_2} = \dfrac{y-b_2}{n_2} = \dfrac{z-c_2}{p_2} \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Если данная точка есть (x_1, y_1, z_1), то уравненію искомой плоскости можно дать видъ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

и такъ какъ, по условію параллельности ея съ данными прямыми, должно быть

$$Am_1+Bn_1+Cp_1=0$$

и

$$Am_2+Bn_2+Cp_2=0,$$

то находимъ

$$\frac{A}{n_1p_2-p_1n_2}=\frac{B}{p_1m_2-m_1p_2}=\frac{C}{m_1n_2-n_1m_2}.$$

Слѣдовательно, уравненіе искомой плоскости будетъ

$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-x_1)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-y_1)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-z_1)=0$$

Отсюда находимъ въ частности, что плоскость, проходящая черезъ первую изъ данныхъ прямыхъ параллельно второй, выражается уравненіемъ

$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-a_1)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-b_1)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-c_1)=0,$$

а плоскость, проходящая черезъ вторую изъ данныхъ прямыхъ параллельно первой, уравненіемъ

$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-c_2)=0.$$

Если данныя прямыя пересѣкаются, то послѣднія двѣ плоскости совпадаютъ и, слѣдовательно, должно быть

$$(n_1p_2-p_1n_2)(a_1-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(b_1-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(c_1-c_2)=0$$

Это равенство представляетъ, такимъ образомъ, условіе пересѣченія прямыхъ (19). Оно можетъ быть написано еще такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ m_1, & n_1, & p_1 \\ m_2, & n_2, & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ m_1, & n_1, & p_1 \\ m_2, & n_2, & p_2 \end{vmatrix}$$

и, очевидно, имѣетъ мѣсто также въ случаѣ параллельности прямыхъ.

474. *Найти плоскость, проходящую черезъ данную точку и данную прямую.*

Пусть уравненія данной прямой будутъ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Въ силу перваго условія задачи, искомая плоскость должна выражаться уравненіемъ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

По второму же условію должно быть

$$A(a-x_1)+B(b-y_1)+C(c-z_1)=0$$

и

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Исключая A, B и C изъ этихъ трехъ равенствъ, получимъ уравненіе искомой плоскости въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ a-x_1, & b-y_1, & c-z_1 \\ m\;\;\;, & n\;\;\;, & p \end{vmatrix}=0$$

или

$$[p(b-y_1)-n(c-z_1)](x-x_1)+[m(c-z_1)-p(a-x_1)](y-y_1)+$$
$$+[n(a-x_1)-m(b-y_1)](z-z_1)=0.$$

Это рѣшеніе можно было бы получить изъ рѣшенія предыдущей задачи, такъ какъ искомая плоскость можетъ быть разсматриваема, какъ параллельная данной прямой и прямой, соединяющей точки (x_1, y_1, z_1) и (a, b, c).

475. *Найти уравненіе и длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.*

Искомый перпендикуляръ есть кратчайшее разстояніе между точкою и прямою. Очевидно, что онъ опредѣляется пересѣченіемъ плоскости, проходящей чрезъ данную точку и данную прямую, съ плоскостью, проходящею чрезъ данную точку и перпендикулярною къ данной прямой.

Поэтому, полагая, что система координатъ прямоугольная и что данная точка опредѣляется координатами x_1, y_1, z_1, а уравненія данной прямой суть

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

будемъ имѣть, на основаніи предыдущаго, что искомый перпендикуляръ выражается совокупностью уравненій

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0,$$

$$[p(b-y_1)-n(c-z_1)](x-x_1)+[m(c-z_1)-p(a-x_1)](y-y_1)+$$
$$+[n(a-x_1)-m(b-y_1)](z-z_1)=0.$$

Чтобы найти длину его, обозначимъ координаты его основанія черезъ x_2, y_2, z_2. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$m(x_2-x_1)+n(y_2-y_1)+p(z_2-z_1)=0 \quad \ldots\ldots$$

и

$$\frac{x_2-a}{m}=\frac{y_2-b}{n}=\frac{z_2-c}{p}.$$

Называя черезъ k величину каждаго изъ трехъ послѣднихъ отношеній, можемъ написать

$$\left.\begin{aligned}(x_2-x_1)&=mk+(a-x_1)\\(y_2-y_1)&=nk+(b-y_1)\\(z_2-z_1)&=pk+(c-z_1)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Если помножимъ эти равенства послѣдовательно на m, n, p и результаты сложимъ, то получимъ, въ виду равенства (20),

$$(m^2+n^2+p^2)k+m(a-x_1)+n(b-y_1)+p(c-z_1)=0.$$

Съ другой стороны, если возвысимъ равенства (21) въ квадратъ и сложимъ результаты, то, обозначая черезъ d длину искомаго перпендикуляра, будемъ имѣть

$$d^2=(m^2+n^2+p^2)k^2+2k[m(a-x_1)+n(b-y_1)+p(c-z_1)]+$$
$$+(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $(m^2+n^2+p^2)$ и замѣнивъ k его значеніями изъ предыдущаго равенства, получимъ

$$(m^2+n^2+p^2)d^2=(m^2+n^2+p^2)[(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2]-$$
$$-[m(a-x_1)+n(b-y_1)+p(c-z_1)]^2$$

или

$$(m^2+n^2+p^2)d^2=$$
$$=[p(b-y_1)-n(c-z_1)]^2+[m(c-z_1)-p(a-x_1)]^2+[n(a-x_1)-m(b-y_1)]^2,$$

откуда

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}p, & (c-z_1)\\ n, & (b-y_1)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m, & (a-x_1)\\ p, & (c-z_1)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n, & (b-y_1)\\ m, & (a-x_1)\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

476. *Найти прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя и перпендикулярную къ нимъ обѣимъ.*

Искомая прямая есть та, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе между данными прямыми.

Будемъ полагать, какъ и въ предыдущей задачѣ, что система координатъ прямоугольная и пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли выше (см. стр. 359), уравненія всякой прямой, перпендикулярной къ обѣимъ даннымъ, будутъ

$$\frac{x-a}{n_1p_2-p_1n_2}=\frac{y-b}{p_1m_2-m_1p_2}=\frac{z-c}{m_1n_2-n_1m_2},$$

гдѣ a, b, c неопредѣленныя.

Искомая прямая опредѣлится, очевидно, пересѣченіемъ двухъ плоскостей, параллельныхъ къ этой послѣдней прямой и проходящихъ послѣдовательно черезъ данныя прямыя. Согласно сказанному выше (см. стр. 368), уравненіе первой изъ этихъ плоскостей будетъ

$$\begin{gathered}[n_1(m_1n_2-n_1m_2)-p_1(p_1m_2-m_1p_2)](x-a_1)+\\+[p_1(n_1p_2-p_1n_2)-m_1(m_1n_2-n_1m_2)](y-b_1)+\\+[m_1(p_1m_2-m_1p_2)-n_1(n_1p_2-p_1n_2)](z-c_1)=0.\end{gathered}$$

Очевидно, что оно можетъ быть представлено также въ видѣ

$$\begin{gathered}[m_1(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)-m_2(m_1^2+n_1^2+p_1^2)](x-a_1)+\\+[n_1(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)-n_2(m_1^2+n_1^2+p_1^2)](y-b_1)+\\+[p_1(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)-p_2(m_1^2+n_1^2+p_1^2)](z-c_1)=0.\end{gathered}$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что уравненіе второй изъ названныхъ плоскостей есть

$$\begin{gathered}[m_1(m_2^2+n_2^2+p_2^2)-m_2(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)](x-a_2)+\\+[n_1(m_2^2+n_2^2+p_2^2)-n_2(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)](y-b_2)+\\+[p_1(m_2^2+n_2^2+p_2^2)-p_2(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)](z-c_2)=0.\end{gathered}$$

Совокупностью этихъ двухъ уравненій и выражается искомая прямая.

Если положимъ, что первая изъ данныхъ прямыхъ составляетъ съ осями координатъ углы α_1, β_1, γ_1, а вторая углы α_2, β_2, γ_2, и обозначимъ черезъ φ уголъ наклоненія этихъ прямыхъ между собою, то послѣднія два уравненія, по раздѣленіи послѣдовательно на

*

$$(m_1^2+n_1^2+p_1^2)\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}$$

и

$$(m_2^2-n_2^2+p_2^2)\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,,$$

приведутся къ виду

$$(\cos\alpha_1\cos\varphi-\cos\alpha_2)(x-a_1)+(\cos\beta_1\cos\varphi-\cos\beta_2)(y-b_1)+$$
$$+(\cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\gamma_2)(z-c_1)=0\,,$$
$$(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\varphi)(x-a_2)+(\cos\beta_1-\cos\beta_2\cos\varphi)(y-b_2)+$$
$$+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\varphi)(z-c_2)=0.$$

477. *Найти кратчайшее разстояніе между двумя прямыми.*

Положимъ, что данныя прямыя выражаются тѣми же уравненіями, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Искомое разстояніе есть, очевидно, въ то же время разстояніе между двумя плоскостями, проходящими черезъ данныя прямыя и параллельными имъ обѣимъ. Эти плоскости выражаются, какъ мы видѣли, уравненіями

$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-a_1)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-b_1)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-c_1)=0\,,$$
$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-c_2)=0.$$

Длина перпендикуляра изъ точки $(a_1\, b_1\, c_1)$, принадлежащей первой плоскости, на вторую выражается, какъ извѣстно (см. стр. 337), слѣдующимъ образомъ:

$$l=\frac{(n_1p_2-p_1n_2)(a_1-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(b_1-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(c_1-c_2)}{\sqrt{(n_1p_2-p_1n_2)^2+(p_1m_2-m_1p_2)^2+(m_1n_2-n_1m_2)^2}}.$$

Такимъ же точно образомъ, но съ обратнымъ знакомъ, выражается длина перпендикуляра изъ точки (a_2, b_2, c_2) на первую плоскость.

Это и есть искомое разстояніе.

Знаменатель послѣдняго выраженія, по раздѣленіи на

$$\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}\,,$$

обращается въ выраженіе синуса угла φ между данными прямыми. Что же касается числителя, то, по раздѣленіи на то же произведеніе, онъ обращается въ

$$(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)(a_1-a_2)+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)(b_1-b_2)+$$
$$+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)(c_1-c_2)$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2, & b_1-b_2, & c_1-c_2 \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}$$

гдѣ $\alpha_1, \beta_2 \ldots \gamma_3$ имѣютъ то же значеніе, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Такимъ образомъ видимъ, что кратчайшее разстояніе между двумя данными прямыми можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ:

$$l = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{vmatrix} a_1 - a_2, & b_1 - b_2, & c_1 - c_2 \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

478. Положимъ, что M_1, M_2, M_3, M_4 суть четыре вершины какого-нибудь тетраэдра. Обозначимъ черезъ d_1 и d_2 длины двухъ его реберъ M_1M_2 и M_3M_4, и пусть φ будетъ уголъ ихъ взаимнаго наклоненія, а l кратчайшее между ними разстояніе. Въ такомъ случаѣ, для угловъ, образуемыхъ этими прямыми съ осями координатъ, будемъ имѣть слѣдующія выраженія

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{d_1}, \ \cos\beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{d_1}, \ \cos\gamma_1 = \frac{z_2 - z_1}{d_1},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_4 - x_3}{d_2}, \ \cos\beta_2 = \frac{y_4 - y_3}{d_2}, \ \cos\gamma_2 = \frac{z_4 - z_3}{d_2},$$

гдѣ x_1, y_1, $x_2 \ldots z_4$ суть координаты вершинъ тетраэдра.

Поэтому, на основаніи предыдущаго, должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$l\sin\varphi = \frac{1}{d_1 d_2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 - a_2, & b_1 - b_2, & c_1 - c_2 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_3, & y_4 - y_3, & z_4 - z_3 \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ здѣсь a_1, b_1, c_1 суть координаты какой угодно точки прямой M_1M_2, то ихъ можно принять равными x_1, y_1, z_1, и точно также можно положить

$$a_2 = x_3, \quad b_2 = y_3, \quad c_2 = z_3.$$

Но легко видѣть, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_3, & y_4 - y_3, & z_4 - z_3 \end{vmatrix}$$

равняется по абсолютной величинѣ опредѣлителю

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}$$

который, какъ мы видѣли (см. стр. 340), выражаетъ ушестеренный объемъ разсматриваемаго тетраэдра. Обозначая этотъ объемъ черезъ V, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$l\sin\varphi = \frac{6V}{d_1 d_2},$$

откуда находимъ

$$V = \frac{d_1 d_2 l \sin\varphi}{6},$$

выраженіе объема тетраэдра черезъ длины двухъ его противоположныхъ реберъ, ихъ кратчайшее разстояніе и уголъ между ними.

§ 3. Системы прямыхъ линій. Мнимыя плоскости и прямыя.

479. Уравненія прямой линіи содержатъ постоянныя величины, значеніями которыхъ опредѣляется положеніе этой прямой. Въ томъ случаѣ, когда уравненія прямой имѣютъ видъ

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

этихъ постоянныхъ шесть, именно величины m, n, p, a, b, c. Легко видѣть, однако, что двѣ изъ нихъ могутъ быть выбираемы произвольно, не оказывая вліянія на положеніе прямой въ пространствѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, a, b, c означаютъ координаты *произвольной* точки на разсматриваемой прямой; понятно, что эта точка можетъ быть взята такъ, чтобы одна изъ ея координатъ (напр. c) имѣла данную величину.

Что же касается величинъ m, n, p, то одна изъ нихъ потому можетъ быть взята произвольно, что отъ умноженія всѣхъ частей уравненій (1) на какую угодно постоянную величину значеніе этихъ уравненій не измѣняется.

Выборомъ для c и p значеній $c=0$ и $p=1$ уравненія (1) приводятся, какъ мы видѣли (см. стр. 353), къ виду

$$\left.\begin{array}{l} x = mz + a \\ y = nz + b \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

въ которомъ они содержатъ только четыре постоянныя.

Такимъ образомъ видимъ, что положеніе прямой въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется четырьмя постоянными величинами или *параметрами*, которые могутъ быть разсматриваемы, какъ координаты прямой

480. Для геометрическаго опредѣленія прямой даются обыкновенно какія-нибудь *геометрическія условія*, которыя должны быть выражены аналитически (уравненіями) для того, чтобы по нимъ можно было найти параметры прямой. Если данныя условія достаточны для опредѣленія прямой, то, находя по нимъ ея параметры, получимъ для каждаго вполнѣ опредѣленное (хотя, можетъ быть, и не единственное) значеніе. Въ противномъ случаѣ, въ уравненіяхъ прямой будутъ оставаться неопредѣленные параметры, и данныя условія, вмѣсто того, чтобы опредѣлять прямую, будутъ выдѣлять изъ всѣхъ возможныхъ прямыхъ въ пространствѣ систему или совокупность прямыхъ, связанныхъ между собою опредѣленнымъ образомъ.

По числу неопредѣленныхъ параметровъ (координатъ) системы прямыхъ могутъ быть раздѣляемы на системы одного, двухъ, трехъ измѣреній (см. стр. 343 и 344). Совокупность всѣхъ возможныхъ прямыхъ въ пространствѣ представляетъ, очевидно, систему четырехъ измѣреній.

481. Особенное вниманіе слѣдуетъ обратить на случай, когда уравненія прямой содержатъ только одинъ неопредѣленный параметръ и выражаютъ, слѣдовательно, систему одного измѣренія.

Обозначая этотъ параметръ черезъ α, можно уравненія такой системы представить въ видѣ

$$F_1(x, y, z, \alpha)=0, \quad F_2(x, y, z, \alpha)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Они суть первой степени относительно перемѣнныхъ координатъ x, y, z.

Прямыя линіи системы представляютъ въ этомъ случаѣ всевозможныя положенія одной и той же прямой, перемѣщающейся непрерывно въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія параметра α.

При непрерывномъ перемѣщеніи, прямая описываетъ нѣкоторую поверхность, которая представляетъ собою геометрическое мѣсто всѣхъ положеній этой прямой. Если прямыя, составляющія систему, выражаются уравненіями (3), то уравненіе названной поверхности, которому, очевидно, должны удовлетворять значенія x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (3) при всякомъ α, получится, какъ результатъ исключенія изъ нихъ этого параметра.

Поверхность, образуемая перемѣщающеюся прямою, или, другими словами, которая можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто системы прямыхъ, называется, вообще, *линейчатою*.

Къ числу такихъ поверхностей принадлежатъ, какъ мы знаемъ, поверхности цилиндрическія и коническія [1]), а также и плоскость.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ геометрическое мѣсто системы прямыхъ есть плоскость.

482. *Требуется найти геометрическое мѣсто системы прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку и пересѣкающихъ данную прямую.*

Положимъ, что координаты данной точки суть x_1, y_1, z_1, и пусть данная прямая выражается уравненіями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Всякая прямая, проходящая черезъ данную точку, будетъ выражаться уравненіями

$$\frac{x-x_1}{m'}=\frac{y-y_1}{n'}=\frac{z-z_1}{p'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ m', n', p' суть неопредѣленныя постоянныя.

Условіе, что эта прямая пересѣкается съ данною, выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 368), слѣдующимъ образомъ:

$$(np'-pn')(a-x_1)+(pm'-mp')(b-y_1)+(mn'-nm')(c-z_1)=0$$

или

$$[p(b-y_1)-n(c-z_1)]m'+[m(c-z_1)-p(a-x_1)]n'+$$
$$+[n(a-x_1)-m(b-y_1)]p'=0.$$

Исключивъ посредствомъ этого условія неопредѣленныя величины m', n', p' изъ уравненій прямой (4), получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Это будетъ, очевидно, результатъ замѣны въ послѣднемъ соотношеніи величинъ m', n', p' пропорціональными имъ разностями $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, $(z-z_1)$, т. е.

$$[p(b-y_1)-n(c-z_1)](x-x_1)+[m(c-z_1)-p(a-x_1)](y-y_1)+$$
$$+[n(a-x_1)-m(b-y_1)](z-z_1)=0.$$

Выше мы нашли это уравненіе, какъ выражающее плоскость, проходящую черезъ данную точку и черезъ данную прямую (см. стр. 369).

Условія настоящей задачи представляютъ частный случай опредѣленія коническихъ поверхностей (см. стр. 240). Плоскость можетъ, слѣдовательно, быть разсматриваема, какъ коническая поверхность, для которой управляющая линія есть прямая.

[1]) Цилиндрическія и коническія поверхности представляютъ примѣры такъ называемыхъ *развертываемыхъ* линейчатыхъ поверхностей, т. е. такихъ, которыя могутъ быть развертываемы въ плоскость. Ниже мы будемъ имѣть также примѣры линейчатыхъ поверхностей, не обладающихъ этимъ свойствомъ.

483. *Найти геометрическое мѣсто системы прямыхъ, параллельныхъ одной изъ двухъ данныхъ прямыхъ и пересѣкающихся съ другою.*

Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Предполагая, что прямая, удовлетворяющая условіямъ задачи, выражается уравненіями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

представимъ эти условія слѣдующимъ образомъ (см. стр. 357 и 368):

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}.$$

$$(np_2-pn_2)(a-a_2)+(pm_2-mp_2)(b-b_2)+(mn_2-nm_2)(c-c_2)=0.$$

Въ силу перваго изъ нихъ второе принимаетъ видъ

$$(n_1p_2-p_1n_2)(a-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(b-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(c-c_2)=0.$$

Здѣсь, какъ извѣстно, величины a, b, c суть координаты любой точки прямой (5) во всякомъ ея положеніи. Слѣдовательно, онѣ суть координаты любой точки искомаго геометрическаго мѣста. Это позволяетъ заключить, что, замѣняя въ послѣднемъ равенствѣ a, b, c послѣдовательно чрезъ x, y, z, мы и получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$(n_1p_2-p_1n_2)(x-a_2)+(p_1m_2-m_1p_2)(y-b_2)+(m_1n_2-n_1m_2)(z-c_2)=0.$$

Въ этомъ же не трудно убѣдиться, произведя дѣйствительно исключеніе величинъ a, b, c изъ предыдущаго соотношенія и уравненій прямой

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y-b}{n_1}=\frac{z-c}{p_1}.$$

Полученное уравненіе приводилось выше (см. стр. 368), какъ выражающее плоскость, параллельную первой изъ данныхъ прямыхъ и проходящую черезъ вторую.

Условія настоящей задачи представляютъ частный случай опредѣленія цилиндрическихъ поверхностей (см. стр. 299). Слѣдовательно, плоскость можно разсматривать, какъ цилиндрическую поверхность, для которой управляющая линія есть прямая.

484. *Найти геометрическое мѣсто системы прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку и параллельныхъ данной плоскости.*

Положимъ, что уравненіе данной плоскости есть

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Обозначая черезъ x_1, y_1, z_1 координаты данной точки, представимъ уравненія всякой проходящей черезъ нее прямой въ видѣ

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

При этомъ условіе параллельности ея съ данной плоскостью будетъ (см. стр. 360 и 361)

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Исключая, при помощи этого соотношенія, постоянныя m, n, p изъ уравненій прямой (6), мы получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Это есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ данную точку и параллельной данной плоскости (см. стр. 336).

485. *Найти геометрическое мѣсто системы прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку и перпендикулярныхъ съ данной прямой.*

Положимъ, что данная прямая выражается уравненіями

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y-b}{n_1}=\frac{z-c}{p_1}.$$

Уравненія всякой прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1, z_1) можно представить въ видѣ

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Условіе перпендикулярности этихъ двухъ прямыхъ, какъ мы видѣли (см. стр. 357), будетъ

$$mm_1+nn_1+pp_1+$$

$$+(mn_1+nm_1)\cos\nu+(mp_1+pm_1)\cos\mu+(np_1+pn_1)\cos\lambda=0$$

или

$$(m_1+n_1\cos\nu+p_1\cos\mu)m+(m_1\cos\nu+n_1+p_1\cos\lambda)n+$$

$$+(m_1\cos\mu+n_1\cos\lambda+p_1)p=0.$$

Исключенiе неопредѣленныхъ постоянныхъ m, n, p изъ этого соотношенiя и уравненiй прямой (7) дастъ намъ уравненiе искомаго геометрическаго мѣста

$$(m_1 + n_1\cos\nu + p_1\cos\mu)(x - x_1) + (m_1\cos\nu + n_1 + p_1\cos\lambda)(y - y_1) +$$
$$+ (m_1\cos\mu + n_1\cos\lambda + p_1)(z - z_1) = 0$$

или, въ случаѣ прямоугольной системы координатъ,

$$m_1(x - x_1) + n_1(y - y_1) + p_1(z - z_1) = 0.$$

Это есть плоскость, проходящая черезъ данную точку и перпендикулярная къ данной прямой (см. стр. 362).

486. Если двѣ данныя прямыя не пересѣкаются, то прямая линiя, пересѣкающая ихъ обѣ и проходящая черезъ какую-нибудь данную точку, будетъ опредѣленная и единственная.

Въ самомъ дѣлѣ, это будетъ, очевидно, прямая, по которой пересѣкаются между собою двѣ плоскости, проходящiя черезъ данную точку и черезъ каждую въ отдѣльности изъ данныхъ прямыхъ.

Если даны три не пересѣкающiяся прямыя, то будетъ существовать безконечное множество прямыхъ, пересѣкающихся съ ними одновременно. Это видно изъ того, что чрезъ каждую точку одной изъ данныхъ прямыхъ должна проходить прямая, пересѣкающая двѣ другiя.

Прямая линiя можетъ, слѣдовательно, перемѣщаться въ пространствѣ, пересѣкая постоянно три данныя прямыя (скользя по нимъ) и описывая нѣкоторую линейчатую поверхность. Эта поверхность, геометрическое мѣсто системы прямыхъ, пересѣкающихся съ тремя данными, не будетъ, однако, плоскостью.

Примемъ за оси координатъ три прямыя, проходящiя черезъ произвольную точку въ пространствѣ и параллельныя тремъ даннымъ прямымъ. Въ такомъ случаѣ уравненiя данныхъ прямыхъ будутъ послѣдовательно

1) $y = b_1$, $z = c_1$

2) $x = a_2$, $z = c_2$

3) $x = a_3$, $y = b_3$.

Полагая, что четвертая прямая, выражаемая уравненiями

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

пересѣкается съ каждой изъ данныхъ, будемъ имѣть, что условiя пересѣченiя заключаются въ слѣдующемъ:

$$\frac{b_1 - b}{n} = \frac{c_1 - c}{p}$$

$$\frac{c_2 - c}{p} = \frac{a_2 - a}{m},$$

$$\frac{a_3 - a}{m} = \frac{b_3 - b}{n}.$$

Перемноживъ эти равенства почленно, получимъ, по сокращеніи неопредѣленныхъ постоянныхъ m, n, p,

$$(b - b_1)(c - c_2)(a - a_3) = (c - c_1)(a - a_2)(b - b_3).$$

Здѣсь a, b, c суть неопредѣленныя координаты любой точки прямой (8) во всякомъ ея положеніи. Обозначая ихъ, какъ координаты любой точки поверхности, описываемой этою прямою, чрезъ x, y, z, получимъ, что уравненіе этой поверхности есть

$$(y - b_1)(z - c_2)(x - a_3) = (z - c_1)(x - a_2)(y - b_3).$$

Это есть уравненіе второй степени, потому что, по раскрытіи скобокъ, въ немъ члены третьяго измѣренія сокращаются.

Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто системы прямыхъ, пересѣкающихъ три какія-нибудь данныя прямыя, есть нѣкоторая поверхность второго порядка.

Ниже мы ознакомимся подробно со свойствами поверхностей этого рода.

487. Когда точка въ пространствѣ опредѣляется по какимъ-либо условіямъ, выраженнымъ аналитически, т. е. уравненіями, то для координатъ ея могутъ получиться выраженія мнимыя. Въ этомъ случаѣ сама точка называется мнимою.

Подобнымъ же образомъ для выраженія плоскостей и прямыхъ линій по даннымъ аналитическимъ условіямъ могутъ получаться уравненія съ мнимыми коэффиціентами. Плоскости и прямыя линіи, выражаемыя такими уравненіями, называются также *мнимыми*.

Употребленіе мнимыхъ выраженій при изученіи фигуръ въ пространствѣ имѣетъ то же значеніе, какъ и въ Геометріи на плоскости (см. стр. 66).

Если соотвѣтственныя координаты двухъ точекъ суть величины мнимыя сопряженныя, то и сами точки называются *сопряженными*.

Полагая, что координаты одной изъ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ точекъ суть

$$x = a + b\sqrt{-1}, \quad y = c + d\sqrt{-1}, \quad z = e + f\sqrt{-1}$$

будемъ имѣть для координатъ другой слѣдующія выраженія:

$$x = a - b\sqrt{-1}, \quad y = c - d\sqrt{-1}, \quad z = e - f\sqrt{-1}$$

Легко вывести, такъ же какъ и въ Геометріи на плоскости, слѣдующія заключенія о сопряженныхъ мнимыхъ точкахъ:

1) Средина разстоянія между двумя мнимыми сопряженными точками есть точка дѣйствительная.

2) Прямая, проходящая черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки, есть дѣйствительная.

3) Отношеніе разстоянія между двумя мнимыми сопряженными точками къ разстоянію между двумя другими такими же точками есть величина дѣйствительная.

485. Общій видъ уравненія мнимой плоскости есть

$$(A+A'\sqrt{-1})x+(B+B'\sqrt{-1})y+(C+C'\sqrt{-1})z+(D+D'\sqrt{-1})=0.$$

Двѣ плоскости или прямыя, въ уравненіяхъ которыхъ соотвѣтственные коэффиціенты суть величины сопряженныя, называются также сопряженными.

Уравненіе плоскости, сопряженной съ предыдущею, будетъ, слѣдовательно,

$$(A-A'\sqrt{-1})x+(B-B'\sqrt{-1})y+(C-C'\sqrt{-1})z+(D-D'\sqrt{-1})=0.$$

Очевидно, что оба эти уравненія удовлетворяются координатами точекъ дѣйствительной прямой, выражаемой совокупностью уравненій

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и

$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Это показываетъ, что *на всякой мнимой плоскости находится безчисленное множество дѣйствительныхъ точекъ, именно всѣ точки прямой, по которой эта плоскость пересѣкается со своею сопряженною.*

Уравненіе всякой плоскости, проходящей черезъ точку (x_1, y_1, z_1), имѣетъ видъ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Придавая координатамъ этой точки мнимыя значенія

$$x_1=a+b\sqrt{-1},\quad y_1=c+d\sqrt{-1},\quad z_1=e+f\sqrt{-1},$$

будемъ имѣть

$$A(x-a)+B(y-c)+C(z-e)-\sqrt{-1}(Ab+Bd+Cf)=0.$$

Это уравненіе можетъ представлять дѣйствительную плоскость только тогда, когда коэффиціенты A, B, C удовлетворяютъ условію

$$Ab+Bd+Cf=0.$$

Въ такомъ случаѣ эта плоскость, выражаясь уравненіемъ

$$A(x-a)+B(y-c)-C(z-e)=0,$$

проходитъ, очевидно, черезъ дѣйствительную прямую

$$\frac{x-a}{b}=\frac{y-c}{d}=\frac{z-e}{f},$$

соединяющую мнимую точку (x_1, y_1, z_1) съ ея сопряженною.

Итакъ, *черезъ всякую мнимую точку проходитъ безчисленное множество дѣйствительныхъ плоскостей, которыя проходятъ въ то же время и черезъ точку, сопряженную съ данной.*

489. Мы видѣли, что въ уравненіяхъ прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

двѣ изъ постоянныхъ величинъ c и p могутъ быть взяты произвольно. Это показываетъ, что уравненія всякой мнимой прямой можно разсматривать въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} x&=(m+m'\sqrt{-1})z+(a+a'\sqrt{-1}) \\ y&=(n+n'\sqrt{-1})z+(b+b'\sqrt{-1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (9)$$

Уравненія прямой, сопряженной съ этою, будутъ

$$\left.\begin{aligned} x&=(m-m'\sqrt{-1})z+(a-a'\sqrt{-1}) \\ y&=(n-n'\sqrt{-1})z+(b-b'\sqrt{-1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (10)$$

Представивъ уравненія (9) въ видѣ

$$x-mz-a=\sqrt{-1}\,(m'z+a'),$$

$$y-nz-b=\sqrt{-1}\,(n'z+b'),$$

заключаемъ, что въ случаѣ, когда эти уравненія удовлетворяются дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ, должно быть

$$m'z+a'=0 \quad \text{и} \quad n'z+b'=0$$

и, слѣдовательно,

$$n'a'=m'b' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

Легко видѣть, что къ этому соотношенію сводится условіе, что прямыя (9) и (10) пересѣкаются (см. стр. 368).

При условіи (11) дѣйствительныя величины координатъ, удовлетворяющія уравненіямъ (9), будутъ, очевидно,

$$x = \frac{am' - ma'}{m'}, \quad y = \frac{bn' - nb'}{n'}, \quad z = -\frac{a'}{m'} = -\frac{b'}{n'}.$$

Этими же величинами удовлетворяются и уравненія (10). Слѣдовательно, *если мнимая прямая проходитъ черезъ дѣйствительную точку, то она пересѣкается въ этой точкѣ со своею сопряженною прямою.*

Помножая уравненія (9) послѣдовательно на n' и m' и вычитая результаты, получимъ, при условіи (11),

$$n'x - m'y + (nm' - mn')z + (bm' - an') = 0.$$

Это есть уравненіе дѣйствительной плоскости, проходящей черезъ прямую (9).

Это же уравненіе получимъ, при условіи (11), поступая такимъ же образомъ съ уравненіями (10).

Итакъ, *если двѣ сопряженныя мнимыя прямыя пересѣкаются, то, какъ точка ихъ пересѣченія, такъ и плоскость, чрезъ нихъ проходящая, суть дѣйствительныя.*

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ОБЩІЯ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Опредѣленіе поверхностей второго порядка и ихъ отношенія къ прямымъ линіямъ и плоскостямъ.

490. Простѣйшими послѣ плоскости алгебраическими поверхностями должны быть поверхности второго порядка.

Общій видъ уравненій второй степени съ тремя неизвѣстными, представляющихъ поверхности этого рода относительно прямолинейной системы координатъ, есть слѣдующій:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Jz+K=0.$$

Очевидно, что, не нарушая общности этого уравненія, можно разсматривать его также въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+ \\ +2Gx+2Hy+2Jz+K=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

что представляетъ нѣкоторыя удобства для большей простоты тѣхъ преобразованій, которымъ намъ придется подвергать это уравненіе впослѣдствіи.

При неопредѣленныхъ значеніяхъ постоянныхъ $A, B, C, D, E \ldots K$, уравненіе (1) можетъ выражать любую поверхность второго порядка относительно любой системы координатъ; поэтому всѣ заключенія, выводимыя изъ него въ предположеніи, что эти постоянныя суть какія угодно дѣйствительныя алгебраическія величины, будутъ общими свойствами поверхностей второго порядка.

491. Такъ какъ отъ умноженія уравненія (1) на какую-нибудь постоянную величину его геометрическое значеніе не измѣняется, то видъ и расположеніе поверхности обусловливается лишь отношеніями какихъ-либо девяти изъ коэффиціентовъ этого уравненія къ десятому. Эти

отношенія могутъ, слѣдовательно, разсматриваться, какъ параметры поверхности.

Для того чтобы найти поверхность второго порядка по какимъ-нибудь условіямъ, нужно опредѣлить по этимъ условіямъ названныя девять отношеній или, что все то же, найти какія-нибудь десять величинъ, пропорціональныхъ коэффиціентамъ уравненія (1) этой поверхности.

Отсюда слѣдуетъ, что девять точекъ, принадлежащихъ поверхности второго порядка, представляютъ условія, вполнѣ достаточныя для ея опредѣленія. Иначе говоря, *поверхность второго порядка вполнѣ опредѣляется девятью ея точками*.

Дѣйствительно, полагая, что данныя точки суть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(x_3 y_3 z_3)$, ... (x_9, y_9, z_9), будемъ имѣть девять равенствъ:

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Dx_1y_1 + \ldots + 2Jz_1 + K = 0,$$
$$Ax_2^2 + By_2^2 + Cz_2^2 + 2Dx_2y_2 + \ldots + 2Jz_2 + K = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Ax_9^2 + By_9^2 + Cz_9^2 + 2Dx_9y_9 + \ldots\ldots + 2Jz_9 + K = 0,$$

изъ которыхъ, какъ изъ однородныхъ линейныхъ уравненій относительно десяти неизвѣстныхъ A, B, C, $D \ldots K$, получатся единственныя значенія для отношеній между неизвѣстными. Самое же уравненіе искомой поверхности получится, какъ результатъ исключенія этихъ неизвѣстныхъ изъ послѣднихъ девяти уравненій и уравненія (1), въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} x^2, & y^2, & z^2, & xy, & xz, & yz, & x, & y, & z, & 1 \\ x_1^2, & y_1^2, & z_1^2, & x_1y_1, & x_1z_1, & y_1z_1, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_9^2, & y_9^2, & z_9^2, & x_9y_9, & x_9z_9, & y_9z_9, & x_9, & y_9, & z_9, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Оно не будетъ представлять опредѣленной поверхности только въ томъ случаѣ, когда въ первой части всѣ опредѣлители миноры, соотвѣтствующіе элементамъ первой строки и представляющіе коэффиціенты уравненія, будутъ одновременно равняться нулю. Такъ какъ это значило бы, что между координатами данныхъ точекъ имѣетъ мѣсто нѣкоторая зависимость, то заключаемъ, что девять точекъ поверхности второго порядка, всегда достаточныя для ея опредѣленія по своему

числу, могутъ въ частныхъ случаяхъ быть недостаточны по с...
относительному расположенію.

492. Найдемъ точки пересѣченія поверхности (1) съ осью OX ...
лагая для этого въ уравненіи поверхности $y=0$, $z=0$, получимъ

$$Ax^2+2Gx+K=0.$$

Два значенія x, получаемыя отсюда, будутъ разстоянія иск...
точекъ отъ начала координатъ. Такъ какъ, въ зависимости отъ коэ...
ціентовъ A, G, K, эти значенія могутъ быть дѣйствительныя или м...
мыя, то и самыя точки пересѣченія будутъ дѣйствительныя или мним...

Принимая во вниманіе, что одна и та же поверхность выража...
уравненіемъ вида (1) относительно всякой прямолинейной системы к...
ординатъ и что всякая прямая можетъ быть принята за ось OX, ...
ключаемъ, что *поверхность второго порядка пересѣкается всякою п...
мою въ двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.*

Въ томъ случаѣ, когда точки пересѣченія дѣйствительныя, отрѣз...
прямой, заключающійся между ними, называется *хордою.*

Если точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, хорда р...
няется нулю, то прямая называется *касательною* къ поверхности.

493. Найдемъ линію пересѣченія поверхности второго порядка ...
плоскостью XOY. Полагая для этого $z=0$, получимъ изъ уравненія ...

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+K=0. \quad \ldots \ldots$$

Это показываетъ, что искомая линія пересѣченія есть также втор...
порядка.

Уравненіе (2), при нѣкоторыхъ значеніяхъ его коэффиціентовъ, м...
жетъ вовсе не выражать дѣйствительной линіи (см. стр. 131). Так...
какъ при этомъ всякая прямая, лежащая въ плоскости XOY, имѣетъ
съ поверхностью (1), а слѣдовательно и съ искомой линіей (2), дв...
мнимыя общія точки, то говорятъ, что въ этомъ случаѣ пересѣчен...
происходитъ по мнимой кривой второго порядка.

Принимая во вниманіе неизмѣняемость вида уравненія (1) для вся...
кой системы координатъ, можно, слѣдовательно, сказать, что *поверх...
ность второго порядка пересѣкается всякою плоскостью по дѣйстви...
тельной или мнимой линіи того же порядка.*

494. Извѣстно изъ Геометріи на плоскости (см. стр. 73), что когда
коэффиціенты уравненія (2) подчинены условію

$$\begin{vmatrix} A, & D, & G \\ D, & B, & H \\ G, & H, & K \end{vmatrix}=0$$

или

$$ABK + 2DGH - AH^2 - BG^2 - D^2K = 0,$$

то это уравненіе выражаетъ совокупность двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ дѣйствительную точку. Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что поверхность соприкасается съ плоскостью XOY и эта плоскость называется *касательною* къ поверхности.

Смотря по тому, будутъ ли двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (2), дѣйствительныя или мнимыя, соприкосновеніе имѣетъ двоякій характеръ. Въ послѣднемъ изъ этихъ двухъ случаевъ поверхность имѣетъ съ плоскостью только одну общую дѣйствительную точку, которая и называется точкою прикосновенія. Въ первомъ же существуетъ безчисленное множество дѣйствительныхъ общихъ точекъ, лежащихъ на двухъ прямыхъ, и точка прикосновенія есть точка пересѣченія этихъ прямыхъ. Можно сказать, слѣдовательно, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ плоскость соприкасается съ поверхностью и въ то же время пересѣкаетъ ее.

Если уравненіе (2) выражаетъ двѣ прямыя, совпадающія въ одну, то каждая точка этой прямой есть точка касанія. Соприкосновеніе поверхности съ плоскостью будетъ въ этомъ случаѣ болѣе тѣсное, чѣмъ въ предыдущихъ.

495. Возьмемъ какую-нибудь прямую, проходящую черезъ начало координатъ и выражающуюся уравненіями

$$x = mz, \qquad y = nz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Исключая x и y изъ этихъ уравненій и уравненія поверхности (1), получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ

$$\left.\begin{aligned}(Am^2 + Bn^2 + C + 2Dmn + 2Em + 2Fn)z^2 + \\ + 2(Gm + Hn + J)z + K = 0\end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

корни котораго будутъ координатами z точекъ, общихъ для прямой и поверхности. Для того чтобы прямая (3) была касательною къ поверхности (1), корни послѣдняго уравненія должны быть равными, а для этого должно быть

$$\left.\begin{aligned}(Gm + Hn + J)^2 - \\ - K(Am^2 + Bn^2 + C + 2Dmn + 2Em + 2Fn) = 0\end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

При неопредѣленныхъ m и n, удовлетворяющихъ этому условію, уравненія (3) выражаютъ, очевидно, систему прямыхъ, образующихъ нѣкоторую коническую поверхность.

Чтобы получить уравненіе этой поверхности, нужно исключить неопредѣленные параметры m и n изъ уравненій (3) и условія (5).

Въ результатѣ будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}(Gx + Hy + Jz)^2 - \\ - K(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz) = 0\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

*

Такъ какъ это уравненіе второй степени, то заключаемъ, что ка..
тельныя къ поверхности второго порядка, проходящія черезъ нача..
координатъ, образуютъ коническую поверхность второго порядка.

496. Вообще, легко видѣть, что всякое однородное уравненіе съ т..мя неизвѣстными вида

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=0 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

выражаетъ конусъ второго порядка, вершина котораго находится в..
началѣ координатъ.

Это слѣдуетъ изъ того, что такое уравненіе можно разсматривать, ка..
результатъ исключенія параметровъ m и n изъ уравненій (3) и усл..

$$Am^2+Bn^2+C+2Dmn+2Em+2Fn=0\,,$$

а потому оно должно представлять геометрическое мѣсто системы пр..мыхъ, выражаемыхъ уравненіями (3) при этомъ условіи.

Нужно замѣтить, однако, что при нѣкоторой зависимости меж..
коэффиціентами A, B, C.. F послѣднее условіе можетъ не удовл..творяться никакими дѣйствительными значеніями m и n. Въ этом..
случаѣ говорятъ, что уравненіе (7) выражаетъ мнимый конусъ.

Можетъ также случиться, что первая часть уравненія (7) разлагает..
на два множителя съ дѣйствительными или мнимыми коэффиціентам..
и, слѣдовательно, это уравненіе выражаетъ совокупность двухъ дѣ..ствительныхъ или мнимыхъ плоскостей, проходящихъ черезъ начал..
Само собою понятно, что совокупность двухъ плоскостей можно ра..сматривать, какъ коническую поверхность, управляющею которой сл..житъ совокупность двухъ прямыхъ.

Всѣ эти особенности могутъ имѣть мѣсто и для конуса (7), образу..маго касательными къ поверхности второго порядка изъ начала ко..динатъ, а такъ какъ всякая точка пространства можетъ быть прин..та за начало координатъ, то можно сказать, что *касательныя къ п..верхности второго порядка изъ какой бы ни было точки пространст..
образуютъ дѣйствительный или мнимый конусъ второго порядка.*

Такой конусъ называютъ *описаннымъ* около поверхности.

497. Уравненіе (6) можетъ быть представлено въ видѣ

$$(Gx+Hy+Jz+K)^2-K.V=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ V есть сокращенное обозначеніе первой части уравненія (1) ра..сматриваемой поверхности.

Такъ какъ координаты точекъ прикосновенія касательныхъ (3) къ
поверхности (1) должны удовлетворять уравненіямъ (8) и (1), то эт..
координаты должны обращать въ нуль многочленъ

$$Gx+Hy+Jz+K.$$

Это показываетъ, что точки прикосновенія касательныхъ изъ начала координатъ, а слѣдовательно и изъ всякой другой точки, лежатъ въ одной плоскости.

Описанный конусъ (6) соприкасается, слѣдовательно, съ поверхностью (1) по линіи второго порядка, по которой эта поверхность пересѣкается плоскостью

$$Gx + Hy + Jz + K = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Эта линія можетъ быть разсматриваема, какъ управляющая конуса.

Понятно, что конусъ (6) будетъ дѣйствительнымъ только тогда, когда поверхность (1) пересѣкается плоскостью (9) по дѣйствительной линіи.

498. Если поверхность второго порядка проходитъ черезъ начало координатъ, то уравненіе ея (1) не должно имѣть постояннаго члена K и, слѣдовательно, можетъ быть представлено въ видѣ

$$\left.\begin{array}{c} (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz) + \\ + 2(Gx + Hy + Jz) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Этому уравненію удовлетворяютъ, очевидно, всѣ значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ

$$Gx + Hy + Jz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0.$$

Изъ нихъ первое выражаетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, а второе конусъ, имѣющій вершину въ началѣ. Эти поверхности пересѣкаются между собою или только въ одной точкѣ (началѣ координатъ), или по двумъ прямымъ (образующимъ конуса). Слѣдовательно, и разсматриваемая поверхность (10) имѣетъ съ плоскостью (11) или только одну общую точку, или двѣ общія прямыя. Это значитъ, что плоскость (11) есть касательная къ разсматриваемой поверхности.

Замѣчая далѣе, что при $K = 0$ уравненіе (6), выражающее геометрическое мѣсто системы касательныхъ изъ начала, обращается въ

$$(Gx + Hy + Jz)^2 = 0,$$

заключаемъ, что это геометрическое мѣсто есть касательная плоскость (11).

Итакъ, *касательная плоскость въ какой-нибудь точкѣ поверхности есть геометрическое мѣсто всѣхъ касательныхъ прямыхъ въ этой точкѣ.*

499. Возьмемъ теперь какую-нибудь прямую, параллельную оси OZ и, слѣдовательно, выражающуюся уравненіями

$$x = a, \quad y = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Для опредѣленія координатъ z точекъ пересѣченія этой прямой съ поверхностью второго порядка (1) будемъ имѣть уравненіе

$$Cz^2 + 2(Ea + Fb + J)z +$$
$$+ (Aa^2 + Bb^2 + 2Dab + 2Ga + 2Hb + K) = 0\,,$$

изъ котораго видно, что прямая (12) есть касательная къ поверхности, когда выполняется условіе

$$(Ea + Fb + J)^2 -$$
$$C(Aa^2 + Bb^2 + 2Dab + 2Ga + 2Hb + K) = 0\,.$$

Уравненія (12), при неопредѣленныхъ a и b, удовлетворяющихъ этому условію, выражаютъ систему прямыхъ, образующихъ цилиндрическую поверхность.

Замѣняя въ послѣднемъ условіи a и b чрезъ x и y, получимъ уравненіе этой поверхности

$$\left.\begin{array}{r}(Ex + Fy + J)^2 - \\ - C(Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + K) = 0\end{array}\right\} \quad \ldots (13)$$

Это есть цилиндръ второго порядка, могущій, очевидно, имѣть такія же особенности, какъ и линія, выражаемая тѣмъ же уравненіемъ на плоскости XOY и служащая ему управляющею.

Такъ какъ всякая прямая въ пространствѣ можетъ быть принята за ось координатъ, то заключаемъ изъ сказаннаго, что *касательныя къ поверхности второго порядка, параллельныя какой-либо прямой, образуютъ цилиндръ второго порядка.*

Этотъ цилиндръ называется описаннымъ около поверхности.

300. Придавая и отнимая въ первой части уравненія (13) выраженіе

$$C^2z^2 + 2C(Ex + Fy + J)z\,,$$

дадимъ этому уравненію видъ

$$(Ex + Fy + Cz + J)^2 - C \cdot V = 0\,,$$

гдѣ V означаетъ первую часть уравненія разсматриваемой поверхности (1).

Отсюда видимъ, что точки прикосновенія касательныхъ, выражаемыхъ уравненіями (12), должны удовлетворять уравненію первой степени

$$Ex + Fy + Cz + J = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Это показываетъ, что точки прикосновенія всѣхъ касательныхъ къ поверхности второго порядка, параллельныхъ одной и той же прямой, лежатъ въ одной плоскости. Описанный цилиндръ (13) соприкасается

слѣдовательно, съ поверхностью (1) по линіи второго порядка, по которой эта поверхность пересѣкается плоскостью (14). Понятно, что онъ будетъ дѣйствительный только тогда, когда эта линія дѣйствительная.

501. Возьмемъ опять прямую (3), проходящую черезъ начало координатъ.

Если она встрѣчаетъ поверхность второго порядка въ безконечно удаленной точкѣ, то въ уравненіи (4), опредѣляющемъ координаты z точекъ пересѣченія, коэффиціентъ при z^2 долженъ равняться нулю. Это даетъ условіе

$$Am^2 + Bn^2 + C + 2Dmn + 2Em + 2Fn = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

которому должны удовлетворять параметры m и n прямой.

Исключая эти параметры, получимъ уравненіе конуса

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

представляющаго геометрическое мѣсто всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало и встрѣчающихъ поверхность въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

Если послѣднее уравненіе не удовлетворяется дѣйствительными величинами неизвѣстныхъ и, слѣдовательно, представляетъ мнимый конусъ, то поверхность (1) не имѣетъ вовсе безконечно удаленныхъ точекъ. Такія поверхности называются *эллипсоидами*.

Если уравненіе (16) выражаетъ дѣйствительный конусъ, то поверхность (1) имѣетъ безконечное множество безконечно удаленныхъ точекъ, которыя лежатъ на образующихъ этого конуса и сами образуютъ безконечно удаленную кривую второго порядка [1]. Такія поверхности называются *гиперболоидами*.

Если, наконецъ, первая часть уравненія (16) разлагается на два множителя первой степени и, слѣдовательно, оно выражаетъ совокупность двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ плоскостей, то поверхность (1) имѣетъ или только одну безконечно удаленную точку, или двѣ безконечно удаленныя прямыя. Поверхности такого рода называются *параболоидами*.

502. Въ случаѣ, когда обѣ точки пересѣченія прямой (3) съ поверхностью суть безконечно удаленныя, въ уравненіи (4) и второй коэффиціентъ долженъ равнятся нулю, т. е. при условіи (15) должно имѣть мѣсто еще слѣдующее

$$Gm + Hn + J = 0\,,$$

[1] Въ силу положенія, что на прямой линіи безконечно удаленная точка единственна.

и если послѣднее условіе удовлетворяется всѣми значеніями m и n соотвѣтствующими первому, то должно быть

$$G=0,\quad H=0,\quad J=0.$$

Уравненіе (16) будетъ въ такомъ случаѣ тождественно съ уравненіемъ (6). Это значитъ, что конусъ (16) будетъ описанный около поверхности (1), т. е. всѣ его образующія будутъ касательными въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

Такой конусъ называется *ассимптотическимъ конусомъ* поверхности.

§ 2. Центръ, діаметральныя плоскости и діаметры.

503. Допустимъ, что поверхность второго порядка, выражаемая общимъ уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+\\ +2Gx+2Hy+2Jz+K=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

пересѣкается прямою линіею

$$x=mz,\quad y=nz\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

проходящею черезъ начало координатъ, въ двухъ точкахъ, симметричныхъ относительно начала, т. е. находящихся на равныхъ отъ него разстояніяхъ.

Въ такомъ случаѣ въ уравненіи, опредѣляющемъ координаты z этихъ точекъ и имѣющемъ видъ

$$\begin{aligned}(Am^2+Bn^2+C+2Dmn+2Em+2Fn)z^2+\\ +2(Gm+Hn+J)z+K=0,\end{aligned}$$

коэффиціентъ при первой степени неизвѣстнаго долженъ равняться нулю.

Это даетъ условіе

$$Gm+Hn+J=0,\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

показывающее, что существуетъ безчисленное множество прямыхъ, обладающихъ указаннымъ свойствомъ и что всѣ эти прямыя лежатъ въ плоскости, выражаемой уравненіемъ

$$Gx+Hy+Jz=0.$$

Плоскость эта пересѣкаетъ, слѣдовательно, поверхность по такой линіи, центръ которой находится въ началѣ координатъ.

Если будемъ имѣть

$$G=0,\quad H=0,\quad J=0\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

то условіе (3) выполняется независимо отъ значеній m и n и, слѣдовательно, прямая (2), при всякомъ своемъ направленіи, будетъ встрѣчать поверхность (1) въ двухъ симметричныхъ относительно начала точкахъ. Начало координатъ будетъ въ этомъ случаѣ срединою всѣхъ возможныхъ проходящихъ чрезъ него хордъ поверхности.

Точка, обладающая этимъ свойствомъ, называется *центромъ* поверхности второго порядка.

Такъ какъ условіе (3) только тогда выполняется при всякихъ значеніяхъ m и n, когда имѣютъ мѣсто равенства (4), то эти послѣднія представляютъ необходимое и достаточное условіе, для того чтобы начало координатъ было центромъ поверхности.

Итакъ, *если въ уравненіи, представляющемъ поверхность второго порядка, не существуетъ членовъ съ первыми степенями неизвѣстныхъ, то начало координатъ есть центръ поверхности, и обратно.*

504. Чтобы найти центръ поверхности второго порядка, данной общимъ уравненіемъ (1), въ которомъ коэффиціенты G, H, J какіе-нибудь, будемъ поступать слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ координаты искомаго центра чрезъ a, b, c и сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, замѣняя прежнія оси новыми, имѣющими то же направленіе, и помѣщая новое начало въ предполагаемомъ центрѣ поверхности. Формулы для такого преобразованія координатъ будутъ:

$$x = x' + a,\quad y = y' + b,\quad z = z' + c.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (1) преобразуется въ

$$\begin{gathered} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' + \\ + 2G'x' + 2H'y' + 2J'z' + K' = 0, \end{gathered}$$

гдѣ коэффиціенты членовъ второго измѣренія тѣ же самые, какъ и въ первоначальномъ уравненіи, а остальные опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} G' &= Aa + Db + Ec + G \\ H' &= Da + Bb + Fc + H \\ J' &= Ea + Fb + Cc + J \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} K' = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc + \\ + 2Ga + 2Hb + 2Jc + K \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Такъ какъ начало координатъ предполагается въ центрѣ поверхности, то должно быть

$$G' = 0,\quad H' = 0,\quad J' = 0$$

и, слѣдовательно, какъ видно изъ выраженій (5) этихъ коэффиціентовъ, координаты центра относительно прежней системы должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{array}{l} Ax + Dy + Ez + G = 0 \\ Dx + By + Fz + H = 0 \\ Ex + Fy + Cz + J = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

изъ которыхъ онѣ опредѣляются вполнѣ.

Каждое изъ этихъ послѣднихъ уравненій выражаетъ плоскость, и центръ есть, слѣдовательно, точка пересѣченія этихъ плоскостей.

505. Соотвѣтственно различнымъ случаямъ относительнаго положенія трехъ плоскостей въ пространствѣ (см. стр. 332) нужно различать слѣдующія особенности поверхностей второго порядка по отношенію къ положенію центра.

Если плоскости (7) пересѣкаются въ одной точкѣ, то поверхность (1) имѣетъ единственный опредѣленный центръ. Въ этомъ случаѣ поверхность называется *центральною.*

Если плоскости (7) параллельны одной прямой, то центръ находится въ безконечности. Поверхность называется въ этомъ случаѣ *не имѣющею центра* или поверхностью *съ безконечно удаленнымъ центромъ.*

Если плоскости (7) проходятъ черезъ одну прямую, то центръ будетъ неопредѣленный, ибо третье изъ уравненій (7) не даетъ для опредѣленія центра условія, отличнаго отъ двухъ первыхъ. Въ этомъ случаѣ каждая точка прямой, по которой пересѣкаются плоскости (7), обладаетъ свойствомъ центра.

Наконецъ, въ случаѣ, когда всѣ три плоскости (7) совпадаютъ въ одну, центръ будетъ также неопредѣленный, при чемъ свойствомъ центра будетъ обладать любая точка этой плоскости.

Легко убѣдиться изъ простыхъ геометрическихъ соображеній, что въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ случаевъ общее уравненіе (1) выражаетъ поверхность цилиндрическую, а во второмъ совокупность двухъ плоскостей.

Извѣстно, что уравненія (7) имѣютъ опредѣленныя конечныя рѣшенія только тогда, когда опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix}$$

не равняется нулю. Это есть, слѣдовательно, аналитическій признакъ или условіе, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (1), есть цен-

тральная. Напротивъ, равенство нулю этого опредѣлителя должно служить указаніемъ, что уравненіе (1) выражаетъ поверхность съ безконечно удаленнымъ или неопредѣленнымъ центромъ.

Послѣднее будетъ, очевидно, имѣть мѣсто только тогда, когда каждый изъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} G, & D, & E \\ H, & B, & F \\ J, & F, & C \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A, & G, & E \\ D, & H, & F \\ E, & J, & C \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A, & D, & G \\ D, & B, & H \\ E, & F, & J \end{vmatrix}$$

равняется нулю. Въ случаѣ же безконечно удаленнаго центра по крайней мѣрѣ два изъ этихъ опредѣлителей не должны равняться нулю.

506. Изъ предыдущаго видимъ, что если поверхность второго порядка (1) есть центральная, то посредствомъ преобразованія координатъ уравненіе ея можно привести къ виду

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + K' = 0 \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

гдѣ постоянный членъ K' опредѣляется равенствомъ (6). Это равенство можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$K' = (Aa + Db + Ec + G)a + (Da + Bb + Fc + H)b +$$
$$+ (Ea + Fb + Cc + J)c + (Ga + Hb + Jc + K).$$

Такъ какъ a, b, c суть координаты центра, то три первые многочлена, заключенные въ скобкахъ, равны нулю и, слѣдовательно, должно быть

$$K' = Ga + Hb + Jc + K.$$

Это показываетъ, что координаты центра относительно первоначальной системы должны удовлетворять уравненію

$$Gx + Hy + Jz + K - K' = 0.$$

Для того чтобы это уравненіе было совмѣстимо съ уравненіями (7), должно выполняться условіе

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K - K' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K \end{vmatrix} = K' \begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix}$$

откуда K' опредѣляется по коэффиціентамъ первоначальнаго уравненія (1).

При $K'=0$ уравненіе (8), а слѣдовательно и (1), выражаетъ конусъ (см. стр. 388). Итакъ, равенство нулю опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K \end{vmatrix}$$

есть условіе, при которомъ общее уравненіе второй степени (1) выражаетъ коническую поверхность [1]).

507. Возьмемъ теперь какую-нибудь прямую, пересѣкающую поверхность (1) въ двухъ точкахъ, и пусть a, b, c будутъ координаты средины хорды, образуемой этою прямою. Въ такомъ случаѣ уравненіе разсматриваемой прямой можно представить въ видѣ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ m, n, p суть, какъ извѣстно, величины, опредѣляющія направленіе прямой.

Обозначая черезъ ϱ величину каждаго изъ трехъ отношеній, составляющихъ уравненія (9), будемъ имѣть

$$x=m\varrho+a,\quad y=n\varrho+b,\quad z=p\varrho+c, \quad \ldots\ldots (10)$$

при чемъ всякому положенію точки (x, y, z) на прямой (9) будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе величины ϱ, и обратно.

Чтобы опредѣлить точки пересѣченія поверхности (1) съ прямою (9), подставимъ послѣднія выраженія координатъ въ уравненіе поверхности (1). Въ результатѣ будемъ имѣть уравненіе вида

$$P\varrho^2+2Q\varrho+R=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

[1]) Это условіе выполняется, какъ видно изъ предыдущаго, также и для поверхностей съ неопредѣленнымъ центромъ или цилиндрическихъ. Послѣднія, какъ слѣдуетъ изъ ихъ опредѣленія (см. стр. 299) представляютъ частный видъ коническихъ, когда вершина есть точка безконечно удаленная.

опредѣляющее два значенія ϱ, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія. Въ немъ коэффиціенты P, Q, R имѣютъ слѣдующія значенія:

$$P = Am^2 + Bn^2 + Cp^2 + 2Dmn + 2Emp + 2Fnp,$$

$$Q = (Am + Dn + Ep)a + (Dm + Bn + Fp)b + \\ + (Em + Fn + Cp)c + (Gm + Hn + Jp),$$

$$R = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc + \\ + 2Ga + 2Hb + 2Jc + K.$$

Обозначая черезъ ϱ_1 и ϱ_2 корни уравненія (11), будемъ имѣть

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{2Q}{P}.$$

Если же положимъ, что координаты точекъ пересѣченія прямой (9) съ поверхностью суть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, то изъ выраженій (10) получимъ

$$x_1 + x_2 = m(\varrho_1 + \varrho_2) + 2a,$$

$$y_1 + y_2 = n(\varrho_1 + \varrho_2) + 2b,$$

$$z_1 + z_2 = p(\varrho_1 + \varrho_2) + 2c,$$

и такъ какъ a, b, c суть координаты средины хорды и, слѣдовательно,

$$x_1 + x_2 = 2a, \quad y_1 + y_2 = 2b, \quad z_1 + z_2 = 2c,$$

то должно быть:

$$m(\varrho_1 + \varrho_2) = 0, \quad n(\varrho_1 + \varrho_2) = 0, \quad p(\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Замѣчая же, что величины m, n и p не должны равняться нулю одновременно, потому что прямая не можетъ быть параллельна всѣмъ тремъ плоскостямъ координатъ, приходимъ къ заключенію, что должно быть $(\varrho_1 + \varrho_2) = 0$, т. е. $Q = 0$ или

$$(Am + Dn + Ep)a + (Dm + Bn + Fp)b + (Em + Fn + Cp)c + \\ + (Gm + Hn + Jp) = 0.$$

Отсюда видимъ, что координаты средины хорды, образуемой прямою, удовлетворяютъ уравненію

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} A' &= Am + Dn + Ep \\ B' &= Dm + Bn + Fp \\ C' &= Em + Fn + Cp \\ D' &= Gm + Hn + Jp \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Это уравненіе выражаетъ плоскость.

Если положимъ, что прямая (9) перемѣщается, сохраняя свое направленіе, такъ что величины m, n, p не измѣняются, то и коэффиціенты A', B', C', D' не будутъ измѣняться. Уравненіе (12) выражаетъ, слѣдовательно, геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ хордъ, параллельныхъ между собою.

Это геометрическое мѣсто называется *діаметральною плоскостью* поверхности второго порядка.

508. Уравненіе (12) только тогда не представляетъ вполнѣ опредѣленной плоскости, когда

$$A' = B' = C' = D' = 0.$$

Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ выраженій (13), должно быть

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ G, & H, & J \end{vmatrix} = 0,$$

и т. д.

Это суть условія, при которыхъ для координатъ центра поверхности получаются изъ уравненій (7) выраженія неопредѣленныя.

Слѣдовательно, за исключеніемъ случая, когда поверхность имѣетъ неопредѣленный центръ [1]), всякому направленію хордъ соотвѣтствуетъ діаметральная плоскость.

Если поверхность имѣетъ безконечно удаленный центръ, то должно быть

$$\begin{vmatrix} A, & D, & F \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix} = 0.$$

По свойству опредѣлителей это равенство можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} Am + Dn + Ep, & D, & E \\ Dm + Bn + Fp, & B, & F \\ Em + Fn + Cp, & F, & C \end{vmatrix} = 0$$

или, что все то же

$$A'(BC - F^2) + B'(EF - CD) + C'(DF - BE) = 0.$$

Въ послѣднемъ видѣ оно представляетъ условіе параллельности плоскости (12) съ прямою, выражаемой уравненіями

[1]) т. е. когда она цилиндрическая.

$$\frac{x-x_1}{BC-F^2}=\frac{y-y_1}{EF-CD}=\frac{z-z_1}{DF-BE}\ldots\ldots\ldots(14)$$

Такъ какъ направленіе этой прямой не зависитъ отъ величинъ m, n, p, то заключаемъ, что *всѣ діаметральныя плоскости поверхности съ безконечно удаленнымъ центромъ параллельны одной и той же прямой.*

509. Уравненіе діаметральной плоскости (12) можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$Um+Vn+Wp=0\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

гдѣ

$$U=Ax+Dy+Ez+G\,,$$
$$V=Dx+By+Fz+H\,,$$
$$W=Ex+Fy+Cz+J\,.$$

Это показываетъ, что *всѣ діаметральныя плоскости центральной поверхности втораго порядка проходятъ черезъ ея центръ* (см. стр. 344).

Сами плоскости (7), пересѣченіемъ которыхъ опредѣляется центръ, суть діаметральныя, такъ какъ уравненія ихъ представляютъ частные случаи уравненія (12), когда двѣ изъ постоянныхъ m, n, p равняются нулю. Слѣдовательно, эти плоскости проходятъ чрезъ средины хордъ, параллельныхъ осямъ координатъ.

Легко видѣть далѣе, что всякая плоскость, проходящая черезъ центръ поверхности, есть діаметральная, ибо уравненіе всякой такой плоскости имѣетъ видъ (15). При этомъ, по данному направленію діаметральной плоскости, опредѣляемому коэффиціентами A', B', C', направленіе соотвѣтствующихъ хордъ опредѣлится изъ первыхъ трехъ равенствъ (13), дающихъ, въ случаѣ центральной поверхности, для каждой изъ величинъ m, n, p единственное и опредѣленное значеніе [1].

510. Прямыя, по которымъ пересѣкаются между собою діаметральныя плоскости, называются *діаметрами* поверхности.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что всѣ діаметры центральной поверхности проходятъ черезъ центръ, а всѣ діаметры поверхности, не имѣющей центра, параллельны между собою.

Аналитически всякій діаметръ можетъ быть опредѣляемъ двумя уравненіями вида

$$Um+Vn+Wp=0\,,$$
$$Um'+Vn'+Wp'=0\,,$$

гдѣ U, V, W имѣютъ указанныя выше значенія.

---

[1]) Для поверхности съ безконечно удаленнымъ центромъ величины m, n, p опредѣляются какою-нибудь другою системою трехъ уравненій изъ группы (13).

Изъ этихъ уравненій имѣемъ

$$\frac{U}{np'-pn'}=\frac{V}{pm'-mp'}=\frac{W}{mn'-nm'}$$

или

$$\frac{Ax+Dy-Ez+G}{\alpha}=\frac{Dx+By+Fz+H}{\beta}=\frac{Ex-Fy+Cz+J}{\gamma},$$

гдѣ

$$\alpha=np'-pn',\quad \beta=pm'-mp',\quad \gamma=mn'-nm'.$$

Въ такомъ видѣ могутъ быть разсматриваемы уравненія всякаго діаметра центральной поверхности, при чемъ отношеніями величинъ α, β, γ опредѣляется его направленіе.

Что же касается поверхностей, не имѣющихъ центра, то изъ предыдущаго видно, что діаметры ихъ выражаются уравненіями (14).

Діаметръ поверхности второго порядка можно также разсматривать какъ геометрическое мѣсто центровъ кривыхъ, получаемыхъ при пересѣченіи поверхности параллельными плоскостями. Въ самомъ дѣлѣ, это слѣдуетъ изъ того, что діаметры такихъ кривыхъ, имѣющіе одно какое-нибудь направленіе, суть по отношенію къ поверхности хорды, средины которыхъ должны лежать на соотвѣтствующей этому направленію діаметральной плоскости. Другому направленію діаметровъ кривыхъ будетъ соотвѣтствовать другая діаметральная плоскость и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто центровъ будетъ линія пересѣченія діаметральныхъ плоскостей.

511. Не трудно убѣдиться, что *линіи, по которымъ поверхность второго порядка пересѣкается параллельными плоскостями, суть подобныя между собою.*

Очевидно, что это достаточно доказать только для плоскостей, параллельныхъ какой-нибудь плоскости координатъ, напр. XOY. Всякая такая плоскость выражается уравненіемъ

$$z=c,$$

и если положимъ, что уравненіе разсматриваемой поверхности есть

$$f(x,y,z)=0,$$

то будемъ имѣть, что уравненіе

$$f(x,y,c)=0,$$

получаемое изъ предыдущихъ исключеніемъ z, выражаетъ проекцію линіи пересѣченія на плоскость XOY прямыми, параллельными оси OZ

(см. стр. 320), проекцію, очевидно, тождественную съ самой линіей пересѣченія.

Примѣняя это къ общему уравненію (1) поверхностей второго порядка, получимъ для проекціи линіи пересѣченія уравненіе

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2(Ec+G)x+2(Fc+H)y+$$
$$+Cc^2+2Jc+K=0.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи коэффиціенты членовъ второго измѣренія не зависятъ отъ c, то линіи, выражаемыя имъ при различныхъ значеніяхъ c, суть подобныя (см. стр. 264). Таковыми же должны быть и сами линіи пересѣченія.

512. Возьмемъ двѣ какія-нибудь діаметральныя плоскости

$$A'_1x+B'_1y+C'_1z+D'_1=0$$

и

$$A'_2x+B'_2y+C'_2z+D'_2=0$$

и положимъ, что соотвѣтствующія имъ хорды выражаются уравненіями

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Условіе, при которомъ первая плоскость параллельна хордамъ второй, заключается, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ:

$$A'_1m_2+B'_1n_2+C'_1p_2=0.$$

Условіе же параллельности второй плоскости съ хордами первой есть

$$A'_2m_1+B'_2n_1+C'_2p_1=0.$$

Принимая во вниманіе значеніе коэффиціентовъ въ уравненіяхъ разсматриваемыхъ плоскостей:

$$A'_1=Am_1+Dn_1+Ep_1,\qquad A'_2=Am_2+Dn_2+Ep_2,$$
$$B'_1=Dm_1+Bn_1+Fp_1,\qquad B'_2=Dm_2+Bn_2+Fp_2,$$
$$C'_1=Em_1+Fn_1+Cp_1,\qquad C'_2=Em_2+Fn_2+Cp_2,$$

легко видѣть, что эти условія тождественны.

Итакъ, если одна изъ двухъ діаметральныхъ плоскостей параллельна хордамъ, соотвѣтствующимъ другой, то и другая имѣетъ то же свойство по отношенію къ хордамъ первой.

Такія діаметральныя плоскости называются *сопряженными*.

Діаметры, параллельные хордамъ двухъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей, называются также *сопряженными*. Очевидно, что сопряженные діаметры лежатъ на сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ и, обратно, сопряженныя діаметральныя плоскости проходятъ чрезъ сопряженные діаметры.

513. Если поверхность центральная, то каждой діаметральной плоскости соотвѣтствуетъ безчисленное множество сопряженныхъ. Это всѣ плоскости, проходящія черезъ діаметръ, параллельный хордамъ данной діаметральной плоскости.

Между этими плоскостями, сопряженными съ данной, будетъ существовать безчисленное множество паръ плоскостей, сопряженныхъ между собою.

Три діаметральныя плоскости, изъ которыхъ каждая есть сопряженная съ двумя другими, составляютъ *систему сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей*, и три діаметра, по которымъ онѣ пересѣкаются — *систему сопряженныхъ діаметровъ*.

Для поверхности, не имѣющей центра, всякія двѣ діаметральныя плоскости, сопряженныя съ одной и той же третьей, параллельны между собою, и потому между ними не можетъ быть сопряженныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что для такихъ поверхностей не существуетъ системъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ [1].

514. Общее уравненіе вида (1) выражаетъ поверхность втораго порядка по отношенію къ какой угодно системѣ координатъ. Но изъ предыдущаго легко видѣть, что выборомъ системы координатъ это уравненіе можетъ быть значительно упрощено. Такъ, если плоскость YOZ совпадаетъ съ діаметральною плоскостью поверхности, а ось OX параллельна хордамъ, чрезъ средины которыхъ эта плоскость проходитъ, то въ уравненіи поверхности (1) должно быть

$$D=0, \quad E=0, \quad G=0.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что при названномъ расположеніи системы координатъ всякимъ произвольнымъ значеніямъ y и z должны, для точекъ поверхности, соотвѣтствовать два значенія x, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но противоположныя по знаку, вслѣдствіе чего уравненіе не должно содержать тѣхъ членовъ, въ которыхъ неизвѣстное x входитъ въ первой степени. Въ этомъ же легко убѣдиться, припоминая, что діаметральная плоскость, проходящая черезъ средины хордъ, параллельныхъ оси OX (см. стр. 399), выражается уравненіемъ

$$Ax+Dy+Ez+G=0,$$

[1] Собственно говоря, для поверхностей съ безконечно удаленнымъ центромъ діаметральная плоскость, сопряженная съ двумя данными, не параллельными между собою, есть плоскость, безконечно удаленная всѣми своими точками (см. стр. 328).

а для того чтобы это уравненіе выражало плоскость YOZ, коэффиціенты D, E и G должны равняться нулю.

Если двѣ плоскости координатъ YOZ и XOZ совпадаютъ съ двумя сопряженными діаметральными плоскостями, а лежащія въ нихъ оси OX и OY параллельны соотвѣтствующимъ имъ хордамъ, то на томъ же основаніи въ уравненіи (1), кромѣ упомянутыхъ коэффиціентовъ, должны равняться нулю еще коэффиціенты F и H, вслѣдствіе чего уравненіе поверхности принимаетъ видъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Jz + K = 0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

515. Такъ какъ для всякой поверхности второго порядка существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей, то заключаемъ, что къ виду (16) можетъ быть приведено уравненіе какой угодно поверхности этого порядка. Для этой цѣли за плоскости YOZ и XOZ принимаютъ двѣ какія-нибудь сопряженныя діаметральныя плоскости, а за плоскость XOY любую изъ плоскостей, параллельныхъ хордамъ, соотвѣтствующимъ двумъ первымъ. Въ частности эта послѣдняя плоскость сама можетъ быть діаметральною, такъ что три оси координатъ будутъ представлять систему трехъ сопряженныхъ діаметровъ, и, слѣдовательно, начало координатъ будетъ центромъ поверхности. Тогда уравненіе (16), какъ не долженствующее содержать членовъ первой степени (см. стр. 393), приметъ видъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Понятно, однако, что такой выборъ плоскости XOY, будучи всегда возможенъ для поверхностей центральныхъ, вовсе невозможенъ для поверхностей съ безконечно удаленнымъ центромъ.

516 Мы видѣли, что условіемъ, при которомъ уравненіе (1) выражаетъ поверхность съ безконечно удаленнымъ или неопредѣленнымъ центромъ, служитъ соотношеніе

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix} = 0,$$

которое для уравненія (16) обращается въ

$$ABC = 0$$

и требуетъ равенства нулю одного изъ трехъ первыхъ коэффиціентовъ этого уравненія.

Если $A = 0$ или $B = 0$, то уравненіе (16) вовсе не будетъ содержать одного изъ неизвѣстныхъ и, слѣдовательно, будетъ представлять поверхность цилиндрическую (см. стр. 317). Это есть случай неопредѣленнаго центра.

Слѣдовательно, поверхность съ безконечно удаленнымъ центромъ будетъ выражаться уравненіемъ (16) только тогда, когда въ немъ $C = 0$, т. е. когда оно имѣетъ видъ

$$Ax^2 + By^2 + 2Jz + K = 0.$$

Если при этомъ начало координатъ будетъ находиться на самой поверхности, то уравненіе не будетъ содержать постояннаго члена K и, слѣдовательно, обратится въ

$$Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Очевидно, что такой выборъ начала координатъ, при указанномъ выше направленіи плоскости XOY, всегда возможенъ, ибо, какъ видно изъ предыдущаго уравненія, на оси OZ существуетъ опредѣленная дѣйствительная точка, принадлежащая поверхности.

Такъ какъ при $z = 0$ уравненіе (18) обращается въ

$$Ax^2 + By^2 = 0$$

и выражаетъ на плоскости XOY совокупность двухъ проходящихъ черезъ начало прямыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ), то заключаемъ, что эта плоскость для поверхности, выражаемой уравненіемъ (18), есть касательная и начало координатъ есть ея точка прикосновенія.

517. Изъ сказаннаго видимъ, что всѣ возможныя поверхности второго порядка могутъ выражаться уравненіями видовъ (17) и (18). Именно, всякая центральная поверхность выражается уравненіемъ (17), когда за плоскости координатъ будутъ приняты три какія-нибудь сопряженныя діаметральныя плоскости. Всякая же поверхность съ безконечно удаленнымъ центромъ выражается уравненіемъ (18), когда за двѣ плоскости координатъ будутъ приняты двѣ какія-нибудь сопряженныя діаметральныя плоскости, а за третью плоскость касательная къ поверхности въ точкѣ пересѣченія ея съ діаметромъ, по которому пересѣкаются двѣ первыя.

Кромѣ того, этими же уравненіями выражаются въ частности поверхности второго порядка коническія и цилиндрическія. Такъ, уравненіе (17), при $K = 0$, выражаетъ конусъ, а, при равенствѣ нулю одного изъ трехъ первыхъ коэффиціентовъ, цилиндръ эллиптическій или гиперболическій (см. стр. 300).

Уравненіе же (18), при $A = 0$ или $B = 0$, выражаетъ цилиндръ параболическій.

§ 3. Главныя діаметральныя плоскости.

518. Діаметральная плоскость называется *главною*, когда она перпендикулярна къ соотвѣтствующимъ ей хордамъ. Очевидно, что относи-

тельно такой плоскости точки поверхности второго порядка расположены симметрично.

Займемся разысканіемъ главныхъ плоскостей для поверхности второго порядка, произвольно взятой и выражаемой по отношенію къ прямоугольной системѣ координатъ общимъ уравненіемъ

$$\left.\begin{array}{c} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+ \\ +2Gx+2Hy+2Jz+K=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Предположеніемъ, что система координатъ прямоугольная, очевидно, не нарушается общность изслѣдованія самой поверхности, а между тѣмъ имъ достигается большая простота этого изслѣдованія, такъ какъ условіе перпендикулярности въ случаѣ прямоугольной системы координатъ проще, чѣмъ при косоугольной.

Положимъ, что уравненіе главной діаметральной плоскости есть

$$A'x+B'y+C'z+D'=0\,,\ldots\ldots\ldots (2)$$

и пусть уравненія

$$\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{p}$$

выражаютъ прямую, параллельную хордамъ, которыхъ средины лежатъ на этой плоскости

Въ такомъ случаѣ, по условію перпендикулярности, будемъ имѣть (см. стр. 360)

$$\frac{A'}{m}=\frac{B'}{n}=\frac{C'}{p}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или, по замѣнѣ A', B', C' ихъ значеніями, какъ коэффиціентовъ въ уравненіи діаметральной плоскости поверхности (1) (см. стр. 397)

$$\frac{Am+Dn+Ep}{m}=\frac{Dm+Bn+Fp}{n}=\frac{Em+Fn+Cp}{p}\ \ldots (4)$$

Такъ какъ положеніе главной плоскости вполнѣ опредѣляется направленіемъ соотвѣтствующихъ ей хордъ, т. е. величинами, пропорціональными m, n, p, то послѣднія равенства служатъ вполнѣ достаточными условіями для аналитическаго рѣшенія вопроса, ибо, по уничтоженіи знаменателей, они представятъ относительно неизвѣстныхъ, m, n, p систему двухъ однородныхъ уравненій второй степени.

510. Если обозначимъ черезъ S величину каждаго изъ отношеній (3) или (4), то будемъ имѣть

$$A'=mS,\quad B'=nS,\quad C'=pS$$

или

$$\left.\begin{aligned}(A-S)m+Dn+Ep=0\\ Dm+(B-S)n+Fp=0\\ Em+Fn+(C-S)p=0\end{aligned}\right\}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

и уравненію главной плоскости (2) можно будетъ дать видъ

$$S(mx+ny+pz)+Gm+Hn+Jp=0\quad.\ .\ .\ .\ .$$

Нахожденіе отношеній между m, n, p значительно упрощается, к... да будетъ извѣстна величина S, такъ какъ въ такомъ случаѣ эти от... шенія опредѣлятся изъ двухъ какихъ-нибудь уравненій группы ... которыя всѣ суть первой степени. Но для того чтобы опредѣлить ... нужно только исключить m, n и p изъ всѣхъ трехъ уравненій (5). ... результатѣ получится уравненіе съ одною неизвѣстною

$$\left|\begin{matrix}A-S, & D\ , & E\\ D\ , & B-S, & F\\ E\ , & F\ , & C-S\end{matrix}\right|=0$$

или

$$\left.\begin{aligned}(A-S)(B-S)(C-S)-F^2(A-S)-E^2(B-S)-D^2(C-S)+\\ +2DEF=0\end{aligned}\right\}\ .$$

или, по раскрытіи скобокъ и измѣненіи знаковъ всѣхъ членовъ,

$$\left.\begin{aligned}S^3-(A+B+C)S^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)S-\\ -(ABC+2DEF-AF^2-BE^2-CD^2)=0\end{aligned}\right\}\ .$$

Это уравненіе третьей степени, и потому имѣетъ три рѣшенія и... корня.

Каждому изъ этихъ рѣшеній соотвѣтствуетъ особая главная пло... кость, опредѣляемая соотвѣтствующею ему системою величинъ m, n, ...

Таким образомъ видимъ, что *для всякой поверхности второго поря... ка существуютъ, вообще говоря, три главныя діаметральныя плоскост...*

520. Постараемся доказать, что всѣ три корня уравненія (7) или ... суть всегда дѣйствительные.

Это обнаруживается весьма просто въ томъ случаѣ, когда между коэфф... ціентами D, E, F существуютъ равные нулю. Такъ, если всѣ три эт... коэффиціента равны нулю, то уравненіе (7) обращается въ

$$(A-S)(B-S)(C-S)=0\,,$$

и корнями его будутъ величины A, B, C.

Если два изъ названныхъ коэффиціентовъ, напр. D и E, равняютс... нулю, то уравненіе (7) обращается въ

$$(A-S)[(B-S)(C-S)-F^2]=0\,,$$

откуда видно, что одинъ его корень есть A, а два другіе суть корни квадратнаго уравненія

$$S^2-(B+C)S+(BC-F^2)=0\,,$$

именно

$$S=\frac{1}{2}[(B+C)\pm\sqrt{(B-C)^2+4F^2}],$$

величины, очевидно, дѣйствительныя.

Если только одинъ изъ коэффиціентовъ D, E, F, напр. D, равняется нулю, то, обозначая первую часть уравненія (7) чрезъ V, будемъ имѣть

$$V=(A-S)(B-S)(C-S)-F^2(A-S)-E^2(B-S)\ .\ .\ (9)$$

или

$$V=(A-S)(B-S)(C-S)\left[1-\frac{F^2}{(B-S)(C-S)}-\frac{E^2}{(A-S)(C-S)}\right].\ (10)$$

Допустимъ, что $A<B$. Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ выраженія (9), величина V, при $S=A$, получаетъ отрицательное значеніе

$$-E^2(B-A)\,,$$

а при $S=B$, положительное

$$F^2(B-A).$$

Кромѣ того изъ выраженія (10) видно, что, при $S=-\infty$, величина V обращается въ $+\infty$, а при $S=+\infty$, въ $-\infty$.

Если предположимъ, что S измѣняется непрерывно, получая всѣ возможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ и переходя послѣдовательно черезъ значенія

$$-\infty,\ \ A,\ \ B,\ \ +\infty,$$

то будемъ имѣть, что и V измѣняется непрерывно, получая послѣдовательно значенія, которыхъ знаки суть

$$+,\ -,\ +,\ -.$$

Такъ какъ конечная величина можетъ перейти непрерывно изъ положительнаго значенія въ отрицательное, или обратно, не иначе какъ сдѣлавшись сперва равною нулю, то заключаемъ, что въ трехъ промежуткахъ между названными четырьмя значеніями S должны существо-

вать такія дѣйствительныя величины, при которыхъ выраженіе $F\dots$ щается въ нуль и которыя суть, слѣдовательно, корни уравненія $(\dots$

Тѣ же соображенія примѣнимы и въ предположеніи, что $A > B$

Если же $A = B$, то уравненіе (7) обращается въ

$$(A-S)[(A-S)(C-S)-F^2-E^2]=0,$$

причемъ очевидно, что однимъ его корнемъ будетъ A, а двумя другими дѣйствительные корни квадратнаго уравненія

$$S^2-(A+C)S+(AC-E^2-F^2)=0.$$

521. Обратимся теперь къ случаю, когда ни одинъ изъ коэффиціентовъ D, E, F не равняется нулю.

Обозначимъ чрезъ L, M, N разности

$$A-\frac{DE}{F},\qquad B-\frac{DF}{E},\qquad C-\frac{EF}{D},$$

имѣющія, очевидно, величины конечныя. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$A=L+\frac{DE}{F},\quad B=M+\frac{DF}{E},\quad C=N+\frac{EF}{D}.$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (7) и измѣнивъ въ немъ знаки, получимъ

$$\left(S-L-\frac{DE}{F}\right)\left(S-M-\frac{DF}{E}\right)\left(S-N-\frac{EF}{D}\right)-$$

$$-F^2\left(S-L-\frac{DE}{F}\right)-E^2\left(S-M-\frac{DF}{E}\right)-D^2\left(S-N-\frac{EF}{D}\right)-$$

$$-2DEF=0$$

или, по перемноженіи и сокращеніи,

$$(S-L)(S-M)(S-N)-$$

$$-\frac{EF}{D}(S-L)(S-M)-\frac{DF}{E}(S-L)(S-N)-\frac{DE}{F}(S-M)(S-N)=0$$

или, наконецъ,

$$\left.\begin{array}{c}P(S-L)(S-M)(S-N)-\\ -\dfrac{(S-L)(S-M)}{D^2}-\dfrac{(S-L)(S-N)}{E^2}-\dfrac{(S-M)(S-N)}{F^2}=0\end{array}\right\}\dots(11)$$

гдѣ P означаетъ $\dfrac{1}{DEF}$.

Послѣ такого преобразованія уравненія, опредѣляющаго S, обозначимъ его первую часть черезъ V, т. е. положимъ

$$\left.\begin{aligned} V = P(S-L)(S-M)(S-N) - \\ -\frac{(S-L)(S-M)}{D^2} - \frac{(S-L)(S-N)}{E^2} - \frac{(S-M)(S-N)}{F^2} \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

или

$$V = (S-L)(S-M)(S-N)\left[P - \frac{1}{D^2(S-N)} - \frac{1}{E^2(S-M)} - \frac{1}{F^2(S-L)}\right].$$

Допустимъ сперва, что между величинами L, M, N нѣтъ равныхъ, и пусть

$$L < M < N.$$

Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ равенства (12), величина V будетъ имѣть, при $S = L$ и при $S = N$, отрицательныя значенія

$$-\frac{(L-M)(L-N)}{F^2} \quad \text{и} \quad -\frac{(N-L)(N-M)}{D^2},$$

а, при $S = M$, положительное

$$\frac{(M-L)(N-M)}{E^2}.$$

Кромѣ того, изъ послѣдняго выраженія для V видно, что, при $S = -\infty$, эта величина обращается въ $\pm\infty$, а при $S = +\infty$, въ $\mp\infty$, гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ случаю, когда $P < 0$, а нижніе случаю, когда $P > 0$.

Поэтому, если положимъ, что S возрастаетъ непрерывно, получая всѣ возможныя дѣйствительныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ и переходя последовательно черезъ значенія

$$-\infty, \ L, \ M, \ N, \ +\infty, \ \ldots\ldots \quad (13)$$

то будемъ имѣть, что V, измѣняясь также непрерывно, получитъ рядъ значеній, коихъ знаки чередуются слѣдующимъ образомъ:

$$\pm, \ -, \ +, \ -, \ \mp.$$

Отсюда заключаемъ, что, при $P < 0$, должны существовать въ трехъ первыхъ промежуткахъ между пятью величинами (13) такія значенія S, которыя обращаютъ V въ нуль и которыя, слѣдовательно, суть корни уравненія (11) или (8). Если же $P > 0$, то тоже самое должно быть сказано о трехъ послѣднихъ промежуткахъ между величинами (13).

Само собою понятно, что приведенныя соображенія имѣютъ силу при всякомъ порядкѣ неравенства величинъ L, M, N.

Если двѣ изъ этихъ величинъ равны между собою, напр. $L = M$ то, какъ видно непосредственно изъ уравненія (11), одинъ изъ его корней будетъ $S = L$, два же другіе будутъ корнями квадратнаго уравненія

$$P(S-L)(S-N) - \frac{1}{D^2}(S-L) - \left(\frac{1}{E^2}+\frac{1}{F^2}\right)(S-N) = 0.$$

Что они дѣйствительны, слѣдуетъ уже изъ того, что первая часть этого послѣдняго уравненія имѣетъ разные знаки при $S = L$ и при $S = N$

Итакъ, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ уравненіе, опредѣляющее S имѣетъ три дѣйствительные корня. Это значитъ, что *три главныя діаметральныя плоскости поверхности второго порядка всегда дѣйствительныя.*

522. Чтобы опредѣлить по данному значенію S соотвѣтствующее направленіе главной плоскости, т. е. величины m, n, p, можно поступать слѣдующимъ образомъ.

Умноживъ два первыя изъ уравненій (5) послѣдовательно на F и E и вычтя результаты, получимъ

$$[(A-S)F-DE]m-[(B-S)E-DF]n=0.$$

Точно также, исключивъ m изъ двухъ послѣднихъ уравненій (5) получимъ

$$[(B-S)E-DF]n-[(C-S)D-EF]p=0.$$

Эти равенства можно представить въ видѣ

$$F(S-L)m=E(S-M)n=D(S-N)p.$$

Слѣдовательно, величины m, n, p пропорціональны произведеніямъ

$$DE(S-M)(S-N),\quad DF(S-L)(S-N),\quad EF(S-L)(S-M).$$

523. Будемъ обозначать корни уравненія (7) чрезъ S_1, S_2, S_3, и пусть соотвѣтствующія имъ значенія m, n, p будутъ послѣдовательно m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3.

Въ такомъ случаѣ, въ силу соотношеній (5), будемъ имѣть слѣдующія группы равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} S_1m_1 &= Am_1+Dn_1+Ep_1\\ S_1n_1 &= Dm_1+Bn_1+Fp_1\\ S_1p_1 &= Em_1+Fn_1+Cp_1\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} S_2m_2 &= Am_2+Dn_2+Ep_2\\ S_2n_2 &= Dm_2+Bn_2+Fp_2\\ S_2p_2 &= Em_2+Fn_2+Cp_2\end{aligned}\right\}.$$

Если умножимъ равенства первой изъ этихъ группъ послѣдовательно на m_2, n_2, p_2, а равенства второй группы на m_1, n_1, p_1, и изъ

суммы первыхъ произведеній вычтемъ сумму вторыхъ, то, очевидно, получимъ

$$(S_1-S_2)(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)=0 .$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$(S_1-S_3)(m_1m_3+n_1n_3+p_1p_3)=0$$

и

$$(S_2-S_3)(m_2m_3+n_2n_3+p_2p_3)=0 .$$

Отсюда видно, что за исключеніемъ случая, когда между величинами S_1, S_2, S_3 существуютъ равныя, *каждыя двѣ главныя діаметральныя плоскости перпендикулярны между собою*, а это значитъ, что онѣ сопряженныя.

Діаметры, по которымъ онѣ пересѣкаются, называются *главными діаметрами* или *осями* поверхности.

Итакъ, три главныя плоскости составляютъ систему трехъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ между собою, а три оси систему трехъ сопряженныхъ діаметровъ.

Такая система, какъ мы видѣли выше, можетъ существовать только для поверхности центральной.

524. Если поверхность не имѣетъ центра, то одна изъ главныхъ плоскостей будетъ безконечно удаленная всѣми своими точками и, слѣдовательно, геометрически вовсе не можетъ быть разсматриваема.

Въ самомъ дѣлѣ, поверхность (1), какъ извѣстно, не будетъ центральною, когда имѣетъ мѣсто равенство

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix}=0$$

или

$$ABC+2DEF-AF^2-BE^2-CD^2=0 ,$$

т. е. когда уравненіе (8), опредѣляющее S, не имѣетъ постояннаго члена. Въ этомъ случаѣ одно изъ значеній S должно равняться нулю и потому, какъ видно изъ уравненія (6), соотвѣтствующая этому значенію главная діаметральная плоскость будетъ безконечно удаленною (см. стр. 328).

Не принимая во вниманіе безконечно удаленной плоскости, можно, слѣдовательно, сказать, что *поверхность, не имѣющая центра, имѣетъ только двѣ главныя діаметральныя плоскости.*

525. Посмотримъ теперь, какъ можетъ быть найдено уравненіе поверхности по отношенію къ системѣ координатъ, плоскости которой совпадаютъ съ ея главными плоскостями.

Положимъ сперва, что разсматриваемая поверхность есть центральная, и пусть ея уравненіе относительно какой-нибудь прямоугольной системы координатъ, начало которой находится въ центрѣ, будетъ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+Fyz+K=0.$$

Обозначимъ черезъ α_1, β_1, γ_1 углы, составляемые съ осями координатъ одною изъ осей поверхности, чрезъ α_2, β_2, γ_2 другою и чрезъ α_3, β_3, γ_3 третьею. Въ такомъ случаѣ формулы преобразованія координатъ будутъ

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3\,,$$
$$y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3\,,$$
$$z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3\,,$$

и уравненіе поверхности преобразуется въ

$$A'x'^2+B'y'^2+C'z'^2+2D'x'y'+2E'x'z'+2F'y'z'+K=0.$$

Такъ какъ новыя оси координатъ суть сопряженные діаметры, то коэффиціенты D', E', F' должны равняться нулю (см. стр. 403). Что же касается остальныхъ коэффиціентовъ, то изъ нихъ первый выражается слѣдующимъ образомъ:

$$A'=A\cos^2\alpha_1+B\cos^2\beta_1+C\cos^2\gamma_1+$$
$$+2D\cos\alpha_1\cos\beta_1+2E\cos\alpha_1\cos\gamma_1+2F\cos\beta_1\cos\gamma_1\,.$$

Но изъ равенствъ (5) имѣемъ

$$Am_1+Dn_1+Ep_1=S_1m_1\,,$$
$$Dm_1+Bn_1+Fp_1=S_1n_1\,,$$
$$Em_1+Fn_1+Cp_1=S_1p_1\,.$$

Раздѣливъ каждое изъ этихъ равенствъ на $\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}$, получимъ

$$A\cos\alpha_1+D\cos\beta_1+E\cos\gamma_1=S_1\cos\alpha_1\,,$$
$$D\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+F\cos\gamma_1=S_1\cos\beta_1\,,$$
$$E\cos\alpha_1+F\cos\beta_1+C\cos\gamma_1=S_1\cos\gamma_1\,.$$

Отсюда же, по умноженіи послѣдовательно на $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ и сложеніи результатовъ, найдемъ

$$A\cos^2\alpha_1+B\cos^2\beta_1+C\cos^2\gamma_1+$$
$$+2D\cos\alpha_1\cos\beta_1+2E\cos\alpha_1\cos\gamma_1+2F\cos\beta_1\cos\gamma_1=S_1\,.$$

Слѣдовательно,

$$A' = S_1 .$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$B' = S_2 \qquad \text{и} \qquad C' = S_3 .$$

Итакъ, уравненіе поверхности, отнесенной къ ея осямъ, будетъ

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 + K = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

526. Положимъ теперь, что разсматриваемая поверхность имѣетъ безконечно удаленный центръ и выражается относительно прямоугольной системы координатъ уравненіемъ вида (1). Въ этомъ случаѣ одинъ изъ корней уравненія (8), напр. S_3, равняется нулю.

Измѣнимъ направленіе осей координатъ такъ, чтобы двѣ изъ нихъ были перпендикулярны къ двумъ главнымъ плоскостямъ, соотвѣтствующимъ корнямъ S_1 и S_2, а третья параллельна ихъ линіи пересѣченія, т. е. діаметрамъ. Формулы для такого преобразованія будутъ тѣ же, какъ и въ предыдущемъ, и потому изъ такихъ же соображеній убѣждаемся, что преобразованное уравненіе поверхности будетъ

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + f(x, y, z) = 0 ,$$

гдѣ $f(x, y, z)$ означаетъ сумму всѣхъ членовъ уравненія, начиная съ третьяго.

Если послѣ этого перемѣстимъ систему координатъ, не измѣняя направленія осей, такъ чтобы двѣ плоскости координатъ совпадали съ названными главными плоскостями, а начало было бы точкою поверхности, то уравненіе поверхности, какъ мы видѣли (см. стр. 404), приметъ видъ

$$Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0 .$$

Но такъ какъ отъ такого преобразованія коэффиціенты членовъ второго измѣренія не измѣняются (см. стр. 393), то будемъ имѣть

$$A = S_1 \qquad \text{и} \qquad B = S_2 .$$

Слѣдовательно, уравненіе поверхности будетъ

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + Jz = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Итакъ, относительно прямоугольной системы координатъ, плоскости которой совпадаютъ съ главными плоскостями поверхности второго порядка [1]), уравненіе этой поверхности приводится къ виду (14) или (15), гдѣ коэффиціенты членовъ второго измѣренія суть корни уравненія (8),

[1]) Всѣ три для центральной поверхности и двѣ для не имѣющей центра.

составленнаго по коэффиціентамъ первоначальнаго уравненія той же поверхности относительно какой-нибудь прямоугольной системы.

527. Если два корня уравненія (8) равны между собою, напр. $S_1 = S_2$, то уравненіе поверхности (14) принимаетъ видъ

$$S_1(x^2 + y^2) + S_3 z^2 + K = 0.$$

Легко видѣть, что эта поверхность всякою плоскостью, перпендикулярною къ оси OZ, пересѣкается по кругу, имѣющему центръ на этой оси. Дѣйствительно, уравненіе такой плоскости есть

$$z = c,$$

и потому находимъ, что уравненіе проекціи линіи пересѣченія на плоскость XOY, будетъ

$$S_1(x^2 + y^2) + S_3 c_2 + K = 0,$$

а это есть уравненіе круга, центръ котораго въ началѣ координатъ.

Поверхность, обладающая такимъ свойствомъ, можетъ, очевидно, быть разсматриваема, какъ описываемая кривою линіей, вращающеюся около оси OZ.

Это относится и къ поверхности, выражаемой уравненіемъ (15) при $S_1 = S_2$.

Всякую поверхность, которая можетъ быть описана какою-нибудь линіей, вращающеюся около неподвижной прямой, называютъ *поверхностью вращенія*, причемъ эта неподвижная прямая носитъ названіе *оси вращенія*.

Изъ сказаннаго видимъ, что въ случаѣ существованія равныхъ корней уравненія (8), опредѣляющаго S, поверхность второго порядка, выражаемая уравненіемъ (1), есть поверхность вращенія.

528. Мы видѣли, что три корня уравненія (11) заключаются въ трехъ послѣдовательныхъ промежуткахъ между величинами

$$-\infty, \quad L, \quad M, \quad N, \quad +\infty.$$

Это показываетъ, что два послѣдовательные корня раздѣлены одною изъ величинъ L, M, N и потому могутъ быть равны между собою, не иначе какъ равняясь этой величинѣ. Слѣдовательно, въ случаѣ существованія равныхъ корней уравненія (11) эти корни равняются одной изъ величинъ L, M, N.

Но если въ уравненіи (11) положимъ $S = L$, то будемъ имѣть

$$(L - M)(L - N) = 0$$

и, слѣдовательно, должно быть $L = M$ или $L = N$.

При $L=M$ первая часть уравненія (11) разлагается на два множителя $(S-L)$ и

$$P(S-L)(S-N)-\frac{1}{D^2}(S-L)-\left(\frac{1}{E^2}+\frac{1}{F^2}\right)(S-N).$$

Для того чтобы и второй множитель обращался въ нуль при $S=L$, необходимо имѣть $L=N$, и потому уравненіе (11) обращается въ

$$(S-L)^2\left[P(S-L)-\frac{1}{D^2}-\frac{1}{E^2}-\frac{1}{F^2}\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Итакъ, если два корня уравненія, опредѣляющаго S, равны между собою, то должно быть

$$L=M=N.$$

т. е.

$$A-\frac{DE}{F}=B-\frac{DF}{E}=C-\frac{EF}{D}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Это есть, такимъ образомъ, условіе, что поверхность (1) есть поверхность вращенія.

Если всѣ три значенія S равны между собою, то, какъ видно изъ (16), должно быть

$$D=0, \quad E=0, \quad F=0$$

и, слѣдовательно,

$$A=B=C.$$

При этихъ условіяхъ, какъ увидимъ ниже, уравненіе (1) выражаетъ сферу.

529. Можно считать геометрически очевиднымъ, что для поверхности вращенія всякая плоскость, проходящая черезъ ось вращенія, имѣетъ свойство главной діаметральной плоскости, а для сферы этимъ свойствомъ обладаютъ всѣ діаметральныя плоскости. Аналитически же это обнаруживается изъ того, что въ случаѣ, когда S есть одинъ изъ равныхъ корней уравненія (11) и когда, слѣдовательно, въ силу условій (17), должно быть

$$A-S=\frac{DE}{F}, \quad B-S=\frac{DF}{E}, \quad C-S=\frac{EF}{D},$$

каждое изъ трехъ равенствъ (5) представляетъ одно и то же условіе, именно

$$DEm+DFn+EFp=0.$$

Это условіе, очевидно, недостаточное для полнаго опредѣлен.я н правленія главной плоскости, показываетъ только, что она должна перпендикулярна къ плоскости, выражаемой уравненіемъ

$$DEx + DFy + EFz = 0.$$

Въ случаѣ равенства всѣхъ трехъ корней уравненія (11) и эта слѣдняя плоскость будетъ неопредѣленною.

§ 4. Касательныя и полярныя плоскости.

530. Мы видѣли выше (см. стр. 389), что касательная плоскость къ какой-нибудь точкѣ поверхности второго порядка есть геометрическ мѣсто всѣхъ касательныхъ прямыхъ въ этой точкѣ. Основываясь н этомъ, не трудно найти уравненіе касательной плоскости къ повер ности, выражаемой общимъ уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots$$

въ какой угодно ея точкѣ.

Положимъ, что (x_1, y_1, z_1) есть данная на поверхности точка, и пусть уравненія какой-нибудь прямой, проходящей черезъ эту точку будутъ

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Обозначая черезъ ρ величину каждаго изъ трехъ отношеній, соста ляющихъ эти уравненія, будемъ имѣть

$$x = m\rho + x_1, \quad y = n\rho + y_1, \quad z = p\rho + z_1 \quad \ldots \ldots (3)$$

причемъ каждому положенію точки (x, y, z) на прямой (2) будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе ρ, и въ частности, при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, будемъ имѣть $\rho = 0$, и обратно.

Величины ρ, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія прямой (2) съ поверхностью, опредѣлимъ, исключая x, y, z изъ уравненій (1) и (3). Въ результатѣ исключенія, какъ показано выше (см. стр. 396 и 397), будемъ имѣть

$$P\rho^2 + 2Q\rho + R = 0,$$

гдѣ P, Q и R имѣютъ слѣдующія значенія:

$$P = Am^2 + Bn^2 + Cp^2 + 2Dmn + 2Emp + 2Fnp\,,$$

$$Q = (Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G)m + (Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H)n + \\ + (Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J)p\,,$$

$$R = Ax_1{}^2 + By_1{}^2 + Cz_1{}^2 + 2Dx_1y_1 + 2Ex_1z_1 + 2Fy_1z_1 + \\ + 2Gx_1 + 2Hy_1 + 2Jz_1 + K\,.$$

Такъ какъ по предположенію точка (x_1, y_1, z_1) принадлежитъ поверхности (1), то должно быть $R = 0$, и для другой точки пересѣченія прямой (2) съ поверхностью будемъ имѣть

$$\varrho = -\frac{2Q}{P}\,.$$

Если прямая (2) есть касательная, то и это значеніе ϱ будетъ равняться нулю и, слѣдовательно, должно быть $Q = 0$.

Такимъ образомъ получаемъ условіе

$$\left.\begin{array}{r} (Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G)m + (Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H)n + \\ + (Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J)p = 0 \end{array}\right\} \ldots (4)$$

при которомъ прямая (2) касается поверхности въ точкѣ (x_1, y_1, z_1).

Исключая m, n, p изъ этого условія и уравненій (2), получимъ, очевидно, уравненіе геометрическаго мѣста всѣхъ касательныхъ въ этой точкѣ, т. е. уравненіе касательной плоскости

$$(Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G)(x - x_1) + (Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H)(y - y_1) + \\ + (Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J)(z - z_1) = 0.$$

Легко видѣть, раскрывъ скобки, что въ этомъ уравненіи сумма членовъ, не зависящихъ отъ перемѣнныхъ x, y, z, будетъ равняться

$$Gx_1 + Hy_1 + Jz_1 + K - R,$$

и такъ какъ $R = 0$, то заключаемъ, что уравненіе касательной плоскости можетъ быть представлено въ видѣ

$$\left.\begin{array}{r} (Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G)x + (Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H)y + \\ + (Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J)z + (Gx_1 + Hy_1 + Jz_1 + K) = 0 \end{array}\right\} \ldots (5)$$

531. Послѣднее уравненіе, при всякихъ значеніяхъ координатъ x_1, y_1, z_1, представляетъ вполнѣ опредѣленную плоскость, исключая того случая, когда эти координаты удовлетворяютъ одновременно уравненіямъ

$$Ax + Dy + Ez + G = 0,$$
$$Dx + By + Fz + H = 0,$$
$$Ex + Fy + Cz + J = 0,$$
$$Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

т. е. когда

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K \end{vmatrix} = 0.$$

Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли выше (см. стр. 396), разсматриваемая поверхность есть коническая или цилиндрическая.

Итакъ, *за исключеніемъ конусовъ и цилиндровъ, всякая поверхность второго порядка имѣетъ въ каждой своей точкѣ вполнѣ опредѣленную и единственную касательную плоскость* [1]).

532. Условіе (4) можетъ быть представлено въ видѣ

$$(Am + Dn + Ep)x_1 + (Dm + Bn + Fp)y_1 + (Em + Fn + Cp)z_1 +$$
$$+ (Gm + Hn + Jp) = 0.$$

Такъ какъ это есть результатъ подстановки координатъ x_1, y_1, z_1 въ уравненіе діаметральной плоскости, проходящей черезъ средины хордъ, параллельныхъ прямой (2) (см. стр. 397 и 398), то заключаемъ, что всякая діаметральная плоскость, соотвѣтствующая хордамъ, параллельнымъ касательной плоскости (5), проходитъ черезъ ея точку прикосновенія.

Это свойство можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ.

Двѣ діаметральныя плоскости, изъ которыхъ одна параллельна касательной плоскости, а другая проходитъ черезъ ея точку прикосновенія, суть сопряженныя.

533. Прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія касательной плоскости и перпендикулярная къ ней, называется *нормалью* къ поверхности.

Въ силу этого опредѣленія заключаемъ, что нормаль къ поверхности (1) въ какой-нибудь ея точкѣ (x_1, y_1, z_1), въ случаѣ прямоугольной системы координатъ, выражается слѣдующими уравненіями (см. стр. 361 и 362):

---

[1]) Вершина конуса есть точка, въ которой касательная плоскость неопредѣленная, ибо всякая плоскость, проходящая черезъ вершину, имѣетъ съ конусомъ двѣ общія дѣйствительныя или мнимыя прямыя, и потому должна быть разсматриваема, какъ касательная. Для цилиндра это свойство принадлежитъ безконечно удаленной точкѣ всѣхъ образующихъ.

$$\frac{x-x_1}{Ax_1+Dy_1+Ez_1+G}=\frac{y-y_1}{Dx_1+By_1+Fz_1+H}=\frac{z-z_1}{Ex_1+Fy_1+Cz_1+J}.$$

Подобнымъ же образомъ легко составить уравненія нормали и въ случаѣ косоугольной системы координатъ.

534 Уравненіе (5) представляетъ опредѣленную плоскость также и тогда, когда x_1, y_1, z_1 означаютъ координаты точки, данной какъ-нибудь въ пространствѣ. Плоскость эта называется въ такомъ случаѣ *полярною плоскостью* данной точки, а данная точка называется ея *полюсомъ*.

Всякая точка имѣетъ, слѣдовательно, по отношенію къ поверхности второго порядка опредѣленную полярную плоскость, и всякая плоскость опредѣленный полюсъ. Для точки, лежащей на поверхности, полярная плоскость есть касательная и, обратно, полюсъ касательной плоскости есть ея точка прикосновенія.

Если плоскость дана уравненіемъ

$$Lx+My+Nz+P=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

и требуется найти ея полюсъ, то обозначая координаты его чрезъ x_1, y_1, z_1, будемъ имѣть, что коэффиціенты L, M, N, P должны быть пропорціональны коэффиціентамъ уравненія (5). Это даетъ условія

$$\left.\begin{aligned}Ax_1+Dy_1+Ez_1+G&=kL\\Dx_1+By_1+Fz_1+H&=kM\\Ex_1+Fy_1+Cz_1+J&=kN\\Gx_1+Hy_1+Jz_1+K&=kP\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ k величина неопредѣленная.

Изъ нихъ для каждой изъ координатъ x_1, y_1, z_1 получается единственное и опредѣленное значеніе, если только поверхность (1) не есть коническая или цилиндрическая.

Если данная плоскость есть касательная, то координаты искомаго полюса должны удовлетворять ея уравненію. Слѣдовательно, должно быть

$$Lx_1+My_1+Nz_1+P=0.$$

Исключая изъ этого равенства и условій (7) величины x_1, y_1, z_1, k получимъ условіе соприкосновенія плоскости (6) съ поверхностью (1) въ видѣ

*

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G, & L \\ D, & B, & F, & H, & M \\ E, & F, & C, & J, & N \\ G, & H, & J, & K, & P \\ L, & M, & N, & P, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

535. Обозначая черезъ x_2, y_2, z_2 координаты какой-нибудь точки, лежащей на полярной плоскости точки (x_1, y_1, z_1), и подставляя эти координаты въ уравненіе (5), получимъ тождество

$$(Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G)x_2 + (Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H)y_2 +$$
$$+ (Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J)z_2 + (Gx_1 + Hy_1 + Jz_1 + K) = 0.$$

Такъ какъ оно симметрично относительно координатъ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, то заключаемъ, что точка (x_1, y_1, z_1) лежитъ также на полярной плоскости точки (x_2, y_2, z_2).

Двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярной плоскости другой, называются *сопряженными*. Точно также и двѣ плоскости, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ полюсъ другой, называются *сопряженными*.

Понятно, что полюсы всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ какую-нибудь данную точку, будучи точками сопряженными съ данной, должны лежать на ея полярной плоскости, и точно также полярныя плоскости всѣхъ точекъ, лежащихъ на какой-нибудь данной плоскости, будучи сопряженными съ нею, проходятъ черезъ ея полюсъ.

536. Если какая-нибудь прямая L проходитъ черезъ двѣ данныя точки, то всякая ея точка будетъ сопряженною со всѣми точками прямой L', по которой пересѣкаются полярныя плоскости данныхъ точекъ. Полярныя плоскости всѣхъ точекъ одной изъ этихъ прямыхъ проходятъ черезъ другую, и полюсы всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ одну изъ этихъ прямыхъ, лежатъ на другой. Такія двѣ прямыя, что всѣ точки одной суть сопряженныя со всѣми точками другой, называются *взаимно-полярными*.

Если двѣ взаимно-полярныя прямыя пересѣкаются, то точка ихъ пересѣченія есть полюсъ плоскости, черезъ нихъ проходящей. Эта плоскость есть, слѣдовательно, касательная.

Понятно также, что прямая, соединяющая двѣ какія-нибудь точки поверхности, и прямая, по которой пересѣкаются касательныя плоскости въ этихъ точкахъ, суть взаимно-полярныя.

537. Всякая точка касательной плоскости есть сопряженная съ ея точкою прикосновенія. Отсюда заключаемъ, что точки прикосновенія всѣхъ касательныхъ плоскостей, а слѣдовательно и касательныхъ пря-

мыхъ, проходящихъ черезъ данную точку, лежатъ на полярной плоскости этой точки.

Касательныя прямыя, проходящія черезъ данную точку, образуютъ, какъ мы видѣли (см. стр. 388), конусъ, описанный около поверхности. Линія, по которой этотъ конусъ соприкасается съ поверхностью, есть, слѣдовательно, линія пересѣченія поверхности съ полярною плоскостью его вершины.

538. Четыре плоскости, изъ которыхъ каждая есть сопряженная съ тремя остальными, составляютъ такъ называемый *полярный тетраэдръ*. Каждая вершина такого тетраэдра есть полюсъ противоположной грани. Каждые два противоположные ребра суть взаимно-полярныя прямыя.

Для всякой поверхности второго порядка полярныхъ тетраэдровъ существуетъ безчисленное множество. Одна вершина такого тетраэдра можетъ быть взята совершенно произвольно. Другая можетъ быть взята произвольно на полярной плоскости первой. Третья и четвертая суть двѣ какія-нибудь сопряженныя точки на прямой взаимно-полярной съ прямою, проходящею черезъ двѣ первыя.

539. Если положимъ, что въ уравненіи (5) x_1, y_1, z_1, означаютъ координаты центра поверхности, то, какъ извѣстно (см. стр. 394), должно быть

$$Ax_1 + Dy_1 + Ez_1 + G = 0\,,$$

$$Dx_1 + By_1 + Fz_1 + H = 0\,,$$

$$Ex_1 + Fy_1 + Cz_1 + J = 0.$$

Въ такомъ случаѣ плоскость, выражаемая этимъ уравненіемъ, будетъ безконечно удаленною. Слѣдовательно, *центръ есть полюсъ безконечно удаленной плоскости.*

Если положимъ, что точка x_1, y_1, z_1 лежитъ на прямой, выражаемой уравненіемъ

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

то уравненію полярной плоскости (5) можно дать видъ

$$(Am + Dn + Ep)x + (Dm + Bn + Fp)y + (Em + Fn + Cp)z +$$

$$+ (Gm + Hn + Jp) + \frac{1}{x_1}(Gx + Hy + Jz + K) = 0.$$

При $x_1 = \infty$, это уравненіе обращается въ уравненіе діаметральной плоскости, проходящей черезъ средины хордъ, параллельныхъ прямой (8). Отсюда заключаемъ, что *діаметральная плоскость есть полярная плоскость безконечно удаленной точки, принадлежащей соотвѣтствующимъ ей хордамъ.*

Изъ сказаннаго видимъ также, что система трехъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей вмѣстѣ съ безконечно удаленною плоскостью представляетъ полярный тетраэдръ.

540. Если точка (x_1, y_1, z_1) находится въ началѣ координатъ, то уравненіе полярной плоскости (5) принимаетъ видъ

$$Gx + Hy + Jz + K = 0.$$

Полагая здѣсь $z = 0$, получимъ уравненіе линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостью координатъ XOY

$$Gx + Hy + K = 0.$$

Въ то же время уравненіе линіи пересѣченія самой поверхности съ тою же плоскостью координатъ будетъ

$$Ax^2 + 2Dxy + By^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0.$$

Первое изъ этихъ двухъ уравненій представляетъ поляру начала координатъ относительно кривой, выражаемой вторымъ (см. стр. 126).

Отсюда убѣждаемся, что прямая, по которой произвольная сѣкущая плоскость, проходящая черезъ данную точку, пересѣкаетъ полярную плоскость этой точки, есть поляра той же точки относительно линіи пересѣченія сѣкущей плоскости съ самою поверхностью.

Это позволяетъ заключить, что полярную плоскость можно опредѣлить, какъ геометрическое мѣсто точекъ, которыя вмѣстѣ съ данною точкою дѣлятъ гармонически хорды, образуемыя прямыми, проходящими черезъ эту точку (см. стр. 129).

ГЛАВА ПЯТАЯ.

СФЕРА.

§ 1. Уравненіе сферы. Касательная плоскость.

541. Сфера или шаръ опредѣляется геометрически, какъ поверхность, всѣ точки которой находятся на одномъ и томъ же разстояніи отъ одной данной точки, именуемой ея центромъ.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что по отношенію къ прямоугольной системѣ координатъ всякая сфера выражается уравненіемъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0\,, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ a, b, c суть координаты ея центра, а r радіусъ. По отношенію же къ косоугольной системѣ уравненіе сферы будетъ (см. стр. 299)

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-a)(z-c)\cos\lambda+\\+2(x-a)(z-c)\cos\mu+2(x-a)(y-b)\cos\nu-r^2=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

гдѣ λ, μ, ν суть углы между осями координатъ, а прочія постоянныя имѣютъ то же значеніе, какъ и при прямоугольной системѣ координатъ.

Сфера есть, слѣдовательно, поверхность второго порядка.

Хотя въ аналитическомъ изученіи сферы отдѣльно отъ тѣхъ поверхностей второго порядка, къ которымъ она относится, какъ частный видъ, и не представляется необходимости, но, вслѣдствіе простоты уравненія (1), въ особенности же простоты и наглядности геометрическаго значенія его постоянныхъ, является возможность простого аналитическаго рѣшенія многихъ вопросовъ, относящихся къ сферѣ и системамъ сферъ. Краткому обзору нѣкоторыхъ изъ такихъ вопросовъ посвящается настоящая глава.

542. Если общее уравненіе второй степени

$$\left.\begin{aligned}Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+\\+2Gx+2Hy+2Jz+K=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

выражаетъ относительно прямоугольной системы координатъ сферу, то коэффиціенты его должны быть пропорціональны коэффиціентамъ уравненія (1), т. е. должно быть

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{1}=\frac{C}{1}=\frac{D}{0}=\frac{E}{0}=\frac{F}{0}=\frac{G}{-a}=\frac{H}{-b}=\frac{J}{-c}=$$

$$=\frac{K}{a^2+b^2+c^2-r^2}.$$

Отсюда видимъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ, чтобы общее уравненіе (3) представляло сферу, служатъ равенства

$$A=B=C,$$

$$D=0,\quad E=0,\quad F=0.$$

Слѣдовательно, уравненіе всякой сферы можетъ быть разсматриваемо въ видѣ

$$A(x^2+y^2+z^2)+2Gx+2Hy+2Jz+K=0\,,\quad .\ .\ .\quad (4)$$

причемъ координаты центра и радіусъ опредѣлятся по его коэффиціентамъ слѣдующимъ образомъ:

$$a=-\frac{G}{A},\quad b=-\frac{H}{A},\quad c=-\frac{J}{A},$$

$$r=\frac{\sqrt{G^2+H^2+J^2-AK}}{A}.$$

Подобнымъ же образомъ легко получить условія, при которыхъ уравненіе (3) выражаетъ сферу относительно косоугольной системы координатъ.

Такъ какъ уравненіе (4) содержитъ только пять коэффиціентовъ, то сфера вполнѣ опредѣляется четырьмя принадлежащими ей точками или какими-нибудь четырьмя равнозначущими имъ геометрическими данными.

Уравненіе сферы, проходящей черезъ четыре данныя точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), получимъ, очевидно, исключая коэффиціенты A, G, H, J, K изъ уравненія (4) и изъ четырехъ тождествъ, получаемыхъ при подстановкѣ въ это уравненіе координатъ данныхъ точекъ.

Результатъ исключенія будетъ имѣть видъ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

543. Полагая въ уравненіи (1) $z=0$, получимъ уравненіе линіи пересѣченія сферы съ плоскостью XOY въ видѣ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2.$$

Оно выражаетъ кругъ, дѣйствительный только тогда, когда $c<r$. Если же $c=r$, то плоскость XOY имѣетъ со сферой только одну общую точку и есть, слѣдовательно, касательная.

Отсюда заключаемъ, что сѣченія сферы всѣми возможными плоскостями суть круги (дѣйствительные или мнимые) и что разстояніе всякой касательной плоскости отъ центра сферы равняется ея радіусу. Очевидно также, что радіусъ сферы, проходящій черезъ точку прикосновенія, какъ кратчайшее разстояніе отъ центра до касательной плоскости, перпендикуляренъ къ ней.

Плоскости, проходящія черезъ центръ сферы, суть ея діаметральныя плоскости. Круги, по которымъ онѣ пересѣкаютъ сферу, называются обыкновенно ея *большими кругами*.

544. Если положимъ, что x_1, y_1, z_1 суть координаты какой-нибудь точки, лежащей на сферѣ (1), то уравненія проходящаго черезъ эту точку радіуса будутъ

$$\frac{x-x_1}{x_1-a}=\frac{y-y_1}{y_1-b}=\frac{z-z_1}{z_1-c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (x_1, y_1, z_1), какъ перпендикулярной къ этой прямой (см. стр. 362), будетъ

$$(x-x_1)(x_1-a)+(y-y_1)(y_1-b)+(z-z_1)(z_1-c)=0.$$

При этомъ, такъ какъ точка (x_1, y_1, z_1) принадлежитъ сферѣ, то должно быть

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2=r^2, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

вслѣдствіе чего послѣднему уравненію можно дать видъ

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)+(z-c)(z_1-c)-r^2=0. \quad (7)$$

Это уравненіе могло бы быть получено, какъ частный видъ общаго уравненія касательной плоскости къ поверхности второго порядка (см. стр. 417).

Принимая во вниманіе равенство (6), а также очевидныя тождества

$$(x-a)^2+(x_1-a)^2-2(x-a)(x_1-a)=(x-x_1)^2,$$

$$(y-b)^2+(y_1-b)^2-2(y-b)(y_1-b)=(y-y_1)^2,$$

$$(z-c)^2+(z_1-c)^2-2(z-c)(z_1-c)=(z-z_1)^2,$$

можно уравненію (7) дать еще слѣдующій видъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

Здѣсь первая часть тождественна съ первою частью уравненія самой сферы, вторая же часть выражаетъ квадратъ разстоянія какой-нибудь точки (x, y, z) касательной плоскости отъ точки прикосновенія, иначе говоря, квадратъ длины касательной изъ точки (x, y, z).

Это показываетъ, что всѣ касательныя къ сферѣ изъ какой-нибудь данной точки имѣютъ одну и ту же длину и что эта длина опредѣляется аналитически, какъ корень квадратный изъ результата подстановки въ первую часть уравненія сферы координатъ данной точки.

545. Если въ уравненіи (7) величины x_1, y_1, z_1 означаютъ координаты какой-нибудь точки въ пространствѣ, то выражаемая имъ плоскость есть *полярная плоскость* этой точки, а сама точка есть ея полюсъ (см. стр. 41?). Такъ какъ при всякихъ значеніяхъ координатъ x_1, y_1, z_1 плоскость (7) перпендикулярна къ прямой (5), то заключаемъ, что для сферы полярная плоскость всякой точки перпендикулярна къ діаметру, проходящему черезъ эту точку. Далѣе, обозначивъ черезъ l разстояніе полярной плоскости (7) отъ центра (a, b, c), будемъ, очевидно, имѣть

$$l=\frac{r^2}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}}=\frac{r^2}{l'},$$

гдѣ l' означаетъ разстояніе точки (x_1, y_1, z_1) отъ центра. Отсюда видимъ, что для сферы радіусъ есть средняя геометрическая между разстояніями отъ центра до какой-нибудь точки и ея полярной плоскости.

Если точка (x_1, y_1, z_1) дана внѣ сферы, такъ что разстояніе ея отъ центра болѣе радіуса, то ея полярная плоскость, очевидно, пересѣкаетъ сферу по дѣйствительному кругу. Точки этого круга, какъ видно изъ уравненія (7), суть точки прикосновенія касательныхъ плоскостей, а слѣдовательно и касательныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку (x_1, y_1, z_1). Всѣ такія касательныя прямыя образуютъ описанный конусъ, для котораго этотъ кругъ служитъ управляющей или основаніемъ. Всякій конусъ, описанный около сферы, есть, слѣдовательно, прямой круглый конусъ [1] (см. стр. 240).

[1]) Иначе говоря, конусъ вращенія.

§ 2. Системы сферъ.

546. Положимъ, что намъ даны двѣ сферы, выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{array}{l}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0 \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

и

Обозначивъ черезъ S_1 и S_2 первыя части этихъ уравненій, а черезъ k какую-нибудь постоянную величину, будемъ имѣть, что уравненіе

$$S_1-kS_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

выражаетъ также сферу и, притомъ, такую, которая проходитъ черезъ всѣ точки, общія двумъ даннымъ сферамъ, т. е. черезъ линію ихъ пересѣченія.

При неопредѣленномъ k уравненіе (2) представляетъ цѣлую систему сферъ, называемую *пучкомъ*. Это есть система одного измѣренія. Каждая принадлежащая ей сфера вполнѣ опредѣляется значеніемъ постояннаго k.

Координаты центра сферы (2) будутъ, очевидно, (см. стр. 424)

$$x=\frac{a_1-ka_2}{1-k}, \quad y=\frac{b_1-kb_2}{1-k}, \quad z=\frac{c_1-kc_2}{1-k}.$$

Такъ какъ они, при всякомъ значеніи k, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=\frac{z-c_1}{c_2-c_1} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

прямой, проходящей черезъ центры данныхъ сферъ, то заключаемъ, что центры всѣхъ сферъ пучка лежатъ на одной прямой.

547. При $k=1$ уравненіе (2) обращается въ

$$S_1=S_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или

$$(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+h=0,$$

гдѣ

$$h=\frac{(a_1^2+b_1^2+c_1^2-r_1^2)-(a_2^2+b_2^2+c_2^2-r_2^2)}{2}.$$

Это уравненіе выражаетъ плоскость, которая называется *радикальною плоскостью* данныхъ сферъ. Какъ видно изъ самаго уравненія, эта плоскость перпендикулярна къ прямой (3), соединяющей центры.

Равенство (4) показываетъ, что радикальная плоскость есть геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ обѣимъ даннымъ сферамъ равны между собою.

Если данныя сферы пересѣкаются между собою, то линія ихъ пересѣченія лежитъ въ радикальной плоскости. Слѣдовательно, двѣ сферы пересѣкаются между собою по кругу, по которому каждая изъ нихъ пересѣкается ихъ радикальною плоскостью.

Если данныя сферы соприкасаются, то радикальная плоскость есть ихъ общая касательная плоскость въ точкѣ соприкосновенія.

548. Если возьмемъ двѣ какія-нибудь сферы, принадлежащія пучку (2), напримѣръ

$$S_1 - k' S_2 = 0 \quad \text{и} \quad S_1 - k'' S_2 = 0,$$

то уравненіе ихъ радикальной плоскости будетъ

$$\frac{S_1 - k' S_2}{1 - k'} = \frac{S_1 - k'' S_2}{1 - k''}.$$

Очевидно, что оно выражаетъ ту же самую плоскость, какъ и уравненіе (4). Слѣдовательно, всѣ сферы пучка (2) имѣютъ одну и ту же радикальную плоскость.

Послѣднее равенство показываетъ, что касательныя изъ какой-нибудь точки радикальной плоскости ко всѣмъ сферамъ пучка равны между собою. Точки прикосновенія всѣхъ этихъ касательныхъ лежатъ, слѣдовательно, на одной и той же сферѣ, пересѣкающейся прямоугольно со всѣми сферами пучка.

549. Если система координатъ выбрана такъ, что ось OX совпадаетъ съ линіей центровъ пучка (2), а плоскость YOZ съ радикальною плоскостью, то уравненіе всякой сферы, принадлежащей пучку, можетъ быть представлено въ видѣ

$$(x-a)^2+y^2+z^2-r^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

или

$$x^2+y^2+z^2-2ax+n^2=0,$$

гдѣ $n^2 = a^2 - r^2$ есть, очевидно, величина постоянная, т. е. одна и та же для всѣхъ сферъ пучка, такъ какъ она означаетъ квадратъ длины каждой изъ касательныхъ къ этимъ сферамъ изъ начала координатъ. Величиною же a вполнѣ опредѣляется каждая сфера.

При $a = \pm n$ будемъ имѣть $r = 0$. Въ этомъ случаѣ сфера обращается въ точку. Такимъ образомъ видно, что на линіи центровъ, на разстояніи n отъ радикальной плоскости, находятся двѣ точки, которыя можно разсматривать, какъ безконечно малыя сферы, принадлежащія пучку. Эти точки называются *предѣльными* точками пучка. Онѣ суть дѣйствительныя только тогда, когда сферы не пересѣкаются, ибо въ противномъ случаѣ n есть величина мнимая.

550. Уравненіе полярной плоскости для какой-нибудь точки (x_1, y_1, z_1) относительно сферы (5) есть, какъ мы знаемъ,

$$(x-a)(x_1-a)+yy_1+zz_1-r^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

или

$$xx_1+yy_1+zz_1-a(x+x_1)+n^2=0.$$

При всякомъ a это уравненіе выражаетъ плоскость, проходящую черезъ линію пересѣченія двухъ плоскостей

$$xx_1+yy_1+zz_1+n^2=0 \quad \text{и} \quad x+x_1=0.$$

Слѣдовательно, полярныя плоскости точки относительно пучка сферъ составляютъ также пучекъ.

Если точка (x_1, y_1, z_1) лежитъ на радикальной плоскости, то линія пересѣченія ея полярныхъ плоскостей будетъ лежать на этой плоскости.

Если точка (x_1, y_1, z_1) совпадаетъ съ одной изъ предѣльныхъ точекъ, такъ что

$$x_1=\pm n, \quad y_1=0, \quad z_1=0,$$

то уравненіе (6) обращается въ

$$(a\mp n)(x\pm n)=0$$

и при всякомъ a представляетъ плоскость, проходящую черезъ другую предѣльную точку и параллельную радикальной плоскости.

Слѣдовательно, для каждой изъ предѣльныхъ точекъ полярная плоскость есть одна и та же по отношенію всѣхъ сферъ пучка.

Изъ всего сказаннаго видимъ, что свойства пучка сферъ представляютъ полную аналогію со свойствами пучка круговъ на плоскости (см. стр. 160—168).

551. Положимъ, что намъ даны три какія-нибудь сферы, не принадлежащія одному пучку и выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{array}{l}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0\\(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2-r_3^2=0\end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

Обозначая черезъ S_1, S_2, S_3 первыя части этихъ трехъ уравненій, а черезъ k и l двѣ постоянныя величины, будемъ имѣть, что уравненіе

$$S_1-kS_2-lS_3=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

выражаетъ также сферу и, притомъ, такую, которая проходитъ черезъ точки, общія тремъ даннымъ сферамъ.

При неопредѣленныхъ k и l уравненіе (8) выражаетъ цѣлую си... сферъ, называемую *сътью* или *связкою*. Это есть система двухъ ...ренiй, такъ какъ каждая сфера опредѣляется въ ней двумя ...метрами k и l.

Координаты центра сферы (8) будутъ, очевидно,

$$x=\frac{a_1-ka_2-la_3}{1-k-l},\quad y=\frac{b_1-kb_2-lb_3}{1-k-l},\quad z=\frac{c_1-kc_2-lc_3}{1-k-l}$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ k и l, получимъ соотношение

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ a_1, & b_1, & c_1, & 1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 1 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 1 \end{vmatrix}=0,$$

показывающее, что этотъ центръ находится на плоскости, проходя... черезъ центры трехъ данныхъ сферъ (см. стр. 333).

Слѣдовательно, центры всѣхъ сферъ, составляющихъ связку, лежат... въ одной плоскости.

552. Радикальныя плоскости каждыхъ двухъ изъ данныхъ сферъ ... выражаются уравненiями

$$S_1=S_2,\quad S_2=S_3,\quad S_3=S_1\;\ldots\ldots\ldots\;(9)$$

изъ которыхъ видно, что эти плоскости проходятъ черезъ одну прям...

Эта прямая называется *радикальною осью* данныхъ сферъ.

Изъ равенствъ (9) слѣдуетъ, что касательныя изъ всякой точки радикальной оси ко всѣмъ тремъ даннымъ сферамъ равны между собо...

553. Возьмемъ двѣ какiя-нибудь сферы, принадлежащiя системѣ (...

$$S_1-k'S_2-l'S_3=0 \quad \text{и} \quad S_1-k''S_2-l''S_3=0.$$

Ихъ радикальная плоскость будетъ выражаться уравненiемъ

$$\frac{S_1-k'S_2-l'S_3}{1-k'-l'}=\frac{S_1-k''S_2-l''S_3}{1-k''-l''},$$

которое, по уничтоженiи знаменателей, можетъ быть представлено въ видѣ

$$(S_1-S_2)(k'-k'')+(S_1-S_3)(l'-l'')+(S_2-S_3)(k'l''-l'k'')=0.$$

Такъ какъ это уравненie, при всякихъ значенiяхъ k', k'', l', l'', удовлетворяется значенiями неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ уравненiямъ (9), то заключаемъ, что оно выражаетъ плоскость, проходящую черезъ радикальную ось данныхъ сферъ.

Это показываетъ, что радикальныя плоскости всѣхъ сферъ, принадлежащихъ системѣ (8), проходятъ черезъ одну прямую, общую радикальную ось этихъ сферъ.

Послѣдняя есть, слѣдовательно, геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ ко всѣмъ сферамъ системы (8) равны между собою.

Такъ какъ каждая радикальная плоскость двухъ сферъ перпендикулярна къ линіи ихъ центровъ, то очевидно, что линія пересѣченія такихъ плоскостей, т. е. радикальная ось, перпендикулярна къ плоскости, въ которой лежатъ центры всѣхъ сферъ системы.

554. Если радикальную ось сферъ, составляющихъ связку, примемъ за одну изъ осей координатъ, напр. OZ, а плоскость, въ которой лежатъ центры этихъ сферъ, за плоскость XOY, то уравненіе системы этихъ сферъ можетъ быть представлено въ видѣ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-r^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

или

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by+n^2=0.$$

Здѣсь a и b суть параметры, опредѣляющіе каждую сферу системы, а n величина постоянная для всѣхъ сферъ, такъ какъ она представляетъ длину касательныхъ къ сферамъ изъ начала координатъ, ибо

$$n^2=a^2+b^2-r^2.$$

Если параметры a и b удовлетворяютъ уравненію

$$x^2+y^2=n^2,$$

то $r=0$. Слѣдовательно, каждая точка круга, выражаемаго послѣднимъ уравненіемъ на плоскости XOY, можетъ быть разсматриваема, какъ безконечно малая сфера, принадлежащая системѣ (10). Этотъ кругъ называется *предѣльнымъ*. Очевидно, что онъ только тогда дѣйствительный, когда сферы не пересѣкаются радикальною осью и между собою.

Такъ какъ касательныя изъ какой-нибудь точки радикальной оси къ сферамъ системы (10) равны между собою, то точки ихъ прикосновенія лежатъ на сферѣ, которая пересѣкаетъ всѣ сферы системы прямоугольно и проходитъ черезъ предѣльный кругъ этой системы. Всѣ точки радикальной оси служатъ центрами безчисленнаго множества такихъ сферъ, которыя, очевидно, составляютъ пучекъ, находящійся съ системою (10) въ такой зависимости, что предѣльныя точки одной изъ этихъ двухъ системъ суть точки общія сферамъ другой, и обратно.

555. Полярная плоскость точки (x_1, y_1, z_1) относительно какой-либо сферы системы (10) выражается, какъ мы знаемъ, уравненіемъ

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)+zz_1-r^2=0$$

или

$$(xx_1+yy_1+zz_1-a(x+x_1)-b(y+y_1)+n^2=0$$

или

$$(x_1-a)(x+x_1)+(y_1-b)(y+y_1)+zz_1=x_1^2+y_1^2-n^2.$$

Отсюда видимъ, что полярныя плоскости всякой точки относительно связки сферъ составляютъ связку плоскостей. При этомъ легко видѣть также, что полярныя плоскости всякой точки, лежащей на радикальной оси, пересѣкаются между собою на этой оси, и что для всякой точки предѣльнаго круга полярныя плоскости проходятъ черезъ одну и ту же прямую, пересѣкающую этотъ кругъ и параллельную радикальной оси.

556. Положимъ теперь, что даны четыре сферы, не принадлежащія одной связкѣ, и пусть уравненія ихъ будутъ

$$S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=0,\quad S_4=0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія радикальныхъ плоскостей этихъ сферъ будутъ

$$\left.\begin{array}{lll} S_1=S_2, & S_1=S_3, & S_1=S_4 \\ S_2=S_3, & S_2=S_4, & S_3=S_4 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Такъ какъ координаты, удовлетворяющія тремъ первымъ изъ этихъ уравненій, удовлетворяютъ и остальнымъ, то заключаемъ, что радикальныя плоскости каждыхъ двухъ данныхъ сферъ, а слѣдовательно и радикальныя оси каждыхъ трехъ изъ нихъ, проходятъ черезъ одну точку.

Эта точка называется *радикальнымъ центромъ* данныхъ четырехъ сферъ.

557. Легко убѣдиться, что уравненіе

$$S_1-kS_2-lS_3-mS_4=0, \ldots\ldots\ldots (12)$$

гдѣ k, l, m суть неопредѣленныя постоянныя, выражаетъ систему сферъ, имѣющихъ общій радикальный центръ.

Въ самомъ дѣлѣ, радикальная плоскость двухъ какихъ-нибудь сферъ этой системы будетъ выражаться уравненіемъ

$$\frac{S_1-k'S_2-l'S_3-m'S_4}{1-k'-l'-m'}=\frac{S_1-k''S_2-l''S_3-m''S_4}{1-k''-l''-m''} \ldots\ldots (13)$$

которое, по уничтоженіи знаменателей, принимаетъ видъ

$$(S_1-S_2)(k'-k'')+(S_1-S_3)(l'-l'')+(S_1-S_4)(m'-m'')+$$
$$+(S_2-S_3)(k'l''-l'k'')+(S_2-S_4)(k'm''-m'k'')+(S_3-S_4)(l'm''-m'l'')=0.$$

а это есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку пересѣченія плоскостей (11).

Такъ какъ каждая сфера системы (12) опредѣляется значеніями трехъ параметровъ k, l, m, то это есть система трехъ измѣреній.

Изъ того, что уравненіе (13) удовлетворяется координатами радикальнаго центра при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ k', l', m' и k'', l'', m'', заключаемъ, что касательныя изъ радикальнаго центра ко всѣмъ сферамъ системы (12) равны между собою. Точки прикосновенія этихъ касательныхъ находятся, слѣдовательно, на сферѣ, имѣющей центръ въ радикальномъ центрѣ системы и пересѣкающей всѣ сферы системы прямоугольно.

558. **Положимъ, что уравненіе**

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

выражаетъ сферу, принадлежащую системѣ (12) и пусть x_0, y_0, z_0 будуть координаты радикальнаго центра, а n длина касательной изъ него къ сферамъ системы. Въ такомъ случаѣ должно быть

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2-r^2=n^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Это есть соотношеніе между координатами центра и радіусомъ для каждой сферы, принадлежащей системѣ. Изъ него видимъ, что если a, b, c удовлетворяютъ уравненію

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-n^2=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

выражающему сферу, на которой лежатъ точки прикосновенія касательныхъ изъ радикальнаго центра, то $r=0$. Слѣдовательно, всѣ точки этой сферы могутъ быть разсматриваемы, какъ безконечно малыя сферы, принадлежащія системѣ.

Изъ соотношенія (14) видно, что величина n, а слѣдовательно и сфера (15), можетъ быть дѣйствительною только тогда, когда радикальный центръ находится внѣ всѣхъ сферъ системы. Если $n=0$, то всѣ сферы системы имѣютъ общую точку, которая и есть ихъ радикальный центръ.

§ 3. Центры подобія сферъ.

559. Извѣстно изъ Геометріи на плоскости (см. стр. 164), что на прямой линіи, соединяющей центры двухъ круговъ, существуютъ двѣ опредѣленныя точки, называемыя центрами подобія, которыя дѣлятъ разстояніе между центрами круговъ въ отношеніи, равномъ отношенію ихъ радіусовъ, и суть не что иное, какъ точки пересѣченія общихъ къ нимъ касательныхъ.

Если двѣ какія-нибудь сферы пересѣчемъ плоскостью, проходящею черезъ центры обѣихъ, то центры подобія большихъ круговъ, получаемыхъ въ сѣченіи, будутъ имѣть опредѣленное положеніе, не зависящее отъ направленія сѣкущей плоскости, такъ что, при вращеніи сѣкущей плоскости около линіи центровъ сферъ, эти центры подобія не будутъ измѣняться и будутъ, очевидно, вершинами двухъ конусовъ описанныхъ одновременно около обѣихъ данныхъ сферъ. Ихъ называютъ *центрами подобія сферъ*.

Очевидно, что центры подобія двухъ данныхъ сферъ вполнѣ опредѣляются, какъ точки, лежащія на линіи ихъ центровъ и дѣлящія разстояніе между послѣдними въ отношеніи, равномъ отношенію радіусовъ. Поэтому, полагая, что сферы даны уравненіями

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1{}^2=0$$

и

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2{}^2=0\,,$$

будемъ имѣть, что координаты внѣшняго центра подобія суть

$$x=\frac{r_2a_1-r_1a_2}{r_2-r_1}\,,\quad y=\frac{r_2b_1-r_1b_2}{r_2-r_1}\,,\quad z=\frac{r_2c_1-r_1c_2}{r_2-r_1}\,,$$

а внутренняго

$$x=\frac{r_2a_1+r_1a_2}{r_2+r_1}\,,\quad y=\frac{r_2b_1+r_1b_2}{r_2+r_1}\,,\quad z=\frac{r_2c_1+r_1c_2}{r_2+r_1}\,.$$

Если сферы соприкасаются, то одинъ изъ центровъ подобія есть ихъ точка прикосновенія, а соотвѣтствующій ему описанный конусъ обращается въ общую касательную плоскость.

Если сферы пересѣкаются, то одинъ изъ центровъ подобія находится внутри обѣихъ сферъ и, слѣдовательно, соотвѣтствующій ему описанный конусъ есть мнимый.

Если одна изъ сферъ помѣщается внутри другой, то оба описанные конуса мнимые.

560. Когда даны три сферы, то существуетъ шесть центровъ подобія. Это суть, очевидно, центры подобія трехъ большихъ круговъ, по которымъ данныя сферы пересѣкаются плоскостью, проходящею черезъ ихъ центры. Извѣстно, что они расположены на четырехъ прямыхъ линіяхъ, по три на каждой (см. стр. 167). Эти прямыя называются *осями подобія* трехъ данныхъ сферъ.

Когда даны четыре сферы, то существуетъ двѣнадцать центровъ подобія: шесть внѣшнихъ и шесть внутреннихъ. Они расположены по два на каждомъ изъ шести реберъ тетраэдра, имѣющаго вершинами центры сферъ, и по шести на каждой его грани.

Кромѣ того эти центры будутъ лежать по три на шестнадцати осяхъ подобія, которыя сами расположены по четыре на каждой грани названнаго тетраэдра.

Если возьмемъ три центра подобія, не лежащіе на одной прямой и не находящиеся на одной плоскости съ центрами сферы, то каждая изъ прямыхъ, соединяющихъ эти центры подобія, будучи осью подобія, должна имѣть на себѣ еще одинъ центръ подобія. Отсюда видно, что кромѣ плоскостей, составляющихъ грани названнаго тетраэдра, существуютъ еще плоскости, на которыхъ центры подобія четырехъ сферъ расположены по шести и оси подобія по четыре.

Эти плоскости называются *плоскостями подобія*. Ихъ восемь, и онѣ различаются между собою слѣдующимъ образомъ.

Одна проходитъ черезъ шесть внѣшнихъ центровъ подобія и потому называется внѣшнею плоскостью подобія. Относительно нея центры всѣхъ четырехъ сферъ лежатъ по одну и ту же сторону.

Четыре плоскости подобія расположены такъ, что каждая отдѣляетъ одинъ изъ центровъ сферъ отъ трехъ остальныхъ и, слѣдовательно, проходитъ черезъ три внутренніе центра подобія и три внѣшніе.

Три послѣднія плоскости расположены такъ, что отдѣляютъ два изъ центровъ сферъ отъ двухъ другихъ и, слѣдовательно, проходятъ черезъ четыре внутренніе и два внѣшніе центра подобія.

Если одна изъ четырехъ сферъ соприкасается съ тремя остальными, то плоскость, проходящая черезъ три точки прикосновенія, будетъ плоскость подобія и потому должна проходить черезъ одну изъ осей подобія этихъ трехъ сферъ.

561. Положимъ, что требуется найти сферу, соприкасающуюся съ четырьмя данными сферами.

Соприкосновеніе сферъ, такъ же какъ и круговъ, можетъ быть двоякаго рода: внѣшнее, когда разстояніе между центрами сферъ равняется суммѣ ихъ радіусовъ, и внутреннее, когда это разстояніе равняется разности радіусовъ.

Пусть уравненія данныхъ сферъ будутъ

$$\left.\begin{array}{l}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1{}^2=0\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2{}^2=0\\(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2-r_3{}^2=0\\(x-a_4)^2+(y-b_4)^2+(z-c_4)^2-r_4{}^2=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(1)$$

Если обозначимъ черезъ r радіусъ искомой сферы, черезъ a, b, c координаты ея центра и черезъ d_1, d_2, d_3 разстоянія этого центра отъ центровъ данныхъ сферъ, то условія задачи выразятся слѣдующимъ образомъ:

*

$$d_1^2 = (r \pm r_1)^2, \quad d_2^2 = (r \pm r_2)^2, \quad d_3^2 = (r \pm r_3)^2, \quad d_4^2 = (r \pm r_4)^2.$$

Здѣсь могутъ быть допущены всѣ возможныя сочетанія знаковъ — и — во вторыхъ частяхъ. Такъ какъ этихъ сочетаній шестнадцать, вопросу, вообще говоря, удовлетворяютъ шестнадцать различныхъ сферъ. Одна изъ нихъ имѣетъ со всѣми данными сферами внѣшнее соприкосновеніе и одна внутреннее. Восемь изъ искомыхъ сферъ таковы, что съ одною данною сферою имѣютъ внутреннее соприкосновеніе, а съ остальными внѣшнее, или обратно. Наконецъ, шесть изъ искомыхъ сферъ имѣютъ внутреннее соприкосновеніе съ двумя изъ данныхъ и внѣшнее съ двумя другими.

562. Если обозначимъ первыя части уравненій (1) черезъ S_1, S_2, S_3, S_4, то будемъ имѣть

$$d_1^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2 = (S_1) + r_1^2,$$

гдѣ (S_1) есть результатъ подстановки въ выраженіе S_1 на мѣсто x, y, z координатъ центра искомой сферы. Отсюда заключаемъ, что четыре искомыя величины a, b, c, r удовлетворяютъ слѣдующимъ четыремъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= r(r \pm 2r_1) \\ S_2 &= r(r \pm 2r_2) \\ S_3 &= r(r \pm 2r_3) \\ S_4 &= r(r \pm 2r_4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

которыми эти величины и опредѣляются вполнѣ.

Каждое изъ этихъ послѣднихъ уравненій есть второй степени, но три изъ нихъ могутъ быть замѣнены тремя уравненіями первой степени, которыя получаются изъ нихъ по вычитаніи. Таковы три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 &= 2r(r_1 \pm r_2) \\ S_1 - S_3 &= 2r(r_1 \pm r_3) \\ S_1 - S_4 &= 2r(r_1 \pm r_4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Простѣйшее аналитическое рѣшеніе задачи будетъ состоять, слѣдовательно, въ совмѣстномъ рѣшеніи системы трехъ уравненій (3) съ однимъ изъ уравненій (2). При этомъ, для каждаго изъ сочетаній знаковъ во вторыхъ частяхъ получаются заразъ двѣ сферы, которыя могутъ быть или дѣйствительныя или мнимыя.

Рѣшеніе задачи построеніемъ можетъ быть также выведено аналитически подобно тому, какъ это сдѣлано въ Геометріи на плоскости для построенія круга, касающагося трехъ данныхъ круговъ (см. стр. 169).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ЦЕНТРАЛЬНЫЯ ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. Эллипсоидъ.

563. Займемся теперь болѣе подробнымъ изслѣдованіемъ центральныхъ поверхностей, исходя изъ ихъ простѣйшаго уравненія

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Къ такому виду приводится, какъ извѣстно (см. стр. 403), уравненіе всякой центральной поверхности, когда за плоскости координатъ принимаются три сопряженныя діаметральныя плоскости. При этомъ, въ немъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не долженъ равняться нулю.

Будемъ предполагать, что система координатъ прямоугольная, т. е. что плоскости координатъ суть главныя діаметральныя плоскости, и ограничимся сперва случаемъ, когда въ уравненіи (1) коэффиціенты A, B, C имѣютъ одинаковые знаки.

Если положимъ, что коэффиціентъ K имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и коэффиціенты A, B, C, то уравненіе (1) вовсе не будетъ удовлетворяться дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ x, y, z.

Если $K = 0$, то уравненіе (1) будетъ удовлетворяться только при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Слѣдовательно, дѣйствительная поверхность выражается этимъ уравненіемъ только тогда, когда K имѣетъ знакъ, обратный знаку коэффиціентовъ A, B, C, т. е. когда отношенія

$$\frac{A}{K}, \quad \frac{B}{K}, \quad \frac{C}{K}$$

имѣютъ значенія отрицательныя.

Такъ какъ въ такомъ случаѣ мы можемъ положить

$$-\frac{K}{A} = a^2, \qquad -\frac{K}{B} = b^2, \quad -\frac{K}{C} = c^2,$$

гдѣ a, b, c суть нѣкоторыя дѣйствительныя конечныя величины, то уравненію (1), по раздѣленіи обѣихъ его частей на K, можно дать видъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ этого уравненія имѣемъ

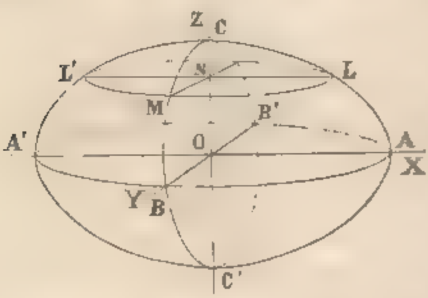
$$\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{b^2-y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{c^2-z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

откуда видно, что координаты x, y, z точекъ, принадлежащихъ поверхности, не могутъ быть болѣе, по абсолютнымъ значеніямъ, соотвѣтственныхъ величинъ a, b, c. Слѣдовательно, поверхность, выражаемая уравненіемъ (2), не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ или, какъ говорятъ, не простирается въ безконечность. Такая поверхность называется эллипсоидомъ (см. стр. 391).

564. Если положимъ въ уравненіи (2) $y=0$, $z=0$, то будемъ имѣть $x=\pm a$. Это показываетъ, что a есть разстояніе отъ начала координатъ точекъ A и A' (фиг. 110), въ которыхъ эллипсоидъ пересѣкается главнымъ діаметромъ или осью его, принятою за ось OX. Эти точки называются *вершинами* эллипсоида, а разстояніе AA', равное $2a$, есть длина его оси.



Фиг. 110.

Подобнымъ же образомъ легко видѣть, что разстоянія BB' и CC' между точками, въ которыхъ эллипсоидъ пересѣкается съ осями OY и OZ, равняются послѣдовательно $2b$ и $2c$. Эти разстоянія суть также оси эллипсоида и точки B, B', C, C' его вершины.

Такъ какъ каждая изъ осей эллипсоида можетъ быть принята за какую угодно изъ осей координатъ, то обыкновенно принимаютъ, что ось AA' есть наибольшая, а ось CC' наименьшая, т. е. что

$$a>b>c.$$

Линіи, по которымъ поверхность второго порядка пересѣкается ея главными плоскостями, называются *главными сѣченіями* поверхности.

Полагая въ уравненіи (2) послѣдовательно $x=0$, $y=0$, $z=0$, получимъ, что три главныя сѣченія выражаемаго имъ эллипсоида представляются на плоскостяхъ координатъ уравненіями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Это суть эллипсы, вершины которыхъ суть вершины самого эллипсоида.

565. Форма эллипсоида обнаруживается лучше всего изъ разсмотрѣнія линій пересѣченія его различными плоскостями. Положимъ сперва, что сѣкущая плоскость параллельна плоскости XOY и выражается уравненіемъ

$$z=h.$$

Линія пересѣченія будетъ выражаться совокупностью этого уравненія съ уравненіемъ эллипсоида (2). Исключая же z изъ обоихъ уравненій, получимъ уравненіе проекціи этой линіи на плоскость XOY, проекціи, очевидно, тождественной съ самою линіею пересѣченія.

Это уравненіе будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-h^2}{c^2}.$$

Помноживъ обѣ части на

$$\frac{c^2}{c^2-h^2}$$

и полагая для краткости

$$\frac{a\sqrt{c^2-h^2}}{c}=a' \qquad \text{и} \qquad \frac{b\sqrt{c^2-h^2}}{c}=b' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

дадимъ ему видъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Это есть уравненіе эллипса.

Изъ равенствъ (3) видимъ, что

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$$

и притомъ a' и b' будутъ имѣть дѣйствительныя значенія только тогда, когда по абсолютной величинѣ $h<c$.

Слѣдовательно, плоскости, параллельныя главной плоскости XOY, пересѣкаютъ эллипсоидъ по подобнымъ эллипсамъ, и притомъ дѣйстви-

тельное пересѣченіе будетъ происходить только тогда, когда сѣкущая плоскость встрѣчаетъ ось OZ между вершинами C и C'.

То же самое имѣетъ мѣсто и для плоскостей, параллельныхъ двумъ другимъ главнымъ плоскостямъ. Понятно, что тѣ изъ нихъ, которыя проходятъ черезъ вершины, суть касательныя къ эллипсоиду въ этихъ точкахъ.

Изъ сказаннаго видно, что эллипсоидъ всѣми своими точками помѣщается внутри параллелепипеда, образуемаго плоскостями, касающимися въ его вершинахъ, и что эту поверхность можно разсматривать, какъ описываемую измѣняющимся эллипсомъ LML' (фиг. 110), плоскость котораго остается параллельною одной изъ главныхъ плоскостей, а вершины перемѣщаются по эллипсамъ ACA' и BCB', по которымъ поверхность пересѣкается двумя другими главными плоскостями.

566. Если въ уравненіи (2) эллипсоида двѣ постоянныя a и b равны между собою, то всѣ сѣченія этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, будутъ круги. Въ этомъ случаѣ поверхность называется *эллипсоидомъ вращенія*, ибо она можетъ быть разсматриваема какъ описываемая постояннымъ эллипсомъ, вращающимся около одной изъ его осей. Можно различать два рода эллипсоидовъ вращенія: эллипсоиды, для которыхъ ось вращенія есть наименьшій изъ діаметровъ, и такіе, для которыхъ эта ось есть наибольшій діаметръ.

Понятно, что сфера или шаръ есть такой эллипсоидъ, всѣ три оси котораго равны между собою.

567. Посмотримъ теперь, по какой линіи эллипсоидъ можетъ пересѣкаться произвольно взятою плоскостью.

Пусть уравненіе плоскости будетъ

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Линія пересѣченія выражается совокупностью этого уравненія съ уравненіемъ (2). Исключивъ изъ нихъ z, получимъ уравненіе проекціи этой линіи на плоскость XOY. Это уравненіе будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(Ax+By+D)^2}{C^2c^2}=1$$

или

$$\frac{C^2x^2}{a^2}+\frac{C^2y^2}{b^2}+\frac{(Ax+By+D)^2}{c^2}-C^2=0.$$

Раскрывъ скобки и соединивъ подобные члены, дадимъ ему видъ

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0, \quad \ldots\ldots\ (5)$$

гдѣ положено

$$A' = \frac{C^2}{a^2} + \frac{A^2}{c^2}, \quad B' = 2\frac{AB}{c^2}, \quad C' = \frac{C^2}{b^2} + \frac{B^2}{c^2},$$

$$D' = 2\frac{AD}{c^2}, \quad E' = 2\frac{BD}{c^2}, \quad F' = \frac{D^2 - C^2c^2}{c^2}.$$

Отсюда находимъ

$$B'^2 - 4A'C' = -4\frac{C^2}{a^2b^2c^4}(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2).$$

Такъ какъ вторая часть этого равенства есть величина всегда отрицательная, то заключаемъ, что линія, выражаемая уравненіемъ (5), можетъ быть только эллипсъ. Таковою же должна быть и искомая линія пересѣченія (см. стр. 301), которую можно разсматривать, какъ опредѣляемую аналитически совокупностью уравненій (4) и (5).

Итакъ, сѣченія эллипсоида всѣми возможными плоскостями суть эллипсы.

568. Если плоскость (4) касается эллипсоида, то уравненіе (5) должно удовлетворяться координатами только одной точки, а это, какъ извѣстно (см. стр. 132), возможно только при условіи

$$\begin{vmatrix} 2A', & B', & D' \\ B', & 2C', & E' \\ D', & E', & 2F' \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2) - (B'^2 - 4A'C')F' = 0.$$

Подставляя сюда предыдущія выраженія для $A', B', \ldots F'$, получимъ

$$A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2 = 0.$$

При этомъ условіи уравненіямъ какъ эллипсоида (2), такъ и плоскости (4), будутъ удовлетворять величины

$$x = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z = -\frac{Cc^2}{D}.$$

Это суть, слѣдовательно, координаты точки прикосновенія. Обозначая ихъ чрезъ x_1, y_1, z_1, будемъ имѣть

$$A = -\frac{Dx_1}{a^2}, \quad B = -\frac{Dy_1}{b^2}, \quad C = -\frac{Dz_1}{c^2}.$$

вслѣдствіе чего уравненіе касательной плоскости къ эллипсоиду (2 …
лучитъ видъ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Это уравненіе можно было бы получить изъ общаго уравненія ка…
тельной плоскости, выведеннаго выше для поверхности, выража…
общимъ уравненіемъ второй степени (см. стр. 417).

Уравненія нормали къ эллипсоиду (2) въ точкѣ x_1, y_1, z_1, какъ пр…
мой, проходящей черезъ эту точку и перпендикулярной къ плоск…
(6), очевидно, будутъ

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=\frac{b^2(y-y_1)}{y_1}=\frac{c^2(z-z_1)}{z_1} \quad \ldots \ldots$$

Если въ уравненіи (6) x_1, y_1, z_1 означаютъ координаты какой-н…
будь точки въ пространствѣ, то выражаемая имъ плоскость есть …
лярная плоскость этой точки.

569. Обозначимъ чрезъ α, β, γ углы нормали (7) къ эллипсоиду …
чрезъ p длину перпендикуляра изъ начала координатъ на касательн…
плоскость (6). Въ такомъ случаѣ уравненію этой плоскости можно да…
видъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p,$$

причемъ будемъ имѣть

$$\frac{a^2\cos\alpha}{x_1}=\frac{b^2\cos\beta}{y_1}=\frac{c^2\cos\gamma}{z_1}=p,$$

откуда

$$\frac{px_1}{a}=a\cos\alpha, \quad \frac{py_1}{b}=b\cos\beta, \quad \frac{pz_1}{c}=c\cos\gamma.$$

Возвысивъ эти равенства въ квадратъ и сложивши, получимъ

$$p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma,$$

выраженіе, опредѣляющее разстояніе касательной плоскости къ эллип-
соиду отъ его центра черезъ углы, составляемые ею съ его главными
плоскостями.

Если возьмемъ три какія-нибудь касательныя плоскости, уравненія
которыхъ суть

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = p_1 \\ x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 = p_2 \\ x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 = p_3 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

то для каждой изъ нихъ будемъ имѣть

$$p_1^2 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1\,,$$

$$p_2^2 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2\,,$$

$$p_3^2 = a^2\cos^2\alpha_3 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3\,,$$

и если каждыя двѣ изъ разсматриваемыхъ плоскостей перпендикулярны между собою, то должно быть

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1\,,$$

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1\,,$$

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1\,.$$

Слѣдовательно,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = a^2 + b^2 + c^2\,. \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Итакъ, *сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипсоида на три какія-нибудь перпендикулярныя между собою касательныя плоскости есть величина постоянная.*

Въ случаѣ перпендикулярности каждыхъ двухъ изъ плоскостей (8) должны еще имѣть мѣсто соотношенія

$$\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0\,,$$

$$\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3 = 0\,,$$

$$\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого, возвысивъ уравненія (8) въ квадратъ и сложивши, получимъ, въ виду равенства (9),

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2\,.$$

Этому уравненію должны, очевидно удовлетворять координаты точки, принадлежащей всѣмъ тремъ разсматриваемымъ плоскостямъ (8). Оно выражаетъ сферу, которой центръ находится въ началѣ координатъ, а радіусъ равняется

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *геометрическое мѣсто вершины прям . трехграннаго угла, стороны котораго касаются эллипсоида, есть сфера концентрическая съ эллипсоидомъ.*

570. Уравненіе эллипсоида (2) можно представить въ видѣ

$$b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=b^2-y^2$$

или, отнимая отъ обѣихъ частей выраженіе (x^2+z^2) и измѣняя знаки всѣхъ членовъ,

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)z^2=x^2+y^2+z^2-b^2$$

или, наконецъ,

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-\frac{b^2-c^2}{c^2}z^2=x^2+y^2+z^2-b^2.$$

Здѣсь первая часть есть произведеніе двухъ множителей первой степени съ дѣйствительными коэффицентами

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}.$$

Поэтому заключаемъ, что уравненію эллипсоида должны удовлетворять такія значенія x, y, z, которыя удовлетворяютъ одновременно уравненію сферы

$$x^2+y^2+z^2-b^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

и уравненію какой-либо изъ плоскостей

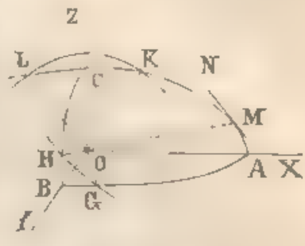
$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0\\ \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

Это показываетъ, что эллипсоидъ пересѣкается каждою изъ послѣднихъ плоскостей по той же линіи, какъ и сфера (10), т. е. по кругу. Такія плоскости называются *плоскостями круговыхъ сѣченій.*

Очевидно, что плоскости (11) суть діаметральныя и, притомъ, проходятъ чрезъ ось OY, т. е. среднюю по величинѣ ось эллипсоида. Такъ какъ всякая поверхность второго порядка пересѣкается параллельными плоскостями по подобнымъ кривымъ, то всѣ плоскости, параллельныя плоскостямъ (11), суть также плоскости круговыхъ сѣченій.

571. Чтобы убѣдиться, не существуютъ ли еще другія плоскости, пересѣкающія эллипсоидъ по кругу, вообразимъ, что нѣкоторая діа-

метральная плоскость, не проходящая черезъ ось OY, пересѣкается съ плоскостями XOY и YOZ по прямымъ OG и OH (фиг. 111), а съ самимъ эллипсоидомъ по кривой GH. Центръ эллипсоида будетъ, очевидно, центромъ этой кривой, и такъ какъ $OG > OH$, ибо OB есть наименьшій полудіаметръ для эллипса AGB и наибольшій для эллипса BHC, то заключаемъ, что эта кривая не можетъ быть кругомъ.



Фиг. 111.

Итакъ, діаметральная плоскость, пересѣкающая эллипсоидъ по кругу, должна непремѣнно проходить чрезъ ось OY.

Если положимъ, что K есть точка пересѣченія такой плоскости съ эллипсомъ AMC, по которому эллипсоидъ пересѣкается главною плоскостью XOZ, то должно быть

$$OK = OB = b.$$

Слѣдовательно, діаметральныя плоскости круговыхъ сѣченій проходятъ чрезъ точки K и L, въ которыхъ эллипсъ AMC пересѣкается съ кругомъ, описаннымъ изъ его центра радіусомъ b.

Если обозначимъ черезъ φ уголъ наклоненія плоскости BOK къ плоскости XOY или, что все то же, уголъ между прямыми OK и OX, то координаты точекъ K и L будутъ

$$x = \pm b\cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = b\sin\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Подставивъ ихъ въ уравненіе (2) эллипсоида, получимъ

$$\frac{b^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\varphi}{c^2} = 1,$$

откуда находимъ

$$\sin\varphi = \pm\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad \cos\varphi = \pm\frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}, \; . \; . \; . \; (13)$$

и слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Эти выраженія получаются и изъ уравненій (11). Слѣдовательно, плоскости, выражаемыя этими уравненіями, суть единственныя діаметральныя плоскости круговыхъ сѣченій.

Если положимъ $a = b$, то будемъ имѣть $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = \pm 1$. Если же $b = c$, то $\sin\varphi = \pm 1$ и $\cos\varphi = 0$. Это показываетъ, что для

эллипсоида вращенія не существуетъ другихъ плоскостей круговыхъ сѣченій, кромѣ плоскостей, перпендикулярныхъ къ его оси вращенія.

572. Между плоскостями, параллельными плоскостямъ (11), существуютъ касательныя къ эллипсоиду. Точки прикосновенія такихъ плоскостей называются *точками округленія* или *точками сферической кривизны*. Очевидно, что такихъ точекъ на эллипсоидѣ четыре; онѣ находятся на плоскости XOZ и касательныя въ нихъ къ эллипсу AMC (фиг. 111) параллельны прямымъ OK и OL.

Если положимъ, что M есть точка округленія, такъ что касательная MN параллельна OL, то прямыя OM и OL суть сопряженные діаметры. Поэтому, обозначая координаты точки L чрезъ x_1, y_1, z_1, а координаты точки M чрезъ x_2, y_2, z_2, будемъ, какъ извѣстно (см. стр. 193), имѣть

$$\frac{x_1}{a} = \pm \frac{z_2}{c} \quad \text{и} \quad \frac{x_2}{a} = \mp \frac{z_1}{c}.$$

Но изъ равенствъ (12) и (13) для координатъ точекъ K и L получаемъ выраженія

$$x_1 = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \quad \text{и} \quad z_1 = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Слѣдовательно, координаты точекъ округленія будутъ

$$x_2 = \pm \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

573. Возьмемъ на эллипсоидѣ три какія-нибудь точки M_1, M_2, M_3, и пусть координаты ихъ будутъ послѣдовательно (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Въ такомъ случаѣ должно быть

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} + \dfrac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} + \dfrac{z_2^2}{c^2} = 1, \\ \dfrac{x_3^2}{a^2} + \dfrac{y_3^2}{b^2} + \dfrac{z_3^2}{c^2} = 1, \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (14)$$

и діаметры, проходящіе черезъ эти три точки, будутъ выражаться уравненіями

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}, \quad \frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2}, \quad \frac{x}{x_3} = \frac{y}{y_3} = \frac{z}{z_3}.$$

Если эти діаметры сопряженные, то каждые два изъ нихъ должны быть параллельны касательной плоскости въ концѣ третьяго (см. стр. 418)

Выражая касательныя плоскости въ точкахъ M_1, M_2, M_3 уравненіями вида (6), будемъ имѣть, что это геометрическое соотношеніе выразится слѣдующими равенствами:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x_1x_2}{a^2}+\dfrac{y_1y_2}{b^2}+\dfrac{z_1z_2}{c^2}=0,\quad \dfrac{x_1x_3}{a^2}+\dfrac{y_1y_3}{b^2}+\dfrac{z_1z_3}{c^2}=0,\\ \dfrac{x_2x_3}{a^2}+\dfrac{y_2y_3}{b^2}+\dfrac{z_2z_3}{c^2}=0\end{array}\right\}\quad \ldots (15)$$

или

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{b^2}+\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{c^2}=0,$$

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos\beta_1\cos\beta_3}{b^2}+\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{c^2}=0,$$

$$\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos\beta_2\cos\beta_3}{b^2}+\frac{\cos\gamma_2\cos\gamma_3}{c^2}=0,$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 суть углы составляемые тремя сопряженными діаметрами съ осями эллипсоида.

574. Изъ двухъ первыхъ соотношеній (15) находимъ

$$\frac{\dfrac{x_1^{\,2}}{a^2}}{\left(\dfrac{y_2}{b}\dfrac{z_3}{c}-\dfrac{z_2}{c}\dfrac{y_3}{b}\right)^2}=\frac{\dfrac{y_1^{\,2}}{b^2}}{\left(\dfrac{z_2}{c}\dfrac{x_3}{a}-\dfrac{x_2}{a}\dfrac{z_3}{c}\right)^2}=\frac{\dfrac{z_1^{\,2}}{c^2}}{\left(\dfrac{x_2}{a}\dfrac{y_3}{b}-\dfrac{y_2}{b}\dfrac{x_3}{a}\right)^2}.$$

Какъ видно изъ равенствъ (14), сумма предыдущихъ членовъ этихъ трехъ отношеній равняется единицѣ. Что же касается суммы послѣдующихъ, то она приводится къ виду

$$\left(\frac{x_2^{\,2}}{a^2}+\frac{y_2^{\,2}}{b^2}+\frac{z_2^{\,2}}{c^2}\right)\left(\frac{x_3^{\,2}}{a^2}+\frac{y_3^{\,2}}{b^2}+\frac{z_3^{\,2}}{c^2}\right)-\left(\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}\right)^2$$

и, въ силу соотношеній (14) и (15), также должна равняться единицѣ. Поэтому заключаемъ, что

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x_1}{a}=\dfrac{y_2}{b}\dfrac{z_3}{c}-\dfrac{z_2}{c}\dfrac{y_3}{b},\quad \dfrac{y_1}{b}=\dfrac{z_2}{c}\dfrac{x_3}{a}-\dfrac{x_2}{a}\dfrac{z_3}{c},\\ \dfrac{z_1}{c}=\dfrac{x_2}{a}\dfrac{y_3}{b}-\dfrac{y_2}{b}\dfrac{x_3}{a}.\end{array}\right\}\quad \ldots (16)$$

Это суть равенства, опредѣляющія координаты одной изъ точекъ M_1, M_2, M_3 чрезъ координаты двухъ другихъ.

Если помножимъ равенства (16) последовательно на $\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \dots$ и результаты сложимъ, то получимъ

$$\frac{x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + y_1(z_2x_3 - x_2z_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3)}{abc} = 1$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = abc.$$

Первая часть этого послѣдняго равенства представляетъ, какъ извѣстно (см. стр. 340), ушестеренный объемъ тетраэдра, вершины котораго суть точки M_1, M_2, M_3 и начало координатъ, или, что все тоже, объемъ параллелепипеда, ребра котораго суть OM_1, OM_2, OM_3. Что же касается второй части, то она, очевидно, равняется объему прямого параллелепипеда, ребрами котораго служатъ полуоси эллипсоида. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее предложеніе, представляющее аналогію съ одной изъ теоремъ Аполлонія для эллипса.

Объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипсоида, есть величина постоянная, равная объему параллелепипеда, построеннаго на его осяхъ.

575. Такимъ же точно образомъ, какъ выведены выраженія (16) изъ соотношеній (14) и (15), можно вывести выраженія координатъ каждой изъ точекъ M_2 и M_3 черезъ координаты двухъ другихъ. Такъ, между прочимъ, получимъ

$$\frac{x_2}{a} = \frac{y_3}{b}\frac{z_1}{c} - \frac{z_3}{c}\frac{y_1}{b}, \quad \frac{x_3}{a} = \frac{y_1}{b}\frac{z_2}{c} - \frac{z_1}{c}\frac{y_2}{b} \quad \dots (17)$$

Помноживъ эти равенства послѣдовательно на $\frac{x_2}{a}$, $\frac{x_3}{a}$ и сложивши съ первымъ изъ равенствъ (16), помноженнымъ на $\frac{x_1}{a}$, получимъ

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{a^2} = \frac{x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + x_2(y_3z_1 - z_3y_1) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)}{abc}$$

Такъ какъ вторая часть, на основаніи предыдущаго предложенія, равняется единицѣ, то будемъ имѣть

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2.$$

Слѣдовательно,

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)=a^2+b^2+c^2$$

или

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ a', b', c' означаютъ половины діаметровъ, проходящихъ черезъ точки M_1, M_2, M_3.

Итакъ, *сумма квадратовъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ его осей.*

576. Помноживъ равенства (17) послѣдовательно на ay_2, ay_3 и сложивши съ первымъ изъ равенствъ (16), помноженнымъ на ay_1, получимъ

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$$

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2=a^2b^2,$$

а это можно представить слѣдующимъ образомъ

$$(x_1y_2-y_1x_2)^2+(x_1y_3-y_1x_3)^2+(x_2y_3-y_2x_3)^2=a^2b^2.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$(x_1z_2-z_1x_2)^2+(x_1z_3-z_1x_3)^2+(x_2z_3-z_2x_3)^2=a^2c^2,$$

$$(y_1z_2-z_1y_2)^2+(y_1z_3-z_1y_3)^2+(y_2z_3-z_2y_3)^2=b^2c^2.$$

Очевидно, что разности

$$(x_1y_2-y_1x_2), \quad (x_1z_2-z_1x_2), \quad (y_1z_2-z_1y_2)$$

представляютъ двойныя площади проекцій треугольника M_1OM_2 на три плоскости координатъ. Слѣдовательно, сумма

$$(x_1y_2-y_1x_2)^2+(x_1z_2-z_1x_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2$$

представляетъ учетверенный квадратъ площади этого треугольника (см. стр. 338).

Поэтому, обозначивъ площади треугольниковъ M_2OM_3, M_1OM_3, M_1OM_2 чрезъ U_1, U_2, U_3, будемъ имѣть, по сложеніи предыдущихъ равенствъ,

$$4(U_1^2+U_2^2+U_3^2)=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *сумма квадратовъ площадей параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ эллипсоида, есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ площадей прямоугольниковъ, построенныхъ на его осяхъ.*

Послѣднія предложенія, представляющія свойства сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида, можно было бы вывести геометрически изъ примѣненія теоремъ Аполлонія къ сѣченіямъ эллипсоида діаметральными плоскостями, какъ это будетъ показано для другихъ центральныхъ поверхностей (см. стр. 478 и 479).

577. Между сопряженными діаметрами эллипсоида могутъ быть равные по величинѣ. Если положимъ, что таковы всѣ три сопряженные діаметра, проходящіе черезъ точки M, M_2, M_3, то будемъ имѣть

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2.$$

Эти два равенства вмѣстѣ съ равенствами (14) и (15) представляютъ зависимость между координатами концовъ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Такъ какъ всѣхъ этихъ равенствъ восемь, а координатъ точекъ M_1, M_2, M_3 девять, то заключаемъ, что должно существоватъ безчисленное множество системъ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Полагая, что $2a'$ есть величина одного изъ такихъ діаметровъ, получимъ изъ соотношенія (18)

$$a'^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Отсюда видимъ, что всѣ равные сопряженные діаметры суть образующія конуса, управляющею котораго служитъ линія пересѣченія эллипсоида со сферою, выражаемою уравненіемъ

$$3(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2.$$

Линія эта, очевидно, всегда дѣйствительная.

§ 2. Однополый гиперболоидъ.

578. Мы разсматривали въ предыдущемъ только такія центральныя поверхности, которыя выражаются простѣйшимъ ихъ уравненіемъ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+K=0\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

въ предположеніи, что всѣ три коэффиціента A, B, C имѣютъ одинаковые знаки (см. стр. 437). Перейдемъ теперь къ случаю, когда два изъ этихъ коэффиціентовъ имѣютъ знаки, противоположные знаку третьяго. Будемъ предполагать, что система координатъ прямоугольная, т. е. что за оси координатъ приняты оси поверхности. Такъ какъ при этомъ любая изъ трехъ осей поверхности можетъ быть принята за каждую изъ осей координатъ, то допустимъ, что выборъ послѣднихъ сдѣланъ такимъ образомъ, чтобы одинаковые знаки принадлежали двумъ первымъ

коэффиціентамъ уравненія (1). Имѣя же въ виду, что знаки всѣхъ коэффиціентовъ въ уравненіи могутъ быть измѣнены, будемъ предполагать, что A и B суть величины положительныя и, слѣдовательно, C отрицательная.

Что касается постояннаго члена K, то онъ можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ, а также можетъ быть равенъ нулю.

Если онъ не равенъ нулю и мы обозначимъ абсолютныя величины отношеній

$$\frac{K}{A}, \quad \frac{K}{B}, \quad \frac{K}{C}$$

послѣдовательно черезъ a^2, b^2, c^2, то при положительномъ K уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

при отрицательномъ же K оно будетъ имѣть видъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Поверхности, выражаемыя какъ тѣмъ, такъ и другимъ изъ этихъ уравненій, простираются въ безконечность, такъ какъ оба уравненія могутъ быть удовлетворяемы сколь угодно большими дѣйствительными значеніями координатъ x, y, z. Онѣ называются *гиперболоидами* (см. стр. 391). Сперва мы займемся разсмотрѣніемъ только тѣхъ изъ нихъ, которыя выражаются уравненіемъ (2).

579. Когда въ уравненіи (1) постоянный членъ K равняется нулю, то выражаемая имъ поверхность есть, какъ извѣстно (см. стр. 388), коническая. Принимая во вниманіе сказанное выше о выборѣ системы координатъ, мы можемъ и въ этомъ случаѣ допустить, что коэффиціенты A и B положительные, а C отрицательный. Вслѣдствіе этого должны существовать такія дѣйствительныя величины a, b, c, что-бы было

$$a^2 = \frac{1}{A}, \quad b^2 = \frac{1}{B}, \quad c^2 = -\frac{1}{C}.$$

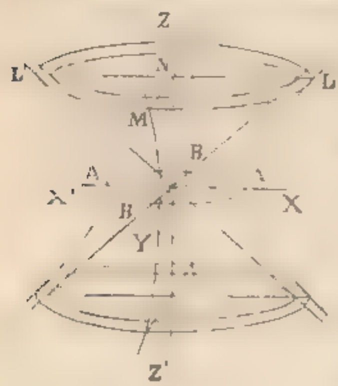
Отсюда заключаемъ, что уравненіе всякаго конуса второго порядка можетъ быть разсматриваемо въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

580. Обращаясь къ изслѣдованію поверхности, выражаемой при данныхъ a, b, c уравненіемъ (2), найдемъ сперва ея вершины, т. е. точки пересѣченія съ осями.

*

Полагая для этого $y=0$, $z=0$, получимъ $x=\pm a$. Полагая же $x=0$, $z=0$, будемъ имѣть $y=\pm b$. Слѣдовательно, ось OX встрѣчаетъ поверхность въ двухъ точкахъ A и A' (фиг. 112), отстоящихъ отъ центра на разстояніе a, а ось OY въ точкахъ B и B', отстоящихъ отъ центра на разстояніе b. Если же положимъ въ уравненіи (2) $x=0$, $y=0$, то получимъ



Фиг. 112.

$$z=\pm c\sqrt{-1},$$

откуда заключаемъ, что поверхность вовсе не пересѣкается съ осью OZ. Послѣдняя называется поэтому мнимою осью поверхности. Гиперболоидъ, выражаемый уравненіемъ (2), имѣетъ, слѣдовательно, только четыре вершины A, A', B, B'.

Чтобы получить главныя сѣченія разсматриваемаго гиперболоида, положимъ въ его уравненіи послѣдовательно $z=0$, $y=0$, $x=0$. Въ этихъ предположеніяхъ будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отсюда видимъ, что плоскостью XOY поверхность пересѣкается по эллипсу, вершины котораго суть вершины самой поверхности. Плоскости же XOZ и YOZ пересѣкаютъ поверхность по гиперболамъ, которыхъ вершины также находятся въ вершинахъ поверхности и для которыхъ ось OZ есть общая мнимая ось.

581. Возьмемъ теперь какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости XOY и выражаемую уравненіемъ

$$z=h.$$

Линія пересѣченія этой плоскости съ гиперболоидомъ (2) будетъ тождественна съ ея проекціею на плоскость XOY. Уравненіе же этой проекціи, очевидно, будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2+h^2}{c^2}$$

или

$$\frac{c^2x^2}{a^2(c^2+h^2)}+\frac{c^2y^2}{b^2(c^2+h^2)}=1$$

или, наконецъ,

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

гдѣ положено

$$a' = \frac{a\sqrt{c^2+h^2}}{c} \quad \text{и} \quad b' = \frac{b\sqrt{c^2+h^2}}{c},$$

такъ что

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Уравненіе (3) выражаетъ эллипсъ, оси котораго $2a'$ и $2b'$ дѣйствительны при всякомъ значеніи h и безпредѣльно возрастаютъ при возрастаніи абсолютной величины h.

Это показываетъ, что всѣ безъ исключенія плоскости, перпендикулярныя къ мнимой оси поверхности, пересѣкаютъ ее по дѣйствительнымъ и подобнымъ эллипсамъ, безпредѣльно увеличивающимся по мѣрѣ удаленія сѣкущей плоскости отъ центра поверхности. Очевидно, что наименьшій изъ всѣхъ этихъ эллипсовъ есть тотъ, по которому поверхность пересѣкается своей главной плоскостью XOY. Онъ называется *горловымъ эллипсомъ.*

582. Изъ сказаннаго видимъ, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (2), состоитъ изъ одной сплошной и простирающейся въ безконечность полости. На этомъ основаніи ее называютъ *однополымъ гиперболоидомъ* Очевидно, что она можетъ быть разсматриваема, какъ описываемая измѣняющимся эллипсомъ LML' (фиг. 112), плоскость котораго остается параллельною одной изъ главныхъ плоскостей, а вершины перемѣщаются по двумъ гиперболамъ, лежащимъ въ двухъ другихъ главныхъ плоскостяхъ и имѣющимъ общую мнимую ось.

Если въ уравненіи (2) постоянныя a и b равны между собою, то всѣ сѣченія выражаемой имъ поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, будутъ круги. Въ этомъ случаѣ поверхность называется *однополымъ гиперболоидомъ вращенія,* ибо она можетъ быть разсматриваема, какъ описываемая постоянною гиперболою, вращающеюся около ея мнимой оси.

583 Всякій діаметръ гиперболоида (2), какъ прямая, проходящая черезъ начало координатъ, выражается уравненіями

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Обозначая черезъ ρ каждое изъ отношеній, составляющихъ эти уравненія, будемъ имѣть

$$x = m\rho, \quad y = n\rho, \quad z = p\rho \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Чтобы опредѣлить координаты концовъ діаметра, подставимъ эти выраженія въ уравненіе (2). Въ результатѣ получимъ

$$\varrho^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}\right)=1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

откуда

$$\varrho=\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}}}.$$

Слѣдовательно, величина ϱ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и искомыя координаты (5), будутъ дѣйствительными только тогда, когда угловые параметры m, n, p въ уравненіи діаметра (4) удовлетворяютъ условію

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}>0.$$

Если же

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}<0,$$

то діаметръ (4) не пересѣкается съ гиперболоидомъ. Такіе діаметры называются мнимыми. Къ числу ихъ принадлежитъ и мнимая ось OZ.

Въ случаѣ, когда

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

координаты концовъ діаметра будутъ безконечно большія. Слѣдовательно, діаметры, удовлетворяющіе этому послѣднему условію, встрѣчаютъ гиперболоидъ въ безконечности. Очевидно, что они образуютъ коническую поверхность, уравненіе которой получимъ, исключивъ параметры m, n, p изъ уравненій (4) и этого условія. Это уравненіе будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

584. Если обозначимъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты какой-нибудь точки M_1, лежащей на гиперболоидѣ (2), а черезъ x_2, y_2, z_2 координаты точки M_2, лежащей на конусѣ (8), то будемъ имѣть

$$\frac{x_1{}^2-x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2-y_2{}^2}{b^2}-\frac{z_1{}^2-z_2{}^2}{c^2}=1.$$

Полагая же, что $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, т. е. что точки M_2 и M_1 лежатъ на одной прямой, параллельной оси OZ, получимъ

$$z_2^2 - z_1^2 = c^2$$

или

$$z_2 - z_1 = \frac{c^2}{z_2 + z_1}.$$

Отсюда видимъ, что разность $(z_2 - z_1)$ безпредѣльно уменьшается при возрастанiи z_1 и z_2. Это показываетъ, что точки гиперболоида безпредѣльно приближаются къ точкамъ конуса (8) по мѣрѣ удаленiя ихъ въ безконечность.

Конусъ (8) имѣетъ, слѣдовательно, такое же отношенiе къ гиперболоиду, какъ ассимптоты къ гиперболѣ. На этомъ основанiи его называютъ *ассимптотическимъ конусомъ гиперболоида*.

Такъ какъ при условiи (7) два значенiя ρ, опредѣляемыя изъ уравненiя (6), становятся равными, то образующiя ассимптотическаго конуса могутъ быть разсматриваемы, какъ касательныя къ гиперболоиду, самый же конусъ, какъ описанный около поверхности, т. е. соприкасающiйся съ нею по линiи, всѣ точки которой находятся въ безконечности (см. стр. 392).

585. Линiя пересѣченiя однополаго гиперболоида съ какою-нибудь плоскостью выражается совокупностью уравненiя (2) съ уравненiемъ первой степени.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Исключая изъ этихъ уравненiй одну изъ перемѣнныхъ, получимъ уравненiе проекцiи сѣченiя на одну изъ главныхъ плоскостей. Такъ, проекцiя сѣченiя на плоскость XOY будетъ выражаться уравненiемъ

$$\frac{C^2x^2}{a^2} + \frac{C^2y^2}{b^2} - \frac{(Ax + By + D)^2}{c^2} - C^2 = 0$$

или

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ

$$A' = \frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}, \quad B' = -2\frac{AB}{c^2}, \quad C' = \frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2},$$

$$D' = -2\frac{AD}{c^2}, \quad E' = -2\frac{BD}{c^2}, \quad F' = -\frac{D^2 - C^2c^2}{c^2}.$$

Отсюда находимъ

$$B'^2 - 4A'C' = 4\frac{C^2}{a^2b^2c^2}(A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2)$$

Вторая часть этого равенства можетъ быть и положительною, и отрицательною, и равною нулю. Слѣдовательно, въ пересѣчени гиперболоида различными плоскостями могутъ получаться всѣ возможныя кривыя второго порядка (см. стр. 139).

Координаты центра проекціи (10) будутъ, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2C'D' - B'E'}{B'^2 - 4A'C'} = \frac{-ADa^2}{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2} \\ y_1 &= \frac{2A'E' - B'D'}{B'^2 - 4A'C'} = \frac{-BDb^2}{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

Эти выраженія будутъ представлять также двѣ координаты центра самой линіи пересѣченія. Третья же координата этого центра опредѣлится по нимъ изъ уравненія (9) слѣдующимъ образомъ

$$z_1 = \frac{(Ax_1 + By_1 + D)}{-C} = \frac{+CDc^2}{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2} \quad \ldots\ldots (12)$$

586. Такимъ же точно образомъ можетъ быть найдена линія пересѣченія плоскости (9) съ ассимптотическимъ конусомъ (8). При этомъ легко видѣть, что уравненіе проекціи этой линіи на плоскость XOY будетъ отличаться отъ уравненія (10) только постояннымъ членомъ.

Отсюда заключаемъ, что *линія пересѣченія гиперболоида и его ассимптотическаго конуса одною и тою же плоскостью суть подобныя, подобно расположенныя и концентрическія.*

Если сѣкущая плоскость есть діаметральная, то она имѣетъ съ ассимптотическимъ конусомъ или только одну общую точку, или двѣ различныя общія прямыя, или, наконецъ, двѣ совпадающія общія прямыя. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ должно быть $B'^2 - 4A'C' < 0$, во второмъ $B'^2 - 4A'C' > 0$ и въ третьемъ $B'^2 - 4A'C' = 0$. Поэтому, принимая во вниманіе, что всякая поверхность второго порядка пересѣкается параллельными плоскостями по линіямъ подобнымъ (см. стр. 400), приходимъ къ слѣдующему выводу.

Всѣ плоскости, параллельныя такимъ діаметральнымъ плоскостямъ, которыя имѣютъ съ ассимптотическимъ конусомъ только одну общую точку, пересѣкаютъ какъ гиперболоидъ, такъ и этотъ конусъ по эллипсамъ.

Всѣ плоскости, параллельныя діаметральнымъ плоскостямъ, пересѣкающимъ ассимптотическій конусъ по двумъ образующимъ, пересѣкаютъ обѣ поверхности по гиперболамъ.

Наконецъ, всѣ плоскости, параллельныя такимъ діаметральнымъ плоскостямъ, которыя соприкасаются съ конусомъ по образующимъ, пересѣкаютъ обѣ поверхности по параболамъ.

Кромѣ того, изъ сказаннаго слѣдуетъ, что обѣ образующія, по которымъ діаметральная плоскость пересѣкаетъ ассимптотическій конусъ,

суть ассимптоты гиперболы, по которой эта плоскость пересѣкается съ гиперболоидомъ. Вслѣдствіе этого на ассимптотическій конусъ однополаго гиперболоида можно смотрѣть, какъ на геометрическое мѣсто ассимптотъ всѣхъ гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи этой поверхности, діаметральными плоскостями.

587. Если плоскость (9) касается гиперболоида (2), то уравненіе (10) должно выражать совокупность двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ прямыхъ (см. стр. 387), а это, какъ извѣстно, будетъ тогда, когда имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2) - (B'^2 - 4A'C')F' = 0.$$

Внеся сюда значенія коэффиціентовъ A', B', C'..., получимъ

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 - D^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$B'^2 - 4A'C' = 4\frac{C^2D^2}{a^2b^2c^2}.$$

Такъ какъ эта величина положительная, то заключаемъ, что *всякая касательная плоскость къ однополому гиперболоиду имѣетъ съ этою поверхностью двѣ общія дѣйствительныя прямыя.*

Координаты точки пересѣченія этихъ прямыхъ, т. е. точки прикосновенія плоскости, опредѣлятся выраженіями (11) и (12), которыя, въ силу соотношенія (13) обращаются въ

$$x_1 = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y_1 = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z_1 = +\frac{Cc^2}{D},$$

откуда находимъ

$$A = -\frac{Dx_1}{a^2}, \quad B = -\frac{Dy_1}{b^2}, \quad C = +\frac{Dz_1}{c^2},$$

вслѣдствіе чего уравненіе (9), по раздѣленіи всѣхъ членовъ на $-D$, обращается въ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Это есть уравненіе касательной плоскости къ гиперболоиду въ данной на немъ точкѣ.

Если x_1, y_1, z_1 означаютъ координаты какой-нибудь точки въ пространствѣ, то плоскость, выражаемая этимъ уравненіемъ, есть полярная плоскость этой точки.

Изъ послѣдняго уравненія находимъ, что нормаль къ гиперболоиду (2) въ данной на немъ точкѣ выражается уравненіями

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=\frac{b^2(y-y_1)}{y_1}=\frac{c^2(z-z_1)}{-z_1}.$$

588. Уравненіе касательной плоскости къ гиперболоиду (2) можно также представить въ видѣ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p\,,$$

гдѣ p означаетъ длину перпендикуляра изъ центра поверхности на эту плоскость, а α, β, γ углы этого перпендикуляра съ осями.

Сравнивая послѣднее уравненіе съ уравненіемъ (14), получимъ

$$\frac{a^2\cos\alpha}{x_1}=\frac{b^2\cos\beta}{y_1}=\frac{c^2\cos\gamma}{-z_1}=p\,,$$

откуда

$$\frac{px_1}{a}=a\cos\alpha,\quad \frac{py_1}{b}=b\cos\beta\,,\quad \frac{pz_1}{c}=-c\cos\gamma,$$

и слѣдовательно

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma=p^2\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}-\frac{z_1{}^2}{c^2}\right)=p^2.$$

Уравненію (14) можно поэтому дать слѣдующій видъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma}\,.$$

Это есть уравненіе касательной плоскости къ гиперболоиду, перпендикулярной къ данному направленію. Пользуясь имъ, не трудно доказать такъ же, какъ и для эллипсоида слѣдующія предложенія (см. стр. 443 и 444).

1) *Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра гиперболоида на три какія-нибудь перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.*

2) *Геометрическое мѣсто вершины прямого триграннаго угла, грани котораго суть касательныя плоскости къ гиперболоиду, есть сфера, концентрическая съ гиперболоидомъ.*

589. Въ числѣ плоскостей, пересѣкающихъ гиперболоидъ по эллипсамъ, могутъ быть такія, сѣченія которыхъ суть круги. Чтобы обнаружить ихъ существованіе, представимъ уравненіе гиперболоида (2) въ видѣ

$$\frac{b^2+c^2}{c^2}z^2 - \frac{b^2-a^2}{a^2}x^2 = x^2+y^2+z^2-b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

причемъ будемъ предполагать, что $b > a$.

Первая часть этого уравненія разлагается на два линейные множителя съ дѣйствительными коэффиціентами

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2} \quad \text{и} \quad \frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} + \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2}.$$

Поэтому его можно разсматривать, какъ результатъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

и

$$\frac{kz}{c}\sqrt{b^2+c^2} + \frac{kx}{a}\sqrt{b^2-a^2} = x^2+y^2+z^2-b^2.$$

Линія пересѣченія поверхностей, выражаемыхъ этими уравненіями, должна, слѣдовательно, находиться на гиперболоидѣ.

Но изъ послѣднихъ двухъ уравненій первое выражаетъ плоскость, а второе сферу (см. стр. 424) и потому линія ихъ пересѣченія есть кругъ.

Такъ какъ это справедливо при всякомъ значеніи постояннаго k, то заключаемъ, что уравненіе (16) при неопредѣленномъ k представляетъ систему параллельныхъ плоскостей, пересѣкающихъ гиперболоидъ по кругамъ.

Уравненіе (15) можетъ быть разсматриваемо также, какъ результатъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} + \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2} = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и

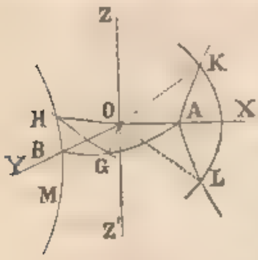
$$\frac{lz}{c}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{lx}{a}\sqrt{b^2-a^2} = x^2+y^2+z^2-b^2,$$

которыя также выражаютъ плоскость и сферу. Слѣдовательно, первое изъ нихъ при неопредѣленномъ l представляетъ тоже систему плоскостей, пересѣкающихъ гиперболоидъ по кругамъ.

Итакъ, для однополаго гиперболоида существуютъ двѣ системы плоскостей круговыхъ сѣченій, выражающіяся уравненіями (16) и (17). Всѣ эти плоскости параллельны оси OY, т. е. большой оси горлового эллипса.

590. Въ существованіи только двухъ найденныхъ системъ круговыхъ сѣченій можно удостовѣриться изъ слѣдующаго геометрическаго анализа.

Если положимъ, что OB (фиг. 113) есть половина большой оси горлового эллипса, такъ что $OB > OA$, и вообразимъ, что какая-нибудь діаметральная плоскость, не проходящая черезъ эту ось, пересѣкается съ главными плоскостями XOY и YOZ по прямымъ OG и OH, а съ гиперболоидомъ по кривой GH, то будемъ имѣть $OG < OH$, ибо OB есть наибольшій изъ полудіаметровъ эллипса AGB и наименьшій изъ полудіаметровъ гиперболы HBM. Отсюда заключаемъ, что кривая GH не можетъ быть кругомъ и что, слѣдовательно, діаметральная плоскость, дающая въ сѣченіи кругъ, должна проходить черезъ ось OY.



Фиг. 113.

Прямая линія, по которой всякая такая плоскость пересѣкается съ плоскостью XOZ, будетъ діаметромъ линіи пересѣченія и, для того, чтобы эта линія была кругъ, этотъ діаметръ долженъ быть дѣйствительнымъ діаметромъ гиперболы KAL, по которой гиперболоидъ пересѣкается плоскостью XOZ, и притомъ равнымъ діаметру OB.

Слѣдовательно, діаметральныя плоскости круговыхъ сѣченій должны проходить черезъ точки K и L, въ которыхъ гипербола KAL пересѣкается съ кругомъ, описаннымъ изъ ея центра радіусомъ, равнымъ b.

Обозначая черезъ φ уголъ прямой OK съ осью OX, будемъ имѣть для координатъ точекъ K и L слѣдующія значенія:

$$x = b\cos\varphi\,, \quad y = 0\,, \quad z = \pm b\sin\varphi\,.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію гиперболоида (2), то получимъ

$$\frac{b^2\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{b^2\sin^2\varphi}{c^2} = 1\,,$$

откуда

$$\sin\varphi = \pm\frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}\,, \quad \cos\varphi = \pm\frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{b^2 + c^2}}\,.$$

Эти же выраженія можно было бы получить изъ уравненій (16) и (17).

591. Такъ какъ линіи пересѣченія гиперболоида и его ассимптотическаго конуса одною и тою же плоскостью суть подобныя, то заключаемъ, что и конусъ (8) пересѣкается плоскостями (16) и (17) по кругамъ. Но уравненіемъ (8) выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 451),

всякій конусъ второго порядка. Поэтому заключаемъ, что всякій такой конусъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ имѣющій управляющею кругъ, т. е. какъ наклонный конусъ съ круглымъ основаніемъ.

Положимъ, что x_1, y_1, z_1 суть координаты нѣкоторой точки M ассимптотическаго конуса, и пусть l будетъ разстояніе OM этой точки отъ его вершины, а p_1 и p_2 длины перпендикуляровъ изъ этой точки на двѣ діаметральныя плоскости круговыхъ сѣченій. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$l^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$$

и

$$p_1 = \frac{\dfrac{z_1\sqrt{b^2+c^2}}{c} - \dfrac{x_1\sqrt{b^2-a^2}}{a}}{\dfrac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}}, \quad p_2 = \frac{\dfrac{z_1\sqrt{b^2+c^2}}{c} + \dfrac{x_1\sqrt{b^2-a^2}}{a}}{\dfrac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}}.$$

Перемноживши послѣднія два выраженія, получимъ

$$p_1p_2 = \frac{\left[\dfrac{z_1{}^2(b^2+c^2)}{c^2} - \dfrac{x_1{}^2(b^2-a^2)}{a^2}\right]a^2c^2}{b^2(a^2+c^2)}$$

или

$$p_1p_2 = \frac{l^2a^2c^2}{b^2(a^2+c^2)}.$$

Такъ какъ отношенія $\frac{p_1}{l}$ и $\frac{p_2}{l}$ равняются синусамъ угловъ, составляемыхъ прямою OM съ плоскостями круговыхъ сѣченій, то, обозначая эти углы чрезъ δ_1 и δ_2, будемъ имѣть

$$\sin\delta_1 \sin\delta_2 = \frac{a^2c^2}{b^2(a^2+c^2)}.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее общее свойство конусовъ второго порядка.

Произведеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ образующею конуса съ плоскостями круговыхъ сѣченій, есть величина постоянная.

592. Изъ того, что всякая касательная плоскость къ однополому гиперболоиду имѣетъ съ нимъ двѣ общія дѣйствительныя прямыя, слѣдуетъ, что на этой поверхности существуетъ безчисленное множество прямыхъ линій и что, слѣдовательно, она принадлежитъ къ числу линейчатыхъ поверхностей, т. е. такихъ, которыя могутъ быть описы-

ваемы движущеюся прямою (см. стр. 375). На этомъ основаніи прямыя, помѣщающіяся на гиперболоидѣ, называются его *прямолинейными образующими*.

Если уравненіе гиперболоида представимъ въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}, \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

то его можно будетъ разсматривать, какъ результатъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій первой степени:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=k\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}, \quad \dots\dots\dots\dots (19)$$

гдѣ k есть неопредѣленный параметръ.

Совокупность послѣднихъ уравненій при всякомъ k представляетъ прямую, и такъ какъ всѣ значенія x, y, z, имъ удовлетворяющія, должны удовлетворять и уравненію (18), то эта прямая лежитъ на гиперболоидѣ. Слѣдовательно, при неопредѣленномъ k уравненія (19) выражаютъ цѣлую систему прямолинейныхъ образующихъ гиперболоида.

Но уравненіе (18) можно также разсматривать, какъ результатъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=l\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$l\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

которыя, при неопредѣленномъ значеніи параметра l, представляютъ другую систему прямолинейныхъ образующихъ гиперболоида.

593. Въ существованіи для всякаго однополаго гиперболоида двухъ различныхъ системъ прямолинейныхъ образующихъ можно убѣдиться еще слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую-нибудь прямую въ пространствѣ, и пусть уравненія ея будутъ

$$x=mz+u, \quad y=nz+v \quad \dots\dots\dots\dots (20)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій и уравненія гиперболоида (2) перемѣнныя x и y, получимъ

$$\frac{(mz+u)^2}{a^2}+\frac{(nz+v)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

или

$$\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{mu}{a^2}+\frac{nv}{b^2}\right)z+\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Величины z, опредѣляемыя отсюда, суть координаты точекъ пересѣченія гиперболоида съ прямою (20). Если эта прямая лежитъ всѣми своими точками на гиперболоидѣ, то послѣднее уравненіе должно удовлетворяться при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ z, а это будетъ только тогда, когда всѣ коэффиціенты послѣдняго уравненія равняются нулю.

Такимъ образомъ видимъ, что необходимыми и достаточными условіями, при которыхъ прямая (20) есть прямолинейная образующая гиперболоида (2), служатъ равенства

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}\\&\frac{mu}{a^2}+\frac{nv}{b^2}=0\\&\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Этими условіями устанавливается зависимость между четырьмя параметрами m, n, u и v прямой, и такъ какъ ихъ только три, то одинъ изъ этихъ параметровъ совершенно произволенъ. Это и доказываетъ существованіе безчисленнаго множества прямолинейныхъ образующихъ.

594. Въ уравненіяхъ прямой (20) величины u и v означаютъ координаты x и y точки пересѣченія этой прямой съ плоскостью XOY. Такъ какъ послѣднее изъ условій (21) представляетъ результатъ подстановки этихъ координатъ въ уравненіе горлового эллипса, то оно выражаетъ лишь то, что всѣ прямолинейныя образующія гиперболоида пересѣкаютъ плоскость XOY въ точкахъ горлового эллипса, обстоятельство геометрически очевидное.

Прямая линія, проходящая черезъ начало координатъ и параллельная прямой (20), выражается уравненіями

$$x=mz,\qquad y=nz.$$

Такъ какъ результатъ исключенія m и n изъ этихъ уравненій и перваго изъ равенствъ (21) есть уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

представляющее ассимптотическій конусъ, то заключаемъ, что послѣдняя прямая есть образующая этого конуса.

Первое изъ условій (21) означаетъ, слѣдовательно, что всѣ прямолинейныя образующія гиперболоида параллельны образующимъ его ассимптотическаго конуса.

595. Второе изъ равенствъ (21) можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{m}{a} : \frac{v}{b} = -\frac{n}{b} : \frac{u}{a},$$

отвуда находимъ

$$\frac{m^2}{a^2} : \frac{v^2}{b^2} = \frac{n^2}{b^2} : \frac{u^2}{a^2} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) : \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right).$$

Вслѣдствіе перваго и третьяго изъ условій (21) послѣднее отношеніе равняется $\frac{1}{c^2}$, и потому будемъ имѣть

$$\frac{bm}{av} = -\frac{an}{bu} = \pm\frac{1}{c}.$$

Слѣдовательно,

$$m = \pm\frac{av}{bc} \quad \text{и} \quad n = \mp\frac{bu}{ac},$$

причемъ верхнему знаку одного выраженія соотвѣтствуетъ верхній же знакъ другого и нижнему нижній.

Такимъ образомъ видимъ, что прямолинейныя образующія однополаго гиперболоида должны быть раздѣляемы на двѣ системы, изъ которыхъ одна выражается уравненіями

$$x = +\frac{av}{bc}z + u, \qquad y = -\frac{bu}{ac}z + v, \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

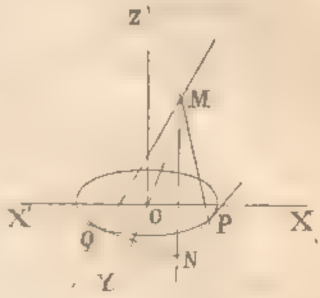
а другая уравненіями

$$x = -\frac{av}{bc}z + u, \qquad y = +\frac{bu}{ac}z + v. \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Здѣсь u и v суть неопредѣленныя величины, связанныя между собою условіемъ удовлетворять уравненію горловаго эллипса.

При всякомъ частномъ значеніи этихъ величинъ уравненія (22) и (23) представляютъ двѣ опредѣленныя различныя между собою прямыя. Отсюда заключаемъ, что чрезъ всякую точку горловаго эллипса проходитъ одна прямолинейная образующая каждой системы.

596. Возьмемъ двѣ какія-нибудь прямолинейныя образующія, принадлежащія разнымъ системамъ, и пусть P и Q (фиг. 114) будутъ точки горлового эллипса, черезъ которыя онѣ проходятъ. Если положимъ, что координаты этихъ точекъ суть $x=u_1$, $y=v_1$ и $x=u_2$, $y=v_2$, то уравненія разсматриваемыхъ образующихъ будутъ



Фиг. 114.

$$\left.\begin{array}{l} x=+\dfrac{av_1}{bc}z+u_1, \quad y=-\dfrac{bu_1}{ac}z+v_1 \\[2ex] x=-\dfrac{av_2}{bc}z+u_2, \quad y=+\dfrac{bu_2}{ac}z-v_2 \end{array}\right\} \ldots (24)$$

Исключивъ изъ нихъ x и y, получимъ

$$u_2-u_1=\frac{a}{bc}(v_2+v_1)z, \qquad v_1-v_2=\frac{b}{ac}(u_1+u_2)z,$$

откуда, по исключеніи z, найдемъ

$$\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}=\frac{a^2(v_2+v_1)}{b^2(u_1+u_2)}.$$

Имѣя въ виду, что координаты точекъ P и Q удовлетворяютъ уравненію горлового эллипса, легко видѣть, что послѣднее равенство тождественно.

Это доказываетъ, что *всякія двѣ прямолинейныя образующія, принадлежащія разнымъ системамъ, пересѣкаются между собою.*

Если возьмемъ двѣ прямолинейныя образующія, проходящія черезъ точки P и Q и принадлежащія одной и той же системѣ, напр. первой, то уравненія ихъ будутъ

$$x=+\frac{av_1}{bc}z+u_1, \quad y=-\frac{bu_1}{ac}z+v_1$$

и

$$x=+\frac{av_2}{bc}z+u_2, \quad y=-\frac{bu_2}{ac}z+v_2.$$

Исключивъ изъ нихъ x, y и z, получимъ

$$\frac{(u_2-u_1)^2}{a^2}+\frac{(v_2-v_1)^2}{b^2}=0,$$

что возможно только при совпаденіи обѣихъ прямыхъ.

Слѣдовательно, *прямолинейныя образующія гиперболоида, принадлежащія одной и той же системѣ, не пересѣкаются.*

597. Чтобы получить уравненіе проекціи прямолинейной образующей на плоскость XOY, нужно, какъ извѣстно, исключить изъ ея уравненій перемѣнную z.

Умножая для этого первое изъ уравненій (22) на $\frac{u}{a^2}$, а второе на $\frac{v}{b^2}$ и складывая результаты, получимъ

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}$$

или

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1.$$

Это есть уравненіе касательной къ горловому эллипсу въ точкѣ (u, v). То же самое мы получили бы, исключая z изъ уравненій (23).

Итакъ, проекція всякой прямолинейной образующей гиперболоида на плоскость XOY есть касательная къ горловому эллипсу въ точкѣ пересѣченія его съ этой образующей.

Основываясь на этомъ свойствѣ, легко найти построеніемъ прямолинейныя образующія, проходящія черезъ какую-нибудь точку M (фиг. 114), данную на гиперболоидѣ. Для этого нужно только опустить изъ точки M перпендикуляръ на плоскость XOY и чрезъ его основаніе N провести касательныя къ горловому эллипсу. Прямыя, соединяющія точки прикосновенія P и Q съ данною точкою M, имѣя эти касательныя своими проекціями, будутъ образующія гиперболоида.

Такъ какъ горловой эллипсъ есть наименьшій изъ эллипсовъ, получаемыхъ въ сѣченіи гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости XOY, то проекція N всякой точки, лежащей на гиперболоидѣ, должна находиться внѣ горлового эллипса. Вслѣдствіе этого касательныя NP и NQ, а съ тѣмъ вмѣстѣ и искомыя образующія, суть всегда дѣйствительныя.

Итакъ, *черезъ всякую точку однополаго гиперболоида проходятъ двѣ прямолинейныя образующія этой поверхности.*

598. Если двѣ прямолинейныя образующія разныхъ системъ, выражаемыя уравненіями (24), параллельны между собою, то должно быть

$$+\frac{av_1}{bc}=-\frac{av_2}{bc} \quad \text{и} \quad -\frac{bu_1}{ac}=+\frac{bu_2}{ac}$$

или

$$v_2=-v_1 \quad \text{и} \quad u_2=-u_1.$$

Это показываетъ, что такія двѣ образующія пересѣкаютъ горловой эллипсъ въ двухъ діаметрально противоположныхъ точкахъ и, слѣдовательно, лежатъ въ одной діаметральной плоскости.

Что же касается прямолинейныхъ образующихъ одной и той же системы, то очевидно, что между ними не можетъ быть параллельныхъ, такъ какъ условіе параллельности такихъ образующихъ приводится къ

$$v_2 = v_1 \qquad \text{и} \qquad u_2 = u_1 ,$$

что означаетъ совпаденіе ихъ.

Легко видѣть также, что между прямолинейными образующими одной и той-же системы не можетъ быть болѣе двухъ параллельныхъ одной и той же плоскости, ибо въ противномъ случаѣ въ числѣ образующихъ ассимптотическаго конуса было бы болѣе двухъ, лежащихъ въ одной плоскости.

599. Если двѣ прямолинейныя образующія разныхъ системъ, выражаемыя уравненіями (24), перпендикулярны между собою, то должно быть

$$\frac{a^2 v_1 v_2}{b^2 c^2} + \frac{b^2 u_1 u_2}{a^2 c^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Положимъ, что въ уравненіяхъ (24) величины x, y, z суть координаты общей точки такихъ образующихъ Изъ уравненій первой образующей будемъ имѣть

$$(x - u_1)^2 = \frac{a^2 v_1^2}{b^2 c^2} z^2 \qquad \text{и} \qquad (y - v_1)^2 = \frac{b^2 u_1^2}{a^2 c^2} z^2$$

или

$$(x - u_1)^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(1 - \frac{u_1^2}{a^2}\right) z^2 \qquad \text{и} \qquad (y - v_1)^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(1 - \frac{v_1^2}{b^2}\right) z^2.$$

Такъ какъ тѣ же самыя соотношенія получимъ для величинъ u_2 и v_2 изъ уравненій второй образующей (24), то заключаемъ, что u_1 и u_2 суть корни слѣдующаго квадратнаго уравненія

$$(c^2 + z^2)u^2 - 2c^2 xu + (c^2 x^2 - a^2 z^2) = 0,$$

а v_1 и v_2 слѣдующаго

$$(c^2 + z^2)v^2 - 2c^2 yv + (c^2 y^2 - b^2 z^2) = 0.$$

Отсюда видимъ, что

$$u_1 u_2 = \frac{c^2 x^2 - a^2 z^2}{c^2 + z^2} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{a^2 c^2}{c^2 + z^2} = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{a^2 c^2}{c^2 + z^2}$$

*

и

$$r_1 r_2 = \frac{c^2y^2 - b^2z^2}{c^2+z^2} = \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{b^2c^2}{c^2+z^2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{b^2c^2}{c^2+z^2}$$

Подставивъ эти выраженія въ условіе перпендикулярности (25), будемъ имѣть

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{a^2}{c^2+z^2} + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{b^2}{c^2+z^2} = 1,$$

откуда раскрывъ скобки и уничтоживъ знаменателя, получимъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Это показываетъ, что точки пересѣченія перпендикулярныхъ между собою образующихъ однополаго гиперболоида (2) находятся на кривой, по которой эта поверхность пересѣкается концентрическою съ нею сферою, радіусъ которой равняется

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

Слѣдовательно, однополый гиперболоидъ (2) только тогда имѣетъ перпендикулярныя прямолинейныя образующія, когда въ его уравненіи c не болѣе, нежели большая изъ величинъ a и b. То же самое относится, очевидно, и къ конусу (8).

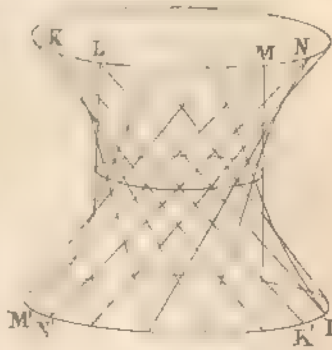
Вслѣдствіе подобія линій пересѣченія поверхностей второго порядка параллельными плоскостями, всѣ плоскости, параллельныя двумъ взаимно перпендикулярнымъ образующимъ гиперболоида, пересѣкаютъ какъ эту поверхность, такъ и ея ассимптотическій конусъ по равностороннимъ гиперболамъ.

600. Плоскость, проведенная произвольно черезъ какую-нибудь прямолинейную образующую однополаго гиперболоида, имѣя съ этой поверхностью одну общую прямую, должна совмѣщать въ себѣ другую прямую, принадлежащую также поверхности. Послѣдняя прямая есть, очевидно, образующая другой системы, а плоскость касательная къ поверхности.

Итакъ, всѣ плоскости, проходящія черезъ одну и ту же образующую однополаго гиперболоида, суть касательныя къ нему въ различныхъ точкахъ пересѣченія этой образующей съ образующими другой системы.

Изъ сказаннаго видно, что всѣ прямолинейныя образующія однополаго гиперболоида покрываютъ эту поверхность на подобіе ткани, составленной изъ двухъ системъ нитей (фиг. 115). Всѣ нити одной системы KK', LL'... не встрѣчаются между собою, но каждая изъ нихъ встрѣчается со всѣми нитями MM', NN'... другой системы.

На этомъ основывается построеніе модели однополаго гиперболоида, устраиваемой изъ нитей, которыя натягиваются надлежащимъ образомъ между точками двухъ равныхъ эллипсовъ KLM и $M'N'K'$, находящихся на параллельныхъ плоскостяхъ и служащихъ ортогональными проекціями одинъ другому.



Фиг. 115.

601. Выше было показано (см. стр. 379 и 380), что геометрическое мѣсто системы прямыхъ, пересѣкающихъ одновременно три данныя прямыя, есть поверхность второго порядка, которую можно поэтому разсматривать, какъ описываемую прямою, скользящею по тремъ даннымъ прямымъ. Однополый гиперболоидъ принадлежитъ, очевидно, къ числу поверхностей, образуемыхъ такимъ образомъ, при чемъ направляющими это движеніе прямыми служатъ три какія-нибудь образующія одной и той же системы, а движущаяся прямая принимаетъ положеніе всѣхъ образующихъ другой системы.

Отсюда видимъ, что однополый гиперболоидъ опредѣляется вполнѣ тремя данными образующими одной и той же системы, что представляетъ частный случай опредѣленія поверхности второго порядка девятью ея точками (см. стр. 385), когда эти точки расположены по три на трехъ прямыхъ [1]).

§ 3. Двуполый гиперболоидъ.

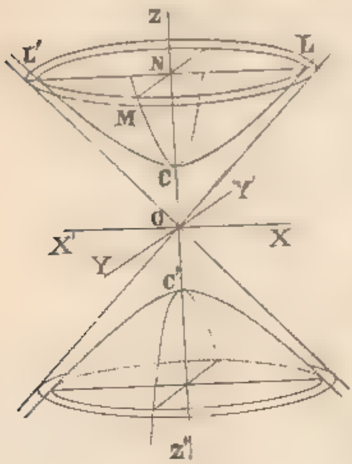
602. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію послѣдней изъ центральныхъ поверхностей, гиперболоида, выражаемаго уравненіемъ (см. стр. 451)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Полагая въ этомъ уравненіи $x=0$, $y=0$, получимъ $z=\pm c$. Слѣдовательно, поверхность пересѣкается осью OZ въ двухъ точкахъ C и C' (фиг. 116), отстоящихъ отъ начала координатъ на разстояніе c. Если же положимъ $y=0$, $z=0$ или $x=0$, $z=0$, то получимъ для третьей координаты мнимое значеніе. Это показываетъ, что оси OX и OY

[1]) Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что три данныя прямыя не должны быть параллельны одной и той же плоскости. Въ противномъ случаѣ, какъ увидимъ ниже (см. стр. 501), образуемая поверхность принадлежитъ къ числу не имѣющихъ центра.

не пересѣкаютъ поверхности. Послѣдняя имѣетъ, слѣдовательно, одну дѣйствительную ось и двѣ мнимыя. Точки C и C' суть ея вершины.



Фиг. 116.

Уравненія главныхъ сѣченій поверхности получимъ, полагая послѣдовательно $z=0$, $y=0$, $x=0$. Эти уравненія будутъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1\,,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\,,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Изъ нихъ два послѣднія представляютъ на плоскостяхъ XOZ и YOZ двѣ гиперболы, имѣющія общія вершины въ точкахъ C и C'; первое же не удовлетворяется вовсе дѣйствительными координатами x и y и потому не имѣетъ дѣйствительнаго геометрическаго значенія. Слѣдовательно, плоскость XOY не пересѣкаетъ поверхности.

603. Если положимъ въ уравненіи (1) $z=h$, то будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2-c^2}{c^2}$$

или

$$\frac{c^2x^2}{a^2(h^2-c^2)}+\frac{c^2y^2}{b^2(h^2-c^2)}=1\,.$$

Это есть уравненіе проекціи на плоскость XOY линіи пересѣченія поверхности (1) съ плоскостью, параллельною плоскости XOY и отстоящею отъ начала координатъ на разстояніе h. Проекція эта тождественна съ самой линіей пересѣченія.

Полагая

$$\frac{a\sqrt{h^2-c^2}}{c}=a' \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{h^2-c^2}}{c}=b'\,,$$

дадимъ послѣднему уравненію видъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1\,.$$

Отсюда слѣдуетъ, что плоскостями, параллельными плоскости XOY, поверхность пересѣкается по эллипсамъ. Но такъ какъ выраженія для a' и b' принимаютъ дѣйствительныя значенія только при $h^2>c^2$, а при $h=\pm c$ они обращаются въ нуль, то заключаемъ, что дѣйствительнаго пересѣченія вовсе не будетъ, если сѣкущая плоскость встрѣ-

чаетъ дѣйствительную ось OZ между вершинами C и C'. Тѣ же плоскости, которыя проходятъ черезъ эти точки, суть касательныя въ нихъ къ поверхности.

Въ пространствѣ, заключающемся между этими послѣдними плоскостями, не будетъ, слѣдовательно, находиться ни одной точки поверхности.

604. Такимъ образомъ видимъ, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей или полостей, простирающихся въ безконечность. Поэтому она называется *двуполымъ гиперболоидомъ*. Каждая изъ ея полостей можетъ быть разсматриваема, какъ описываемая перемѣннымъ эллипсомъ LML' (фиг. 116), плоскость котораго остается перпендикулярною къ дѣйствительной оси поверхности, а вершины перемѣщаются по двумъ гиперболамъ, представляющимъ ея главныя сѣченія.

Если въ уравненіи (2) постоянныя a и b равны между собою, то всѣ сѣченія поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, будутъ круги. Въ этомъ случаѣ поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ описываемая постоянною гиперболою, вращающеюся около ея дѣйствительной оси, и потому называется *двуполымъ гиперболоидомъ вращенія*.

605. Представляя уравненія какого-нибудь діаметра гиперболоида (1) въ видѣ

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\varrho\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

получимъ для опредѣленія величины ϱ, соотвѣтствующей концамъ этого діаметра, соотношеніе

$$\varrho^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}\right)=-1$$

Слѣдовательно,

$$\varrho=\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{p^2}{c^2}-\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}}}\,.$$

Отсюда видимъ, что діаметры (2), для которыхъ угловые параметры m, n, p удовлетворяютъ условію

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}<0\,,$$

пересѣкаютъ поверхность. Напротивъ, тѣ діаметры, для которыхъ

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}>0\,,$$

не имѣютъ съ ней общихъ точекъ и потому называются мнимыми. Къ числу послѣднихъ принадлежатъ и двѣ мнимыя оси OX и OY.

Если же имѣемъ

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}=0,$$

то координаты концовъ діаметра (2) будутъ безконечно большія.

Исключая m, n и p изъ этого послѣдняго условія и уравненій (2), получимъ уравненіе геометрическаго мѣста безконечно большихъ діаметровъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Это уравненіе выражаетъ конусъ, который можетъ быть разсматриваемъ, какъ описанный около поверхности, ибо образующія его суть касательныя къ поверхности въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Онъ называется *ассимптотическимъ конусомъ*. Легко убѣдиться такъ же, какъ было показано для однополаго гиперболоида (см. стр. 454), что точки поверхности безпредѣльно приближаются къ точкамъ этого конуса по мѣрѣ удаленія ихъ въ безконечность.

606. Два гиперболоида однополый и двуполый, выражаемые уравненіями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

въ которыхъ a, b, c имѣютъ одинаковыя значенія, называются *сопряженными*. Изъ предыдущаго видимъ, что такіе гиперболоиды имѣютъ общій ассимптотическій конусъ (3) и, притомъ, всѣ мнимые діаметры одного суть дѣйствительные другого и обратно.

Какая-нибудь плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

пересѣкаетъ двуполый гиперболоидъ (1) по линіи второго порядка, проекція которой на плоскость XOY выражается уравненіемъ

$$\frac{C^2x^2}{a^2}+\frac{C^2y^2}{b^2}-\frac{(Ax+By+D)^2}{c^2}+C^2=0$$

или

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+Ey+F'=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

гдѣ коэффиціенты A', B', ... F' имѣютъ слѣдующія значенія:

$$A' = \frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}, \quad B' = -\frac{2AB}{c^2}, \quad C' = \frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2},$$

$$D' = -\frac{2AD}{c^2}, \quad E' = -\frac{2BD}{c^2}, \quad F' = \frac{C^2c^2 - D^2}{c^2}.$$

Сравнивая эти коэффиценты съ коэффицентами уравненія, имѣющаго такое же значеніе для однополаго гиперболоида (см. стр. 457), замѣчаемъ, что различіе состоитъ только въ значеніяхъ постояннаго члена F'. Это позволяетъ заключить, что *два сопряженные гиперболоида пересѣкаются одною и тою же плоскостью по линіямъ подобнымъ, подобно расположеннымъ и концентрическимъ*.

Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что двуполый гиперболоидъ, подобно другимъ центральнымъ поверхностямъ второго порядка, имѣетъ круговыя сѣченія и что системы плоскостей круговыхъ сѣченій для него тѣ же самыя, какъ и для сопряженнаго съ нимъ однополаго гиперболоида. Это суть плоскости, выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2} = k \\ \text{и} \qquad \frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2} + \frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2} = l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ k и l постоянныя неопредѣленныя (см. стр. 459).

Очевидно геометрически, что между плоскостями, пересѣкающими однополый гиперболоидъ по эллипсамъ, существуютъ такія, которыя вовсе не пересѣкаютъ двуполаго гиперболоида. Таковы напр. плоскости, перпендикулярныя къ дѣйствительной оси двуполаго гиперболоида и пересѣкающія эту ось между вершинами C и C'.

507. Плоскость (4) будетъ касательною, когда коэффиценты уравненія (5) удовлетворяютъ условію (см. стр. 457)

$$(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2) - (B'^2 - 4A'C')F' = 0.$$

При указанныхъ выше значеніяхъ этихъ коэффиціентовъ оно обращается въ

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2 = 0$$

и двучленъ $B'^2 - 4A'C'$ будетъ имѣть отрицательное значеніе

$$-4\frac{C^2D^2}{a^2b^2c^2}.$$

Это показываетъ, что *всякая касательная плоскость къ двуполому гиперболоиду имѣетъ съ этою поверхностью только одну общую точку*.

Слѣдовательно, двуполый гиперболоидъ не имѣетъ прямолинейныхъ образующихъ, ибо въ противномъ случаѣ существовали бы касательныя плоскости, имѣющія съ гиперболоидомъ общія прямыя (см. стр. 468).

Координаты точки прикосновенія плоскости (4), какъ удовлетворяющія одновременно ея уравненію и уравненію гиперболоида (1), будутъ, очевидно,

$$x_1 = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y_1 = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z_1 = -\frac{Cc^2}{D}.$$

Отсюда находимъ

$$A = \frac{Dx_1}{a^2}, \qquad B = \frac{Dy_1}{b^2}, \qquad C = -\frac{Dz_1}{c^2},$$

вслѣдствіе чего уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = -1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Это есть уравненіе касательной плоскости къ двуполому гиперболоиду въ данной на немъ точкѣ. Оно же выражаетъ полярную плоскость точки (x_1, y_1, z_1) относительно двуполаго гиперболоида въ томъ случаѣ, когда эта точка дана какъ-нибудь въ пространствѣ.

Уравненія нормали къ двуполому гиперболоиду въ точкѣ, данной на этой поверхности, будутъ, очевидно,

$$\frac{a^2(x - x_1)}{x_1} = \frac{b^2(y - y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z - z_1)}{-z_1}.$$

608. Легко видѣть, что къ двуполому гиперболоиду могутъ быть проведены касательныя плоскости, имѣющія направленіе плоскостей круговыхъ сѣченій. Это слѣдуетъ изъ того, что въ уравненіяхъ (6) неопредѣленнымъ постояннымъ k и l могутъ быть даны такія дѣйствительныя значенія, при которыхъ они выражаютъ касательныя плоскости. Если положимъ, напр., что это справедливо для перваго изъ уравненій (6), то изъ сравненія его съ уравненіемъ касательной плоскости (7) будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{z_1}{c\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{1}{k}$$

и

$$y_1 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{k}, \qquad z_1 = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{k}.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію гиперболоида (1), то получимъ

$$\frac{b^2-a^2}{k^2}-\frac{b^2+c^2}{k^2}=-1,$$

откуда

$$k=\pm\sqrt{a^2+c^2}.$$

Къ подобному же результату придемъ, отождествляя значеніе второго изъ уравненій (6) съ значеніемъ уравненія (7).

Для координатъ x_1, y_1, z_1 получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующую систему значеній

$$x_1=\pm\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad y_1=0,\quad z_1=\pm\frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Это суть координаты точекъ округленія (см. стр. 446).

609. Чтобы уравненію касательной плоскости (7) дать видъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p,$$

гдѣ p означаетъ длину перпендикуляра изъ центра на эту плоскость, а α, β, γ углы, составляемые имъ съ осями гиперболоида, нужно положить

$$\frac{a^2\cos\alpha}{x_1}=\frac{b^2\cos\beta}{y_1}=\frac{c^2\cos\gamma}{-z_1}=-p.$$

Слѣдовательно,

$$a\cos\alpha=-\frac{px_1}{a},\quad b\cos\beta=-\frac{py_1}{b},\quad c\cos\gamma=+\frac{pz_1}{c},$$

откуда

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma=p^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)=-p^2,$$

и потому уравненіе касательной плоскости, перпендикулярной къ данной прямой, будетъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\sqrt{c^2\cos^2\gamma-a^2\cos^2\alpha-b^2\cos^2\beta}\quad\ldots\ldots(8)$$

Сравнивши это уравненіе съ подобнымъ же уравненіемъ касательной плоскости къ однополому гиперболоиду (см. стр. 458), легко видѣть, что, при одинаковыхъ значеніяхъ угловъ α, β, γ, одно уравненіе выражаетъ дѣйствительную плоскость, а другое мнимую. Это показываетъ,

что къ двумъ сопряженнымъ гиперболоидамъ въ одномъ и томъ же направленіи касательныхъ плоскостей провести нельзя.

Изъ уравненія касательной плоскости въ видѣ (8) выводятся для двуполаго гиперболоида такъ же, какъ и для другихъ центральныхъ поверхностей слѣдующія два предложенія:

1) *Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, имѣетъ величину постоянную.*

2) *Геометрическое мѣсто вершины прямого трехграннаго угла, грани котораго касаются гиперболоида, есть сфера концентрическая съ гиперболоидомъ* [1].

610. Положимъ, что x_1, y_1, z_1 суть координаты какой-нибудь точки M_1 даннаго двуполаго гиперболоида (1). Уравненіе касательной плоскости въ этой точкѣ будетъ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=-1,$$

а уравненіе діаметральной плоскости, параллельной съ этою касательной, будетъ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Обѣ эти плоскости должны пересѣкать однополый гиперболоидъ, сопряженный съ даннымъ двуполымъ, по эллипсу (см. стр. 400 и 473).

Извѣстно, что всякая діаметральная плоскость, проходящая черезъ діаметръ OM_1, есть сопряженная съ плоскостью (9) (см. стр. 418). Поэтому, взявши на послѣдней двѣ точки M_2 и M_3, служащія концами двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса, получаемаго въ сѣченіи однополаго гиперболоида, будемъ имѣть, что три діаметра OM_1, OM_2, OM_3 представляютъ систему сопряженныхъ діаметровъ по отношенію къ обоимъ сопряженнымъ гиперболоидамъ.

Вслѣдствіе того, что точка M_1 взята на данномъ двуполомъ гиперболоидѣ произвольно, можно заключить, что всѣ системы сопряженныхъ діаметровъ для двухъ сопряженныхъ гиперболоидовъ однѣ и тѣ же. При этомъ одинъ изъ діаметровъ всякой такой системы есть дѣйствительный для двуполаго гиперболоида, а два другіе для однополаго.

---

[1] Изъ этихъ двухъ свойствъ, общихъ всѣмъ центральнымъ поверхностямъ второго порядка, одно есть слѣдствіе другого, ибо перпендикуляры изъ центра поверхности на три грани прямого трехграннаго угла, образуемаго касательными плоскостями, суть ребра прямого параллелепипеда, для котораго прямая, соединяющая вершину этого угла съ центромъ, есть діагональ.

Обозначая координаты точекъ M_2 и M_3 чрезъ x_2, y_2, z_2 и x_3, y_3, z_3 и замѣчая, что эти точки лежатъ въ плоскости (9), будемъ имѣть

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}-\frac{z_1z_2}{c^2}=0,\quad \frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b^2}-\frac{z_1z_3}{c^2}=0\ \ldots \quad (10)$$

Такъ какъ, далѣе, точка M_3 должна лежать въ діаметральной плоскости, параллельной съ касательною плоскостью къ однополому гиперболоиду въ точкѣ M_2, то должно быть

$$\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}-\frac{z_2z_3}{c^2}=0\ \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Если положимъ, что углы, составляемые діаметрами OM_1, OM_2, OM_3 съ осями гиперболоидовъ, суть послѣдовательно $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, то будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_1}{\cos\gamma_1},\qquad \frac{x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z_2}{\cos\gamma_2},$$

$$\frac{x_3}{\cos\alpha_3}=\frac{y_3}{\cos\beta_3}=\frac{z_3}{\cos\gamma_3},$$

вслѣдствіе чего изъ предыдущихъ равенствъ получимъ

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{b^2}-\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{c^2}=0,$$

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos\beta_1\cos\beta_3}{b^2}-\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{c^2}=0,$$

$$\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos\beta_2\cos\beta_3}{b^2}-\frac{\cos\gamma_2\cos\gamma_3}{c^2}=0,$$

равенства, представляющія зависимость между направленіями трехъ сопряженныхъ діаметровъ гиперболоидовъ.

611. Изъ трехъ точекъ M_1, M_2, M_3, представляющихъ концы сопряженныхъ діаметровъ, первая принадлежитъ, какъ предположено выше, данному двуполому гиперболоиду, а двѣ остальныя однополому. Вслѣдствіе этого должно быть

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}=1,\qquad \frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1.$$

Изъ этихъ равенствъ и равенствъ (10) и (11) можно вывести соотношенія между величинами сопряженныхъ діаметровъ посредствомъ та-

нихъ же точно преобразованій, какія были сдѣланы надъ подобными же равенствами для эллипсоида (см. стр. 447 и слѣд.). Но тѣ же самыя соотношенія могутъ быть обнаружены еще слѣдующими соображеніями, состоящими въ примѣненіи теоремъ Аполлонія (см. стр. 193 и 221) къ сѣченіямъ гиперболоидовъ діаметральными плоскостями.

Обозначимъ черезъ a', b', c' длины трехъ сопряженныхъ полудіаметровъ OM_3, OM_2, OM_1. Изъ нихъ два первые суть сопряженные полудіаметры эллипса, по которому плоскость M_2OM_3 пересѣкаетъ однополый гиперболоидъ. Если назовемъ черезъ a'' и b'' два другіе сопряженные полудіаметра эллипса, изъ которыхъ первый лежитъ въ плоскости XOZ, то, въ силу одной изъ теоремъ Аполлонія, будемъ имѣть

$$a'^2+b'^2-c'^2=a''^2+b''^2-c'^2,$$

при чемъ a'', b'' и c' представляютъ также систему трехъ сопряженныхъ полудіаметровъ.

Плоскость, проходящая черезъ діаметры b'' и c', пересѣкаетъ гиперболоиды по гиперболамъ, для которыхъ эти діаметры суть тоже сопряженные. Обозначая черезъ b''' и c''' два другіе сопряженные полудіаметра тѣхъ же гиперболъ, будемъ имѣть, въ силу теоремы Аполлонія,

$$a''^2+b''^2-c'^2=a''^2+b'''^2-c'''^2$$

и если допустимъ, что діаметръ c''', такъ же какъ и a'', лежитъ въ плоскости XOZ, то діаметръ b''' будетъ совпадать съ осью OY и, слѣдовательно, должно быть $b'''=b$.

Такимъ образомъ получимъ

$$a'^2+b'^2-c'^2=a''^2+b^2-c'''^2.$$

Замѣчая, наконецъ, что a'' и c''' суть сопряженные полудіаметры гиперболъ, по которымъ гиперболоиды пересѣкаются плоскостью XOZ, будемъ имѣть, по той же теоремѣ Аполлонія,

$$a''^2-c'''^2=a^2-c^2.$$

Слѣдовательно,

$$a'^2+b'^2-c'^2=a^2+b^2-c^2.$$

Итакъ, *алгебраическая сумма* $a'^2+b'^2-c'^2$ *имѣетъ постоянную величину для всѣхъ системъ сопряженныхъ діаметровъ обоихъ гиперболоидовъ.*

612. Такими же разсужденіями легко доказать и другія соотношенія между длинами сопряженныхъ діаметровъ, выведенныя выше для эллипсоидовъ. Такъ, обозначая черезъ $V(a', b', c')$ объемъ параллеле-

пипеда, для котораго полудіаметры a', b', c' служатъ ребрами, будемъ имѣть

$$V(a', b', c') = V(a'', b'', c'),$$

ибо эти два параллелепипеда имѣютъ одну и ту же высоту и равновеликія основанія. По той же причинѣ заключаемъ, что

$$V(a'', b'', c') = V(a'', b, c''') = V(a, b, c),$$

гдѣ a'', b'', c''' имѣютъ тѣ же значенія, какъ и въ предыдущемъ.

Слѣдовательно,

$$V(a', b', c') = V(a, b, c).$$

Итакъ, *объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ гиперболоидовъ, имѣетъ величину постоянную.*

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ПАРАБОЛОИДЫ.

§ 1. Эллиптическій параболоидъ.

613. Мы видѣли выше (см. стр. 401), что надлежащимъ выборомъ системы координатъ уравненіе всякой поверхности второго порядка, имѣющей безконечно удаленный центръ, можетъ быть приведено къ виду

$$Ax^2 + By^2 - 2Jz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При этомъ, если система координатъ прямоугольная, то плоскости XOZ и YOZ суть главныя діаметральныя плоскости поверхности (см. стр. 413).

Ограничимся сперва случаемъ, когда въ уравненіи (1) коэффиціенты A и B имѣютъ одинаковые знаки.

Такъ какъ посредствомъ соотвѣтствующаго выбора положительнаго направленія оси OZ можно третьему члену уравненія (1) придать какой угодно знакъ, то, не лишая общности значеніе этого уравненія, мы можемъ предположить что коэффиціентъ J имѣетъ знакъ, обратный знаку двухъ другихъ коэффиціентовъ.

Полагая въ такомъ случаѣ

$$-\frac{J}{A} = p \quad \text{и} \quad -\frac{J}{B} = q,$$

приведемъ уравненіе (1) къ виду

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ p и q суть величины положительныя.

Займемся изслѣдованіемъ свойствъ поверхности, выражаемой такимъ уравненіемъ.

614. Если положимъ въ уравненіи (2) $z=0$, то будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0.$$

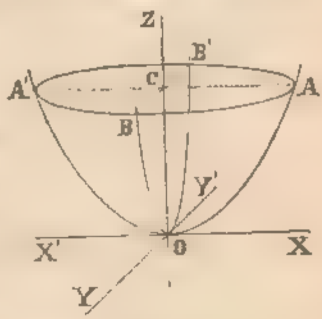
Единственныя дѣйствительныя значенія x и y, удовлетворяющія этому уравненію, суть $x=0$, $y=0$. Слѣдовательно, плоскость XOY есть касательная къ поверхности (2), имѣющая съ нею только одну общую точку, начало координатъ.

Полагая, далѣе, въ уравненіи (2) послѣдовательно $y=0$ и $x=0$, получимъ

$$x^2=2pz \quad \text{и} \quad y^2=2qz \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(3)$$

Отсюда видимъ, что плоскостями XOZ и YOZ поверхность (2) пересѣкается по двумъ параболамъ, имѣющимъ ось OZ общею осью и начало координатъ общею вершиной. Величины p и q суть параметры этихъ параболъ.

Изъ того, что уравненія (3) при дѣйствительныхъ x и y удовлетворяются только положительными значеніями z, слѣдуетъ, что обѣ параболы простираются въ безконечность въ одномъ и томъ же направленіи, именно въ положительномъ направленіи оси OZ.



Фиг. 117.

Параболы AOA' и BOB' (фиг. 117), по которымъ поверхность (2) пересѣкается плоскостями XOZ и YOZ, представляютъ его *главныя сѣченія*; ихъ общая ось называется осью этой поверхности. Начало координатъ есть единственная вершина поверхности.

615. Линія пересѣченія разсматриваемой поверхности какою-нибудь плоскостью, параллельною плоскости XOY, выразится совокупностью уравненія (2) съ уравненіемъ

$$z=h,$$

представляющимъ всякую такую плоскость.

Проекція этой линіи на плоскость XOY, тождественная, очевидно, съ самою линіею пересѣченія, будетъ выражаться уравненіемъ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h$$

или

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1,$$

или, наконецъ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

гдѣ положено

$$a=\sqrt{2ph} \quad \text{и} \quad b=\sqrt{2qh}.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ эллипсъ, дѣйствительный тольк при положительныхъ значеніяхъ h, безпредѣльно увеличивающійся пр возрастаніи h и обращающійся въ точку при $h=0$.

Это показываетъ, что поверхность (2) расположена всѣми точкам выше плоскости XOY, простирается въ безконечность и состоитъ изъ одной сплошной полости, которую можно разсматривать, какъ описываемую перемѣннымъ эллипсомъ $ABA'B'$, плоскость котораго остается параллельною плоскости XOY, а вершины перемѣщаются по двумъ параболамъ AOA' и BOB', находящимся на плоскостяхъ XOZ и YOZ.

На этомъ основаніи поверхность (2) называется *эллиптическимъ параболоидомъ*.

Если въ уравненіи (2) $p=q$, то всѣ линіи пересѣченія поверхности плоскостями, перпендикулярными къ оси OZ, будутъ круги. Въ этомъ случаѣ поверхность называется *параболоидомъ вращенія*, ибо ее можно разсматривать, какъ описываемую постоянной параболой, вращающейся около ея оси.

616. Возьмемъ теперь плоскость, выражаемую общимъ уравненіемъ

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

и будемъ сперва предполагать, что въ этомъ уравненіи коэффиціентъ C не равняется нулю, т. е. что разсматриваемая плоскость не параллельна оси OZ.

Въ такомъ случаѣ, представляя уравненіе проекціи линіи пересѣченія этой плоскости съ параболоидомъ (2) на плоскость XOY въ видѣ

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0, \quad \ldots\ldots (5)$$

будемъ имѣть

$$A'=\frac{C}{p}, \quad B'=0, \quad C'=\frac{C}{q}, \quad D'=2A, \quad E'=2B, \quad F'=2D.$$

Отсюда видимъ, что линія пересѣченія можетъ быть только эллипсомъ, ибо двучленъ

$$B'^2-4A'C'=-4\frac{C^2}{pq}$$

имѣетъ величину отрицательную.

Такъ какъ отношенія между коэффиціентами A', B', C' не зависятъ отъ коэффиціентовъ сѣкущей плоскости (4), то заключаемъ (см. стр. 263), что уравненіе (5), при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ этой плоскости, выражаетъ эллипсы подобные и подобно расположенные. Въ частномъ случаѣ для параболоида вращенія всѣ эти эллипсы суть круги.

Итакъ, *проекціи всѣхъ возможныхъ плоскихъ сѣченій параболоида вращенія на плоскость, перпендикулярную къ его оси, суть круги.*

Условіе, что плоскость (4) касается параболоида, т. е. что уравненіе (5) представляетъ только одну дѣйствительную точку, выражается, какъ извѣстно, равенствомъ

$$(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2) - (B'^2 - 4A'C')F' = 0.$$

Въ настоящемъ случаѣ оно приводится къ слѣдующему

$$A^2p + B^2q - 2CD = 0.$$

При этомъ условіи, какъ уравненіе параболоида, такъ и уравненіе плоскости (4) удовлетворяются слѣдующими значеніями координатъ

$$x = -\frac{Ap}{C}, \quad y = -\frac{Bq}{C}, \quad z = \frac{D}{C}.$$

Это суть, слѣдовательно, координаты точки прикосновенія касательной плоскости. Обозначая ихъ черезъ x_1, y_1, z_1, будемъ имѣть

$$A = -\frac{Cx_1}{p}, \quad B = -\frac{Cy_1}{q}, \quad D = Cz_1.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$\frac{xx_1}{p} + \frac{yy_1}{q} = z + z_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

въ которомъ оно представляетъ касательную плоскость къ параболоиду въ данной на немъ точкѣ.

Уравненія нормали къ эллиптическому параболоиду въ данной на немъ точкѣ, будутъ, слѣдовательно, имѣть видъ

$$\frac{p(x - x_1)}{x_1} = \frac{q(y - y_1)}{y_1} = \frac{z - z_1}{-1}.$$

617. Если въ уравненіи (4) коэффиціентъ C равняется нулю, такъ что эта плоскость будетъ параллельна оси OZ, то линія ея пересѣченія съ параболоидомъ опредѣлится проекціею на одну изъ плоскостей XOZ или YOZ. Такъ, исключая y изъ уравненій (4) и (2), получимъ уравненіе проекціи линіи пересѣченія на плоскость XOZ въ видѣ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{(Ax+D)^2}{B^2q}=2z$$

или

$$\left(\frac{B^2}{p}+\frac{A^2}{q}\right)x^2+2\frac{AD}{q}x-2B^2z+\frac{D^2}{q}=0.$$

Это есть уравненіе параболы, ось которой параллельна оси OZ.

Изъ сказаннаго видимъ, что въ сѣченіи эллиптическаго параболоида различными плоскостями могутъ получаться лишь эллипсы и параболы, причемъ послѣднія получаются только для сѣкущихъ плоскостей, параллельныхъ оси поверхности.

Такъ какъ не существуетъ вовсе гиперболическихъ сѣченій, то не можетъ быть и плоскостей, которыя имѣли бы съ поверхностью общія прямыя. Слѣдовательно, эллиптическій параболоидъ не имѣетъ прямолинейныхъ образующихъ.

618. Обозначая черезъ l длину перпендикуляра изъ вершины параболоида на касательную плоскость, а черезъ α, β, γ углы этого перпендикуляра съ осями координатъ, представимъ уравненіе этой плоскости въ видѣ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-l=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Изъ сравненія этого уравненія съ уравненіемъ (6) находимъ

$$\frac{x_1}{p\cos\alpha}=\frac{y_1}{q\cos\beta}=\frac{-1}{\cos\gamma}=\frac{z_1}{l}.$$

Слѣдовательно,

$$x_1=-\frac{p\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad y_1=-\frac{q\cos\beta}{\cos\gamma},\quad z_1=-\frac{l}{\cos\gamma}.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію параболоида (2), то будемъ имѣть

$$p\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}+q\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}=-2\frac{l}{\cos\gamma},$$

откуда

$$l=\frac{p\cos^2\alpha+q\cos^2\beta}{-2\cos\gamma},$$

вслѣдствіе чего уравненіе (7) принимаетъ видъ

$$2(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\cos\gamma+p\cos^2\alpha+q\cos^2\beta=0.$$

Это есть уравненіе касательной плоскости, имѣющей данное направленіе.

Возьмемъ три какія-нибудь перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, и пусть уравненія ихъ будутъ

$$2(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 + p\cos^2\alpha_1 + q\cos^2\beta_1 = 0\,,$$
$$2(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)\cos\gamma_2 + p\cos^2\alpha_2 + q\cos^2\beta_2 = 0\,,$$
$$2(x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3)\cos\gamma_3 + p\cos^2\alpha_3 + q\cos^2\beta_3 = 0\,.$$

Вслѣдствіе перпендикулярности плоскостей должно быть

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1\,,$$
$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1\,,$$
$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1\,,$$
$$\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3 = 0\,,$$
$$\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0$$

и потому, сложивши уравненія плоскостей, получимъ

$$2z + p + q = 0\,.$$

Это показываетъ, что *геометрическое мѣсто вершины прямого трехграннаго угла, грани котораго касаются эллиптическаго параболоида, есть плоскость, перпендикулярная къ оси этой поверхности.*

619. Между плоскостями, пересѣкающими параболоидъ по эллипсамъ, существуютъ плоскости круговыхъ сѣченій. Въ этомъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ.

Представимъ уравненіе параболоида (2) въ видѣ

$$qx^2 + py^2 = 2pqz$$

и положимъ, что въ немъ $q > p$.

Придавая къ обѣимъ частямъ послѣдняго уравненія выраженіе

$$p(x^2 + z^2)\,,$$

получимъ

$$qx^2 + p(x^2 + y^2 + z^2) = p(x^2 + z^2) + 2pqz$$

или

$$pz^2 - (q - p)x^2 = p(x^2 + y^2 + z^2) - 2pqz\,.$$

Представленное въ такомъ видѣ уравненіе параболоида можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся отъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$z\sqrt{p} \mp x\sqrt{q-p} = k\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

и $$k(z\sqrt{p} \mp x\sqrt{q-p}) = p(x^2 + y^2 + z^2) - 2pqz,$$

въ которыхъ верхнему знаку соотвѣтствуетъ верхній, а нижнему нижній, и изъ которыхъ первое выражаетъ плоскость, а второе сферу.

Отсюда заключаемъ, что плоскости, выражаемыя уравненіями

$$z\sqrt{p} - x\sqrt{q-p} = k \quad \text{и} \quad z\sqrt{p} + x\sqrt{q-p} = k,$$

при неопредѣленномъ значеніи k, пересѣкаютъ параболоидъ по кругамъ. Вслѣдствіе предположенія, что $q > p$, этими уравненіями выражаются дѣйствительныя плоскости, параллельныя оси OY и наклоненныя къ плоскости XOY подъ равными углами, ибо, обозначая черезъ φ уголъ плоскости (8) съ плоскостью XOY, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{\sqrt{q-p}}{\sqrt{p}}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\varphi = \pm \frac{\sqrt{q-p}}{\sqrt{q}}, \quad \cos\varphi = \pm \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

Итакъ, эллиптическій параболоидъ, подобно всѣмъ центральнымъ поверхностямъ, имѣетъ двѣ системы плоскостей круговыхъ сѣченій. Плоскости эти перпендикулярны къ той изъ двухъ главныхъ плоскостей параболоида, которая даетъ въ сѣченіи параболу меньшаго параметра.

Очевидно, что для параболоида вращенія обѣ эти системы сливаются въ одну систему плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси вращенія.

620. Въ уравненіи (8) постоянному k можно дать такое значеніе, при которомъ оно представляетъ касательную плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (6) въ предположеніи, что они имѣютъ одно и то же значеніе, будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{\mp p\sqrt{q-p}} = \frac{-1}{\sqrt{p}} = \frac{z_1}{k}$$

и

$$y_1 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 = \pm\sqrt{p(q-p)}, \quad z_1 = -\frac{k}{\sqrt{p}}.$$

Подставляя эти координаты въ уравненіе параболоида (2), получимъ

$$q-p=-2\frac{k}{\sqrt{p}},$$

откуда

$$k=-\frac{(q-p)\sqrt{p}}{2}.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ двѣ точки округленія, опредѣляемыя координатами

$$x_1=\pm\sqrt{p(q-p)},\quad y_1=0,\quad z_1=\frac{q-p}{2}.$$

621. Эллиптическій параболоидъ представляетъ предѣлъ, къ которому приближается эллипсоидъ при безконечномъ возрастаніи его осей. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе эллипсоида въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Перемѣстивъ систему координатъ такъ, чтобы начало координатъ совпадало съ какимъ-нибудь изъ концовъ большой оси поверхности, а направленіе осей оставалось прежнее, преобразуемъ послѣднее уравненіе въ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2x}{a}=0$$

или

$$\frac{x^2}{a}+\frac{ay^2}{b^2}+\frac{az^2}{c^2}-2x=0.$$

Предполагая теперь, что постоянныя a, b, c безпредѣльно возрастаютъ, но такъ, что отношенія $\frac{b^2}{a}$ и $\frac{c^2}{a}$ стремятся къ конечнымъ предѣламъ p и q, будемъ имѣть, что уравненіе эллипсоида обратится въ предѣлѣ въ

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

а это есть уравненіе эллиптическаго параболоида, ось котораго совпадаетъ съ осью OX.

Можно также разсматривать эллиптическій параболоидъ, какъ предѣлъ двуполаго гиперболоида. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ уравненіе двуполаго гиперболоида въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

и перенеся начало координатъ въ одну изъ вершинъ поверхности, не измѣняя при этомъ направленія осей, преобразуемъ его въ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\mp 2\frac{z}{c}=0$$

или

$$\frac{cx^2}{a^2}+\frac{cy^2}{b^2}-\frac{z^2}{c}\mp 2z=0\,.$$

Предполагая, далѣе, что постоянныя a, b, c безпредѣльно возрастаютъ, но такъ, что отношенія $\frac{a^2}{c}$ и $\frac{b^2}{c}$ стремятся къ конечнымъ предѣламъ p и q, будемъ имѣть, что въ предѣлѣ послѣднее уравненіе обратится въ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\mp 2z=0\,,$$

что представляетъ эллиптическій параболоидъ, имѣющій своею осью ось OZ.

§ 2. Гиперболическій параболоидъ.

622. Въ предыдущемъ мы разсматривали поверхности, выражаемыя уравненіемъ

$$Ax^2+By^2+2Jz=0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

когда въ немъ коэффиціенты A и B имѣютъ одинаковые знаки (см. стр. 480). Обратимся теперь къ случаю, когда знаки этихъ коэффиціентовъ различны.

Такъ какъ знакъ послѣдняго члена уравненія (1) зависитъ отъ выбора положительнаго направленія оси OZ, то этотъ выборъ можетъ быть сдѣланъ такъ, чтобы коэффиціенты A и J имѣли различные знаки. Вслѣдствіе этого можно предполагать, что отношенія

$$\frac{-J}{A} \quad \text{и} \quad \frac{J}{B}$$

имѣютъ величины положительныя.

Обозначая эти величины послѣдовательно черезъ p и q, дадимъ уравненію (1) видъ

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Займемся изслѣдованіемъ его значенія.

623. Полагая $z=0$, получимъ изъ уравненія (2)

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0.$$

Это уравненіе выражаетъ на плоскости XOY совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ и составляющихъ съ осью OX равные углы. Тангенсы этихъ угловъ суть

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}.$$

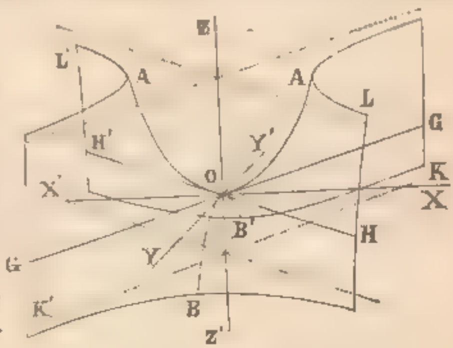
Слѣдовательно, плоскость XOY есть касательная къ поверхности (2) и начало координатъ—ея точка прикосновенія.

Полагая въ уравненіи (2) послѣдовательно $y=0$ и $x=0$, получимъ

$$x^2=2pz \quad \text{и} \quad y^2=-2qz.$$

Отсюда видимъ, что плоскостями XOZ и YOZ разсматриваемая поверхность пересѣкается по параболамъ, имѣющимъ начало координатъ общей вершиной и ось OZ общею осью. При этомъ первая парабола AOA' (фиг. 118) простирается въ безконечность въ положительномъ направленіи оси OZ, а вторая BOB' въ обратную сторону. Величины p и q суть параметры этихъ параболъ.

Параболы AOA' и BOB' представляютъ главныя сѣченія поверхности.



Фиг. 118.

624. Линія пересѣченія поверхности (2) съ какою-нибудь плоскостью, параллельною плоскости XOY, выражается совокупностью уравненій

$$z=h$$

и

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

изъ нихъ послѣднее представляетъ на плоскости XOY проекцію этой линіи.

Если величина h, т. е. разстояніе сѣкущей плоскости отъ начала координатъ, имѣетъ значеніе положительное, то, полагая

$$2ph=a^2 \quad \text{и} \quad 2qh=b^2,$$

дадимъ послѣднему уравненію видъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если же h есть величина отрицательная, то, полагая

$$-2ph=a'^2 \quad \text{и} \quad -2qh=b'^2,$$

представимъ уравненіе (3) въ видѣ

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=1.$$

Это показываетъ, что плоскости, параллельныя плоскости XOY, пересѣкаютъ поверхность по гиперболамъ, причемъ гиперболы, получаемыя въ сѣченіи плоскостями, лежащими выше плоскости XOY, имѣютъ дѣйствительную ось на плоскости XOZ и мнимую на плоскости YOZ; для плоскостей же, лежащихъ ниже плоскости XOY, наоборотъ.

Такъ какъ изъ предыдущаго обозначенія имѣемъ

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}},$$

то заключаемъ, что проекціи всѣхъ гиперболъ, получаемыхъ при пересѣченіи плоскостями, параллельными плоскости XOY, имѣютъ общія ассимптоты GG' и HH'.

Такимъ образомъ видимъ, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (2), состоитъ изъ одной сплошной полости, имѣющей сѣдлообразную форму, и простирается въ безконечность въ противоположныхъ направленіяхъ.

Она называется *гиперболическимъ параболоидомъ*. Точка O есть ея вершина, прямая OZ ея ось.

625. Исключая неизвѣстное z изъ уравненія (2) и общаго уравненія первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (4)$$

получимъ уравненіе проекціи на плоскость XOY линіи пересѣченія параболоида съ какою-нибудь плоскостью, не параллельною оси OZ. Это уравненіе будетъ

$$\frac{Cx^2}{p}-\frac{Cy^2}{q}+2(Ax+By+D)=0$$

или

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0, \qquad (5)$$

гдѣ

$$A' = \frac{C}{p}, \quad B' = 0, \quad C' = -\frac{C}{q}, \quad D' = 2A, \quad E' = 2B, \quad F' = 2D.$$

Такъ какъ при этомъ двучленъ

$$B'^2 - 4A'C'$$

имѣетъ всегда значеніе положительное

$$4\frac{C^2}{pq},$$

то заключаемъ, что гиперболическій параболоидъ всѣми плоскостями, не параллельными его оси, пересѣкается по гиперболамъ.

Если уравненіе (4) выражаетъ плоскость, параллельную оси OZ, то въ немъ $C=0$ и линія пересѣченія этой плоскости съ гиперболоидомъ опредѣлится проекціею на одну изъ плоскостей XOZ или YOZ.

Исключая, напр., y, получимъ уравненіе проекціи линіи пересѣченія на плоскость XOZ въ видѣ

$$\frac{x^2}{p} - \frac{(Ax+D)^2}{B^2q} = 2z$$

или

$$\left(\frac{B^2}{p} - \frac{A^2}{q}\right)x^2 - 2\frac{AD}{q}x - 2B^2z - \frac{D^2}{q} = 0.$$

Это уравненіе выражаетъ параболу.

Итакъ, всѣми плоскостями, параллельными оси, гиперболическій параболоидъ пересѣкается по параболамъ.

Эллиптическихъ сѣченій, и въ частности круговыхъ, не существуетъ, слѣдовательно, вовсе.

626. Центръ гиперболы, получаемой при пересѣченіи поверхности (2) съ плоскостью (4), имѣетъ проекціею на плоскость XOY центръ линіи, выражаемой уравненіемъ (5). Вслѣдствіе этого его координаты x и y опредѣлятся слѣдующимъ образомъ (см. стр. 113):

$$x = \frac{2C'D' - B'E'}{B'^2 - 4A'C'} = -\frac{Ap}{C},$$

$$y = \frac{2A'E' - B'D'}{B'^2 - 4A'C'} = +\frac{Bq}{C};$$

а изъ уравненія (4) находимъ для третьей координаты z слѣдующее значеніе

$$z = \frac{Ax + By + D}{-C} = \frac{A^2p - B^2q - CD}{C^2}.$$

Если плоскость (4) касается поверхности, то уравненіе (5) выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ и потому должно быть

$$(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2) - (B'^2 - 4A'C')F' = 0,$$

что для настоящаго случая даетъ

$$A^2p - B^2q - 2CD = 0.$$

Координаты точки прикосновенія опредѣлятся предыдущими выраженіями для x, y, z, такъ что, называя эти координаты чрезъ x_1, y_1, z_1, будемъ имѣть

$$x_1 = -\frac{Ap}{C}, \quad y_1 = +\frac{Bq}{C}, \quad z_1 = +\frac{D}{C}.$$

Отсюда получимъ

$$A = -\frac{Cx_1}{p}, \quad B = +\frac{Cy_1}{q}, \quad D = +Cz_1,$$

вслѣдствіе чего уравненіе (4) приметъ видъ

$$\frac{xx_1}{p} - \frac{yy_1}{q} = z + z_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Это есть уравненіе касательной плоскости къ гиперболическому параболоиду въ данной на немъ точкѣ.

Уравненія нормали въ той же точкѣ параболоида будутъ, слѣдовательно,

$$\frac{p(x-x_1)}{x_1} = \frac{q(y-y_1)}{-y_1} = \frac{z-z_1}{-1}.$$

627. Обозначая черезъ l длину перпендикуляра изъ начала координатъ на касательную плоскость, а черезъ α, β, γ углы этого перпендикуляра съ осями координатъ, представимъ уравненіе этой плоскости въ видѣ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0,$$

и такъ какъ изъ сравненія этого уравненія съ уравненіемъ (6) слѣдуетъ, что

$$\frac{x_1}{p\cos\alpha} = \frac{-y_1}{q\cos\beta} = \frac{-1}{\cos\gamma} = \frac{z_1}{l},$$

откуда

$$x_1 = -\frac{p\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad y_1 = +\frac{q\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad z_1 = -\frac{l}{\cos\gamma},$$

то изъ уравненія параболоида (2) будемъ имѣть

$$p\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}-q\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}=-2\frac{l}{\cos\gamma}.$$

Слѣдовательно,

$$l=\frac{p\cos^2\alpha-q\cos^2\beta}{-2\cos\gamma}.$$

Уравненіе касательной плоскости, имѣющей данное направленіе, принимаетъ, такимъ образомъ, видъ

$$2(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\cos\gamma+p\cos^2\alpha-q\cos^2\beta=0.$$

Если положимъ, что три касательныя плоскости къ параболоиду, перпендикулярныя между собою, выражаются уравненіями

$$2(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1)\cos\gamma_1+p\cos^2\alpha_1-q\cos^2\beta_1=0,$$
$$2(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2)\cos\gamma_2+p\cos^2\alpha_2-q\cos^2\beta_2=0,$$
$$2(x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3)\cos\gamma_3+p\cos^2\alpha_3-q\cos^2\beta_3=0,$$

то должно быть

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$
$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1,$$
$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1,$$
$$\cos\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0.$$

Слѣдовательно, складывая уравненія плоскостей, получимъ

$$2z+p-q=0.$$

Отсюда убѣждаемся, что *геометрическое мѣсто вершины прямого триграннаго угла, грани котораго касаются гиперболическаго параболоида, есть плоскость, перпендикулярная къ его оси.*

Плоскость эта, какъ мы видѣли, пересѣкаетъ параболоидъ, а въ случаѣ, когда $p=q$, сама есть касательная.

628. Уравненіе гиперболическаго параболоида (2) можетъ быть разсматриваемо, какъ получаемое отъ перемноженія двухъ слѣдующихъ уравненій первой степени съ дѣйствительными коэффиціентами:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=k \qquad \text{и} \qquad k\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z,$$

совокупность которыхъ, при неопредѣленномъ значеніи постояннаго k, выражаетъ систему прямыхъ, лежащихъ на этой поверхности. Такъ

какъ въ то же время уравненіе (2) можно разсматривать, какъ результатъ перемноженія уравненія

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=l \qquad \text{и} \qquad l\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z,$$

представляющихъ, при неопредѣленномъ l, также систему прямыхъ, лежащихъ на поверхности, то убѣждаемся, что гиперболическій параболоидъ, подобно однополому гиперболоиду, имѣетъ двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ.

Въ этомъ же можно убѣдиться, отыскивая условія, при которыхъ произвольно взятая прямая лежитъ всѣми точками на параболоидѣ.

629. Пусть уравненія какой-нибудь прямой въ пространствѣ будутъ

$$x=mz+u \qquad \text{и} \qquad y=nz+v \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Исключивъ x и y изъ этихъ уравненій и уравненія параболоида, получимъ

$$\frac{(mz+u)^2}{p}-\frac{(nz+v)^2}{q}=2z$$

или

$$\left(\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{q}\right)z^2+2\left(\frac{mu}{p}-\frac{nv}{q}-1\right)z+\left(\frac{u^2}{p}-\frac{v^2}{q}\right)=0.$$

Это послѣднее уравненіе должно имѣть мѣсто при всякомъ z, если прямая лежитъ на параболоидѣ. Поэтому заключаемъ, что условія, при которыхъ разсматриваемая прямая (7) есть прямолинейная образующая параболоида, должны состоять въ слѣдующемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{q}&=0\\ \frac{mu}{p}-\frac{nv}{q}&=1\\ \frac{u^2}{p}-\frac{v^2}{q}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ того, что этихъ условій не достаточно для опредѣленія четырехъ параметровъ m, n, u, v, опредѣляющихъ прямую (7), заключаемъ о существованіи безконечнаго множества прямыхъ, лежащихъ на параболоидѣ.

Такъ какъ u и v суть координаты слѣда прямой (7) на плоскости XOY (см. стр. 351), то послѣднее изъ условій (8) означаетъ, что эта точка лежитъ на одной изъ прямыхъ, выражаемыхъ въ совокупности уравненіемъ

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$

т. е. прямыхъ, по которымъ параболоидъ пересѣкается плоскостью XOY, обстоятельство геометрически очевидное.

Первое изъ условій (8) требуетъ существованія одного изъ равенствъ

$$\frac{m}{\sqrt{p}} - \frac{n}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{m}{\sqrt{p}} + \frac{n}{\sqrt{q}} = 0,$$

которыя могутъ быть разсматриваемы, какъ условія параллельности прямой (7) съ одною изъ плоскостей, выражаемыхъ уравненіями

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (9)$$

Слѣдовательно, каждая изъ прямыхъ, лежащихъ на параболоидѣ, параллельна одной изъ плоскостей, проходящихъ черезъ его ось и черезъ прямыя, по которымъ параболоидъ пересѣкается плоскостью XOY.

Эти двѣ плоскости, которымъ, такимъ образомъ, должны быть параллельны всѣ прямолинейныя образующія гиперболическаго параболоида, называются *управляющими плоскостями* этой поверхности.

630. Первое и третье изъ условій (8) даютъ

$$\frac{m^2u^2}{p^2} - \frac{n^2v^2}{q^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{mu}{p} - \frac{nv}{q}\right)\left(\frac{mu}{p} + \frac{nv}{q}\right) = 0.$$

Принимая же во вниманіе второе изъ условій (8), заключаемъ, что равенство

$$\frac{mu}{p} - \frac{nv}{q} = 0$$

не можетъ имѣть мѣста.

Слѣдовательно, параметры m и n опредѣлятся чрезъ u и v изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{mu}{p} + \frac{nv}{q} = 0,$$

$$\frac{mu}{p} - \frac{nv}{q} = 1,$$

именно

$$m = +\frac{p}{2u} \quad \text{и} \quad n = -\frac{q}{2v}.$$

Но изъ третьяго условія (8) имѣемъ

$$v = \pm u \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}},$$

и потому три параметра m, n, v прямой (7) выразятся чрезъ четвертый u слѣдующимъ образомъ:

$$m = \frac{p}{2u}, \quad n = \pm \frac{\sqrt{pq}}{2u}, \quad v = \mp u \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}},$$

гдѣ верхнему знаку соотвѣтствуетъ верхній, а нижнему нижній.

Вслѣдствіе этого всѣ прямолинейныя образующія гиперболическаго параболоида раздѣляются на двѣ системы: однѣ выражаются, при неопредѣленномъ u, уравненіями

$$x = \frac{p}{2u} z + u, \quad y = + \frac{\sqrt{pq}}{2u} z - u \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и, очевидно, параллельны первой изъ управляющихъ плоскостей (9); другія же выражаются уравненіями

$$x = \frac{p}{2u} z + u, \quad y = - \frac{\sqrt{pq}}{2u} z + u \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$

и параллельны второй управляющей плоскости (9).

Каждая изъ прямыхъ какъ той, такъ и другой системы вполнѣ опредѣляется значеніемъ параметра u.

631. Возьмемъ двѣ прямолинейныя образующія, принадлежащія разнымъ системамъ и соотвѣтствующія предположеніямъ $u = u_1$ и $u = u_2$.

Уравненія этихъ прямыхъ будутъ

$$\left. \begin{array}{ll} x = \dfrac{p}{2u_1} z + u_1, & y = + \dfrac{\sqrt{pq}}{2u_1} z - u_1 \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \\[2ex] x = \dfrac{p}{2u_2} z + u_2, & y = - \dfrac{\sqrt{pq}}{2u_2} z + u_2 \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Исключая изъ нихъ x и y, получимъ

$$\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) z + (u_1 - u_2) = 0$$

и

$$\frac{\sqrt{pq}}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) z - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} (u_1 + u_2) = 0.$$

Оба эти равенства удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ z, именно

$$z = \frac{2u_1u_2}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемыя прямыя пересѣкаются.

Если же возьмемъ двѣ прямолинейныя образующія, принадлежащія одной и той же системѣ (10) и соотвѣтствующія тѣмъ же значеніямъ параметра u, то, исключая x и y изъ ихъ уравненій

$$x = \frac{p}{2u_1}z + u_1, \quad y = +\frac{\sqrt{pq}}{2u_1}z - u_1\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}},$$

$$x = \frac{p}{2u_2}z + u_2, \quad y = +\frac{\sqrt{pq}}{2u_2}z - u_2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}},$$

получимъ

$$\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)z + (u_1 - u_2) = 0,$$

и

$$\frac{\sqrt{pq}}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)z - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}(u_1 - u_2) = 0,$$

соотношенія, несовмѣстимыя при одномъ и томъ же значеніи z и различныхъ u_1 и u_2.

Изъ сказаннаго видимъ, что *всѣ прямолинейныя образующія одной системы пересѣкаются съ прямолинейными образующими другой, но образующія одной и той же системы вовсе не имѣютъ общихъ точекъ.*

632. Если прямыя, выражаемыя уравненіями (11), параллельны, то должно быть

$$\frac{p}{2u_1} = \frac{p}{2u_2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{pq}}{2u_1} = -\frac{\sqrt{pq}}{2u_2},$$

т. е.

$$u_1 = u_2 \quad \text{и} \quad u_1 = -u_2,$$

что, очевидно, невозможно.

Если же прямыя (11) перпендикулярны между собою, то должно быть

$$\frac{p(p-q)}{4u_1u_2} + 1 = 0,$$

откуда

$$u_1u_2 = \frac{p(q-p)}{4}.$$

Вслѣдствіе этого результатъ исключенія (12) неизвѣстныхъ x и y изъ уравненій разсматриваемыхъ прямыхъ принимаетъ видъ

$$z = \frac{q - p}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Такимъ образомъ видимъ, что въ числѣ прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида параллельныхъ не существуетъ вовсе; перпендикулярныхъ же образующихъ существуетъ безчисленное множество. Геометрическое мѣсто точекъ ихъ пересѣченія есть гипербола, по которой поверхность пересѣкается плоскостью (13).

633. Уравненія (10), взятыя въ отдѣльности, представляютъ проекціи на плоскости XOZ и YOZ какой-нибудь прямолинейной образующей первой системы. Исключая изъ этихъ уравненій неизвѣстное z, получимъ уравненіе проекціи той же прямой на плоскость XOY въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{2u}{\sqrt{p}}.$$

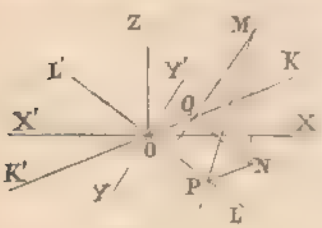
Подобнымъ же образомъ найдемъ, что проекція на плоскость XOY какой-нибудь прямолинейной образующей второй системы выражается уравненіемъ

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{2u}{\sqrt{p}}.$$

Очевидно, что прямыя, выражаемыя послѣдними двумя уравненіями на плоскости XOY параллельны двумъ прямымъ, по которымъ эта плоскость пересѣкаетъ параболоидъ.

Такимъ образомъ видимъ, что *проекціи всѣхъ прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида на касательную плоскость въ его вершинѣ параллельны двумъ образующимъ, лежащимъ въ этой плоскости.*

Свойство это есть прямое слѣдствіе параллельности всѣхъ прямолинейныхъ образующихъ съ управляющими плоскостями. Пользуясь имъ, легко найти построеніемъ прямолинейныя образующія, проходящія черезъ какую-нибудь точку M, данную на параболоидѣ (фиг. 119).



Фиг. 119.

Положимъ, что извѣстна касательная плоскость XOY въ вершинѣ O и прямыя KK' и LL', по которымъ она пересѣкаетъ параболоидъ. Опустивши изъ данной точки M перпендикуляръ на эту плоскость и проведя черезъ его основаніе N прямыя NP и NQ, параллельныя KK' и LL', будемъ имѣть, что прямыя, соединяющія точки P и Q съ данною M, суть искомыя образующія.

Итакъ, *черезъ всякую точку гиперболическаго параболоида проходятъ двѣ его прямолинейныя образующія.*

634. Уравненіе гиперболическаго параболоида получаетъ очень простой видъ, когда система координатъ выбрана такимъ образомъ, что начало будетъ находиться въ какой-нибудь точкѣ поверхности, а двѣ оси координатъ, напр. OX и OY будутъ совпадать съ двумя прямолинейными образующими, проходящими черезъ эту точку; плоскости же XOZ и YOZ будутъ проходить черезъ эти прямыя параллельно управляющимъ плоскостямъ, вслѣдствіе чего ось OZ будетъ параллельна оси поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ плоскость XOY пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ, совпадающимъ съ осями OX и OY, а каждая изъ плоскостей XOZ и YOZ по двумъ прямымъ, изъ которыхъ одна безконечно удалена всѣми своими точками. Вслѣдствіе этого общее уравненіе поверхности

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+$$
$$+2Gx+2Hy+2Jz+K=0,$$

при $z=0$, должно обратиться въ $xy=0$, что возможно только тогда, когда $A=0$, $B=0$, $G=0$, $H=0$ и $K=0$.

Если же при этихъ условіяхъ положимъ въ уравненіи поверхности $y=0$, то получимъ

$$(Cz+2Ex+2J)z=0,$$

и для того, чтобы одна изъ прямыхъ, выражаемыхъ этимъ уравненіемъ, именно прямая

$$Cz+2Ex+2J=0,$$

была безконечно удаленною, необходимо принять, что $C=0$ и $E=0$. Точно также, положивши въ уравненіи поверхности $x=0$, будемъ имѣть

$$(Cz+2Fy+2J)z=0,$$

и для того, чтобы одна изъ прямыхъ, выражаемыхъ этимъ уравненіемъ была безконечно удаленною, нужно принять, что $C=0$ и $F=0$.

Такимъ образомъ видимъ, что, при указанномъ выборѣ системы координатъ, въ общемъ уравненіи поверхности будутъ равняться нулю всѣ коэффиціенты кромѣ D и J, такъ что оно приметъ видъ

$$Dxy+Jz=0$$

или, полагая $-\frac{J}{D}=m$,

$$xy=mz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

*

Это и есть упомянутое простое уравненіе гиперболическаго параболоида. Оно содержитъ только одинъ постоянный параметръ m.

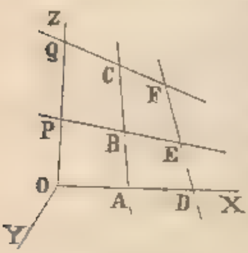
635. Изъ всего сказаннаго о прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида слѣдуетъ, что эта поверхность принадлежитъ къ числу линейчатыхъ, т. е. что она, подобно однополому гиперболоиду, можетъ быть разсматриваема, какъ описываемая движущеюся прямою.

При этомъ движеніе описывающей поверхность прямой можетъ быть опредѣляемо геометрически двоякимъ образомъ: по первому опредѣленію движущаяся прямая должна скользить по двумъ даннымъ прямымъ и оставаться параллельною данной плоскости; по второму движущаяся прямая должна скользить по тремъ даннымъ прямымъ, параллельнымъ одной и той же плоскости.

Постараемся убѣдиться въ обратномъ.

Покажемъ сперва, что *геометрическое мѣсто системы прямыхъ, пересѣкающихъ двѣ данныя прямыя и параллельныхъ данной плоскости, есть гиперболическій параболоидъ.*

Примемъ данную плоскость за плоскость XOY, и пусть данныя прямыя будутъ OQ и AC (фиг. 120), пересѣкающія эту плоскость въ точкахъ O и A. Примемъ, далѣе, прямыя OQ и OA за оси OZ и OX и выберемъ плоскость YOZ такъ, чтобы она была параллельна второй изъ данныхъ прямыхъ AC. Этимъ система координатъ опредѣлится вполнѣ и уравненія двухъ данныхъ прямыхъ будутъ



Фиг. 120.

$$x=0,\qquad y=0$$

и

$$x=a,\qquad y=mz, \qquad (15)$$

гдѣ a и m суть данныя постоянныя величины.

Возьмемъ какую-нибудь прямую PE, параллельную данной плоскости XOY и пересѣкающуюся съ данной прямой OQ. Уравненія этой прямой будутъ имѣть видъ

$$z=\alpha,\qquad y=\mu x, \qquad (16)$$

гдѣ α и μ суть неопредѣленныя постоянныя.

Если прямая PE пересѣкается съ прямою AC, то уравненія (15) и (16) должны быть совмѣстимы, и потому, исключая изъ нихъ x, y, z, получимъ

$$m\alpha=a\mu.$$

Это есть условіе, которому должна удовлетворять всякая прямая (16), параллельная плоскости XOY и пересѣкающая обѣ данныя прямыя OQ и AC. Слѣдовательно, исключая неопредѣленные параметры α и μ изъ уравненій (16) и этого условія, мы получимъ уравненіе геометрическаго мѣста всѣхъ такихъ прямыхъ. Это уравненіе будетъ

$$mxz = ay$$

или, полагая $\frac{a}{m} = m'$,

$$xz = m'y.$$

Сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ (14), заключаемъ, что оно выражаетъ гиперболическій параболоидъ, для котораго плоскость XOZ есть касательная, а плоскости XOY и YOZ параллельна управляющимъ плоскостямъ.

636. Докажемъ теперь, что *геометрическое мѣсто системы прямыхъ, пересѣкающихъ три данныя прямыя, параллельныя одной и той же плоскости, есть гиперболическій параболоидъ.*

Положимъ, что данныя прямыя суть OQ, AC, DF (фиг. 120), и пусть OD и PE будутъ двѣ прямыя, пересѣкающія каждую изъ нихъ. Примемъ прямыя OQ и OD за оси OZ и OX и выберемъ плоскость YOZ такъ, чтобы она была параллельна даннымъ прямымъ AC и DF, а плоскость XOY такъ, чтобы она была параллельна прямой PE. Этимъ система координатъ опредѣляется вполнѣ и уравненія данныхъ прямыхъ AC и DF будутъ имѣть видъ

$$x = a, \qquad y = mz$$

и

$$x = b, \qquad y = nz.$$

Уравненія же прямой PE будутъ вида

$$z = c, \qquad y = \mu x.$$

Условія пересѣченія послѣдней прямой съ двумя первыми будутъ, очевидно,

$$mc = a\mu \quad \text{и} \quad nc = b\mu.$$

откуда

$$mb = na. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Возьмемъ теперь какую-нибудь прямую QF, пересѣкающую одновременно три данныя прямыя. Всякая такая прямая можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ прямую AC, а другая черезъ прямую DF, и которыя пересѣкаютъ ось OZ въ одной и той же точкѣ Q.

Уравненія этихъ плоскостей, очевидно, будутъ имѣть видъ

$$\left.\begin{array}{l} x - a = k(y - mz) \\ x - b = l(y - nz) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Такъ какъ эти уравненія при $x = 0$ и $y = 0$ должны давать одно и то же значеніе для z, то должно быть

$$kmb = lna,$$

откуда, вслѣдствіе соотношенія (17), получимъ

$$k = l.$$

Исключая, при помощи этого соотношенія, k и l изъ уравненія (18), находимъ

$$(x - a)(y - nz) = (x - b)(y - mz).$$

Это и есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Принимая во вниманіе равенство (17), приводимъ его къ виду

$$(m - n)xz = (a - b)y$$

или, полагая $\frac{a-b}{m-n} = m'$,

$$xz = m'y,$$

а это, какъ мы уже знаемъ, есть уравненіе гиперболическаго параболоида.

637. Такъ какъ прямыя OD, PE, QF (фиг. 120) лежатъ въ плоскостяхъ, параллельныхъ между собою, то должно быть

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

ибо, какъ извѣстно, отрѣзки прямыхъ, заключающіеся между тремя параллельными плоскостями, пропорціональны.

Это позволяетъ заключить, что прямолинейныя образующія гиперболическаго параболоида, принадлежащія одной и той же системѣ, отсѣкаютъ на прямолинейныхъ образующихъ другой системы пропорціональные отрѣзки. Также и обратно: прямыя линіи, пересѣкающія двѣ данныя прямыя и опредѣляющія на нихъ пропорціональные отрѣзки, суть образующія гиперболическаго параболоида.

На этомъ основывается построеніе модели гиперболическаго параболоида изъ нитей, натягиваемыхъ между точками противоположныхъ сторонъ косого четыреугольника $ODFQ$, въ которыхъ эти стороны дѣлятся на одинаковое число равныхъ частей.

638. Гиперболическій параболоидъ можно разсматривать, какъ предѣлъ, къ которому стремится однополый гиперболоидъ при безконечномъ возрастаніи его осей. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе однополаго гиперболоида въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если перенесемъ начало координатъ въ одну изъ вершинъ, принадлежащихъ оси OX, сохраняя при этомъ направленіе осей, то это уравненіе преобразуется въ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\mp 2\frac{x}{a}=0$$

или

$$\frac{x^2}{a}+\frac{ay^2}{b^2}-\frac{az^2}{c^2}\mp 2x=0.$$

Предполагая, что величины a, b, c безпредѣльно возрастаютъ, но такъ, что отношенія $\frac{b^2}{a}$ и $\frac{c^2}{a}$ стремятся къ конечнымъ предѣламъ p и q, будемъ имѣть, что послѣднее уравненіе въ предѣлѣ обратится въ

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}\mp 2x=0,$$

а это есть уравненіе гиперболическаго параболоида.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ФОКУСЫ И ФОКАЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

§ 1. Фокусы и фокальныя линіи центральныхъ поверхностей.

639. Положимъ, что дана точка, опредѣляемая относительно прямоугольной системы координатъ координатами α, β, γ, и двѣ плоскости, выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{array}{r} kx + ly + mz + n = 0 \\ k'x + l'y + m'z + n' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

и

Постараемся найти геометрическое мѣсто точки, разстояніе которой отъ данной точки находится въ постоянномъ отношеніи къ средней геометрической ея разстояній отъ данныхъ плоскостей.

Если назовемъ черезъ d разстояніе точки M искомаго геометрическаго мѣста отъ данной точки, а черезъ δ и δ' разстоянія той же точки M отъ данныхъ плоскостей, то условіе, опредѣляющее искомое мѣсто, будетъ

$$d = e\sqrt{\delta\delta'}$$

или

$$d^2 = e^2\delta\delta',$$

гдѣ e есть данное постоянное отношеніе.

Но, обозначая координаты точки M черезъ x, y, z, будемъ имѣть

$$d^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

$$\delta = \frac{kx + ly + mz + n}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}},$$

$$\delta' = \frac{k'x + l'y + m'z + n'}{\sqrt{k'^2 + l'^2 + m'^2}}.$$

Слѣдовательно, координаты точки M удовлетворяютъ уравненію

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\frac{e^2(kx+ly+mz+n)(k'x+l'y+m'z+n')}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}\ \sqrt{k'^2+l'^2+m'^2}}\ .\ (2)$$

Такъ какъ оно второй степени, то заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть поверхность второго порядка [1]).

Данная точка α, β, γ называется *фокусомъ* такой поверхности, а прямая пересѣченія данныхъ плоскостей (1) *директрисою*, соотвѣтствующею этому фокусу.

При изученіи поверхностей второго порядка имѣетъ важное значеніе вопросъ: всякая-ли такая поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто, опредѣляемое указаннымъ сейчасъ образомъ? Другими словами, всякая-ли поверхность второго порядка имѣетъ фокусы?

Постараемся разрѣшить этотъ вопросъ сперва для центральныхъ поверхностей.

640. Уравненіе всякой центральной поверхности, отнесенной къ ея главнымъ діаметральнымъ плоскостямъ, можно разсматривать въ видѣ

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Что же касается уравненія (2), выражающаго разсматриваемое геометрическое мѣсто, то оно можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{r}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\\ -(k_1x+l_1y+m_1z+n_1)(k_2x+l_2y+m_2z+n_2)=0\end{array}\right\}\ .\ .\ .\ (4)$$

гдѣ чрезъ k_1, l_1, m_1, n_1 обозначены произведенія коэффиціентовъ k, l, m, n на постоянный множитель

$$\frac{e}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}},$$

а чрезъ k_2, l_2, m_2, n_2 произведенія коэффиціентовъ k', l', m', n' на множитель

$$\frac{e}{\sqrt{k'^2+l'^2+m'^2}}.$$

Если уравненіе (4) выражаетъ ту же центральную поверхность, какъ и (3), то оно не должно содержать членовъ съ произведеніями неизвѣстныхъ x, y, z и съ первыми степенями этихъ неизвѣстныхъ. Это даетъ слѣдующія соотношенія:

[1]) Эта поверхность будетъ дѣйствительною также и тогда, когда данныя плоскости (1) суть мнимыя сопряженныя (см. стр. 381).

$$k_1 l_2 + l_1 k_2 = 0, \quad l_1 m_2 + m_1 k_2 = 0, \quad l_1 m_2 + m_1 l_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{c} k_1 n_2 + n_1 k_2 + 2\alpha = 0, \quad l_1 n_2 + n_1 l_2 + 2\beta = 0 \\ m_1 n_2 + n_1 m_2 + 2\gamma = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Такъ какъ, кромѣ того, остальные коэффиціенты уравненій (3) и (4) должны быть пропорціональны, то будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{c} A(1 - k_1 k_2) = B(1 - l_1 l_2) = C(1 - m_1 m_2) = \\ = n_1 n_2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Представивъ равенства (5) въ видѣ

$$k_1 l_2 = - l_1 k_2, \quad m_1 k_2 = - k_1 m_2, \quad l_1 m_2 = - m_1 l_2$$

и перемноживъ ихъ почленно, получимъ

$$k_1 l_1 m_1 k_2 l_2 m_2 = - k_1 l_1 m_1 k_2 l_2 m_2$$

или

$$2 k_1 l_1 m_1 k_2 l_2 m_2 = 0.$$

Слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ k_1, l_1, m_1, k_2, l_2, m_2 равняется нулю.

Если положимъ $k_1 = 0$, то изъ равенствъ (5) будемъ имѣть или $l_1 = m_1 = 0$, или $k_2 = 0$. Первое можно допустить только тогда, когда разсматриваемая поверхность (3) есть сфера, такъ какъ при этомъ допущеніи будемъ имѣть изъ равенствъ (7)

$$A = B = C.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ равенствъ (6) получимъ

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Это показываетъ, что въ случаѣ, когда разсматриваемая поверхность есть сфера, единственная точка, которую можно разсматривать, какъ фокусъ, есть центръ этой поверхности.

Во всѣхъ другихъ случаяхъ предположеніе $k_1 = 0$ влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, $k_2 = 0$, и обратно.

Итакъ, соотношенія (5) требуютъ одного изъ слѣдующихъ предположеній:

$$\text{или} \quad k_1 = k_2 = 0, \quad \text{или} \quad l_1 = l_2 = 0, \quad \text{или} \quad m_1 = m_2 = 0.$$

Соотвѣтственно каждому изъ этихъ предположеній будемъ имѣть изъ соотношеній (6)

$$\text{или} \quad \alpha = 0, \quad \text{или} \quad \beta = 0, \quad \text{или} \quad \gamma = 0.$$

Это значитъ, что фокусы всякой центральной поверхности могутъ находиться только на ея главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ.

641. Займемся болѣе подробнымъ разсмотрѣніемъ слѣдствій, къ которымъ приводитъ предположеніе $m_1 = m_2 = 0$.

Въ этомъ случаѣ уравненіе (4) будетъ имѣть видъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-(k_1x+l_1y+n_1)(k_2x+l_2y+n_2)=0\,, \quad . \; (8)$$

причемъ легко убѣдиться, что произведеніе

$$(k_1x+l_1y+n_1)(k_2x+l_2y+n_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$u(x-\alpha')^2+v(y-\beta')^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Для этого нужно только положить

$$\left.\begin{array}{cc} k_1k_2=u\,, & l_1l_2=v\,, \\ k_1n_2+n_1k_2=-2u\alpha'\,, & l_1n_2+n_1l_2=-2v\beta'\,, \\ \multicolumn{2}{c}{n_1n_2=u\alpha'^2+v\beta'^2.} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Четыре первыя изъ этихъ равенствъ представляютъ опредѣленія величинъ u, v, α', β' [1], послѣднее же есть ихъ необходимое слѣдствіе.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этихъ равенствъ имѣемъ

$$-2\alpha'=\frac{k_1n_2+n_1k_2}{k_1k_2}\,, \qquad -2\beta'=\frac{l_1n_2+n_1l_2}{l_1l_2}\,.$$

Слѣдовательно,

$$4(u\alpha'^2+v\beta'^2)=\frac{(k_1n_2+n_1k_2)^2}{k_1k_2}+\frac{(l_1n_2+n_1l_2)^2}{l_1l_2}=$$

$$=\frac{k_1^2n_2^2+n_1^2k_2^2}{k_1k_2}+\frac{l_1^2n_2^2+n_1^2l_2^2}{l_1l_2}+4n_1n_2\,,$$

откуда

$$u\alpha'^2+v\beta'^2=\frac{(k_1l_1n_2^2+k_2l_2n_1^2)(k_1l_2+l_1k_2)}{4k_1k_2l_1l_2}+n_1n_2$$

или, вслѣдствіе перваго изъ соотношеній (5),

$$u\alpha'^2+v\beta'^2=n_1n_2.$$

Далѣе, изъ соотношеній (6) и (7) получимъ

$$\left.\begin{array}{c} \alpha=u\alpha'\,, \quad \beta=v\beta' \\ A(1-u)=B(1-v)=C \\ u\alpha'^2+v\beta'^2-\alpha^2-\beta^2=C \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

---

[1] Эти величины будутъ дѣйствительны и тогда, когда k_1 и k_2, l_1 и l_2, n_1 и n_2 суть мнимыя сопряженныя количества.

Отсюда находимъ

$$\alpha^2 \frac{1-u}{u} + \beta^2 \frac{1-v}{v} = C.$$

Но

$$1-u = \frac{C}{A} \quad \text{и} \quad 1-v = \frac{C}{B},$$

слѣдовательно

$$u = \frac{A-C}{A}, \qquad v = \frac{B-C}{B}$$

и потому будемъ имѣть

$$\alpha^2 \frac{C}{A-C} + \beta^2 \frac{C}{B-C} = C$$

или, по сокращеніи всѣхъ членовъ на C,

$$\frac{\alpha^2}{A-C} + \frac{\beta^2}{B-C} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Это равенство есть, такимъ образомъ, результатъ исключенія изъ соотношеній (12) или, что все то же, изъ соотношеній (5), (6) и (7) всѣхъ неизвѣстныхъ параметровъ, кромѣ координатъ фокуса α и β. Изъ него мы видимъ, что на плоскости XOY существуетъ безчисленное множество точекъ, обладающихъ свойствами фокуса для поверхности (3). Это суть всѣ точки линіи второго порядка, выражаемой уравненіемъ

$$\frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Линія эта называется *фокальною линіей* поверхности (3). Очевидно, что она имѣетъ общіе фокусы съ главнымъ сѣченіемъ поверхности (3) плоскостью XOY.

642. Вслѣдствіе тождественности выраженій (9) и (10) уравненіе

$$u(x-\alpha')^2 + v(y-\beta')^2 = 0,$$

при данныхъ u, v, α' и β', выражаетъ совокупность двухъ плоскостей, которыя въ отдѣльности выражаются уравненіями

$$k_1x + l_1y + n_1 = 0 \quad \text{и} \quad k_2x + l_2y + n_2 = 0,$$

т. е. совокупность плоскостей (1), пересѣченіемъ которыхъ опредѣляется директриса.

Плоскости эти будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря по тому, имѣютъ ли величины u и v различные или одинаковые знаки. Въ обоихъ случаяхъ директриса есть дѣйствительная прямая, параллельная оси OZ, и величины α' и β' суть, очевидно, координаты x и y любой ея точки.

Изъ предыдущаго видно, что

$$\alpha' = \frac{\alpha}{u} = \alpha \frac{A}{A-C} \quad \text{и} \quad \beta' = \frac{\beta}{v} = \beta \frac{B}{B-C}, \quad . \ . \ . \ (15)$$

и потому, вслѣдствіе соотношенія (13), найдемъ

$$\alpha'^2 \frac{A-C}{A^2} + \beta'^2 \frac{B-C}{B^2} = 1.$$

Слѣдовательно, всякому фокусу, находящемуся на плоскости XOY, соотвѣтствуетъ опредѣленная директриса, перпендикулярная къ этой плоскости, и всѣ директрисы, соотвѣтствующія фокальной линіи (14), образуютъ цилиндрическую поверхность, выражаемую уравненіемъ

$$\frac{(A-C)x^2}{A^2} + \frac{(B-C)y^2}{B^2} = 1.$$

643. Касательная къ фокальной линіи (14) въ какой-нибудь ея точкѣ (α, β) выражается, какъ извѣстно, уравненіемъ

$$\frac{x\alpha}{A-C} + \frac{y\beta}{B-C} = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

Если замѣнить здѣсь α и β ихъ выраженіемъ чрезъ α' и β', опредѣляемыми изъ (15), то получимъ

$$\frac{x\alpha'}{A} + \frac{y\beta'}{B} = 1.$$

Разсматривая α' и β', какъ координаты основанія директрисы, соотвѣтствующей точкѣ (α, β), т. е. какъ координаты точки пересѣченія директрисы съ плоскостью XOY, будемъ имѣть, что послѣднее уравненіе выражаетъ поляру этой точки (α', β') относительно линіи

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

по которой поверхность (3) пересѣкается плоскостью XOY.

Такимъ образомъ видимъ, что *касательная къ фокальной линіи въ какой-нибудь ея точкѣ есть поляра основанія соотвѣтствующей этой точкѣ директрисы относительно главнаго сѣченія поверхности.*

Другими словами, *фокальная линія и основаніе цилиндра, образуемаго соотвѣтственными директрисами, суть взаимныя поляры относительно главнаго сѣченія* (см. стр. 282).

644. Прямая, соединяющая какой-нибудь фокусъ (α, β) съ основаніемъ соотвѣтствующей директрисы (α', β'), выразится, какъ извѣстно, уравненіемъ

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta'-\beta}$$

или, вслѣдствіе соотношеній (15),

$$\frac{x-\alpha}{\left(\frac{\alpha}{A-C}\right)}=\frac{y-\beta}{\left(\frac{\beta}{B-C}\right)}.$$

Очевидно, что эта прямая перпендикулярна къ касательной (16).

Итакъ, *прямая, соединяющая какую-нибудь точку фокальной линіи съ основаніемъ соотвѣтствующей этой точкѣ директрисы, есть нормаль къ этой фокальной линіи.*

645. Существованіе на плоскости XOY фокальной линіи (14) выведено нами изъ предположенія, что въ уравненіи (4)

$$m_1=m_2=0.$$

Но, кромѣ этого предположенія, возможны, какъ мы видѣли, еще два слѣдующія:

$$k_1=k_2=0 \qquad \text{и} \qquad l_1=l_2=0.$$

Каждое изъ нихъ, при посредствѣ такихъ же, какъ и предыдущія, соображеній, приводитъ къ подобному же результату, относительно одной изъ другихъ главныхъ плоскостей YOZ или XOZ. Въ общемъ получается слѣдующій выводъ.

Всякая центральная поверхность имѣетъ, вообще говоря, три фокальныя линіи. Это суть линіи второго порядка, находящіяся на главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ и софокусныя съ главными сѣченіями поверхности.

Если уравненіе поверхности имѣетъ видъ (3), то уравненія фокальныхъ линій на соотвѣтственныхъ плоскостяхъ координатъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}&=1\\ \frac{x^2}{A-B}+\frac{z^2}{C-B}&=1\\ \frac{y^2}{B-A}+\frac{z^2}{C-A}&=1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Каждой изъ фокальныхъ линій соотвѣтствуетъ цилиндрическая поверхность, образуемая директрисами фокусовъ, составляющихъ эту линію. Уравненія этихъ цилиндровъ будутъ:

$$\frac{(A-C)x^2}{A^2}+\frac{(B-C)y^2}{B^2}=1\,,$$

$$\frac{(A-B)x^2}{A^2}+\frac{(C-B)z^2}{C^2}=1\,,$$

$$\frac{(B-A)y^2}{B^2}+\frac{(C-A)z^2}{C^2}=1$$

646. Въ уравненіи поверхности (3) величины A, B, C могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными, но, во всякомъ случаѣ, между ихъ алгебраическими значеніями долженъ существовать опредѣленный порядокъ неравенства. Если положимъ, напр., что

$$A > B > C,$$

то одно изъ уравненій (17), именно послѣднее, будетъ представлять мнимую линію, два же первыя будутъ выражать дѣйствительный эллипсъ и дѣйствительную гиперболу. То же самое будетъ, очевидно, имѣть мѣсто и при всякомъ другомъ порядкѣ неравенства между постоянными A, B, C.

Итакъ, для всякой центральной поверхности одна изъ фокальныхъ линій есть эллипсъ, другая гипербола и третья непремѣнно мнимая.

647. Положимъ, что разсматриваемая поверхность есть эллипсоидъ, выражаемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

гдѣ $a > b > c$.

Это есть частный видъ уравненія (3), когда

$$A=a^2, \qquad B=b^2, \qquad C=c^2.$$

Слѣдовательно, дѣйствительныя фокальныя линіи эллипсоида будутъ: на плоскости XOY эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$

и на плоскости XOZ гипербола

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1\,.$$

Первая изъ нихъ помѣщается внутри эллипсоида, вторая же пересѣкаетъ его въ точкахъ, координаты которыхъ получимъ, рѣшая совмѣстно послѣднее уравненіе съ уравненіемъ главнаго сѣченія

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Въ результатѣ будемъ имѣть

$$x=\pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad z=\pm\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Мы видѣли выше (см. стр. 446), что это суть координаты точекъ округленія эллипсоида.

Итакъ, *точки округленія эллипсоида принадлежатъ къ числу фокусовъ этой поверхности.*

Если разсматриваемая поверхность есть однополый гиперболоидъ, выражаемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

причемъ $b>a$, то, сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (3), будемъ имѣть

$$A=a^2,\quad B=b^2,\quad C=-c^2.$$

Слѣдовательно, дѣйствительныя фокальныя линіи такого гиперболоида суть: на плоскости XOY эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1$$

и на плоскости YOZ гипербола

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{a^2+c^2}=1.$$

Обѣ эти линіи не пересѣкаются съ поверхностью.

Полагая, наконецъ, что разсматриваемая поверхность есть двуполый гиперболоидъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

будемъ имѣть

$$A=-a^2,\quad B=-b^2,\quad C=+c^2$$

и если $b > a$, то дѣйствительныя фокальныя линіи будутъ: на плоскости YOZ гипербола

$$\frac{z^2}{c^2+a^2}-\frac{y^2}{b^2-a^2}=1$$

и на плоскости XOZ эллипсъ

$$\frac{x^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{b^2+c^2}=1.$$

Изъ нихъ послѣдняя пересѣкаетъ поверхность въ точкахъ, координаты которыхъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$x=\pm\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad z=\pm\frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Это суть точки округленія (см. стр. 475).

648. Уравненіе (8) можетъ въ частномъ случаѣ выражать конусъ, причемъ оно также приводится къ виду

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-u(x-\alpha')^2-v(y-\beta')^2=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всякій конусъ второго порядка представляется уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Для того, чтобы эти два уравненія имѣли одно и то же значеніе, нужно положить

$$\alpha=u\alpha' \quad , \quad \beta=v\beta' ,$$

$$a^2(1-u)=b^2(1-v)=-c^2,$$

и

$$\alpha^2+\beta^2-u\alpha'^2-v\beta'^2=0.$$

Эти соотношенія могутъ быть разсматриваемы, какъ пять уравненій съ шестью неизвѣстными α, β, α', β', u, v. Исключивъ изъ нихъ четыре послѣднія неизвѣстныя, получимъ

$$\frac{\alpha^2}{a^2+c^2}+\frac{\beta^2}{b^2+c^2}=0.$$

Такъ какъ, по предположенію, α и β суть координаты фокуса, то заключаемъ, что точки плоскости XOY, обладающія по отношенію къ конусу (18) свойствами фокусовъ, должны удовлетворять уравненію

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=0.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что точки, обладающія свойствами фокусовъ конуса (18) и принадлежащія плоскостямъ XOZ и YOZ должны удовлетворять соотвѣтственно уравненіямъ

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

и

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{a^2+c^2}=0.$$

Если положимъ, что $a>b$, то изъ послѣднихъ трехъ уравненій только одно (19) имѣетъ дѣйствительное значеніе, какъ выражающее двѣ дѣйствительныя прямыя. Два же другія удовлетворяются только координатами вершины конуса и выражаютъ мнимыя прямыя.

Слѣдовательно, *конусъ второго порядка имѣетъ только на одной изъ главныхъ плоскостей дѣйствительную фокальную линію и эта линія есть совокупность двухъ прямыхъ*.

649. Два конуса, изъ которыхъ одинъ выражается уравненіемъ (18), а другой уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

называются *взаимными*, если между постоянными, входящими въ ихъ уравненія, существуютъ соотношенія

$$aa'=bb'=cc'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Геометрическая зависимость между обоими конусами, обусловливаемая этими соотношеніями и, въ свою очередь, ихъ обусловливающая, заключается въ томъ, что образующія одного конуса суть перпендикуляры къ касательнымъ плоскостямъ другого.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, найдемъ геометрическое мѣсто перпендикуляровъ, возставленныхъ въ вершинѣ конуса (18) къ его касательнымъ плоскостямъ.

Уравненіе касательной плоскости къ конусу (18) въ какой-нибудь его точкѣ (x_1, y_1, z_1) имѣетъ видъ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=0.$$

Слѣдовательно, уравненія перпендикуляра къ ней въ началѣ координатъ будутъ

$$\frac{a^2x}{x_1}=\frac{b^2y}{y_1}=-\frac{c^2z}{z_1}.$$

Но если точка (x_1, y_1, z_1) находится на конусѣ (18), то должно быть

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=0.$$

Исключивъ изъ этого равенства и предыдущихъ уравненій неопредѣленныя постоянныя x_1, y_1, z_1, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0.$$

Это есть уравненіе конуса, и оно принимаетъ видъ (20), если имѣютъ мѣсто соотношенія (21).

Мы видѣли выше (см. стр. 459), что плоскости круговыхъ сѣченій конуса (20) выражаются уравненіями

$$\frac{z}{c'}\sqrt{b'^2+c'^2}-\frac{x}{a'}\sqrt{b'^2-a'^2}=k\,,\quad \frac{z}{c'}\sqrt{b'^2+c'^2}+\frac{x}{a'}\sqrt{b'^2-a'^2}=l.$$

Вслѣдствіе соотношеній (21) ихъ можно представить въ видѣ

$$z\sqrt{b^2+c^2}-x\sqrt{a^2-b^2}=kb\,,\qquad z\sqrt{b^2+c^2}+x\sqrt{a^2-b^2}=lb.$$

Очевидно, что это суть двѣ плоскости, перпендикулярныя къ двумъ прямымъ, совокупность которыхъ выражается на плоскости XOZ уравненіемъ (19), т. е. къ фокальнымъ прямымъ конуса (18).

Итакъ, *въ двухъ взаимныхъ конусахъ второго порядка фокальныя прямыя одного суть перпендикуляры къ плоскостямъ круговыхъ сѣченій другого.*

§ 2. Софокусныя поверхности.

650. Поверхности второго порядка, имѣющія общія фокальныя линіи, называются *софокусными*.

Если намъ даны двѣ центральныя поверхности, имѣющія общія главныя плоскости и выражаемыя относительно ихъ уравненіями

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и

$$\frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}=1\,,$$

то уравненія ихъ фокальныхъ линій на соотвѣтственныхъ плоскостяхъ координатъ будутъ послѣдовательно

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1\,,\qquad \frac{x^2}{A'-C'}+\frac{y^2}{B'-C'}=1\,,$$

$$\frac{x^2}{A-B}+\frac{z^2}{C-B}=1\,,\qquad \frac{x^2}{A'-B'}+\frac{z^2}{C'-B'}=1\,,$$

$$\frac{y^2}{B-A}+\frac{z^2}{C-A}=1\,,\qquad \frac{y^2}{B'-A'}+\frac{z^2}{C'-A'}=1\,.$$

Отсюда видимъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ, чтобы данныя поверхности были софокусныя, служатъ равенства

$$A-C=A'-C' \quad \text{и} \quad B-C=B'-C'$$

или

$$A-A'=B-B'=C-C'\,.$$

Поэтому, обозначая черезъ k величину трехъ послѣднихъ разностей, можно уравненіе второй изъ данныхъ поверхностей представить въ видѣ

$$\frac{x^2}{A-k}+\frac{y^2}{B-k}+\frac{z^2}{C-k}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

При неопредѣленномъ значеніи k это уравненіе будетъ, слѣдовательно, представлять систему всѣхъ возможныхъ поверхностей, софокусныхъ съ данною поверхностью (1).

651. Какова бы ни была данная поверхность (1), между величинами A, B, C мы можемъ предположить слѣдующій порядокъ неравенства

$$A>B>C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе (2) будетъ выражать эллипсоидъ при всѣхъ значеніяхъ k, меньшихъ этихъ трехъ величинъ, однополый гиперболоидъ при значеніяхъ k, заключающихся между B и C и двуполый гиперболоидъ для значеній k, заключающихся между A и B. Наконецъ, при значеніяхъ k, большихъ всѣхъ трехъ величинъ A, B, C, уравненіе (2) вовсе не будетъ имѣть дѣйствительнаго геометрическаго значенія.

Такъ какъ абсолютныя величины разностей $A-k$, $B-k$, $C-k$ означаютъ квадраты полуосей поверхности (2), то заключаемъ, что съ приближеніемъ k къ одной изъ величинъ A, B, C одна изъ осей этой поверхности безпредѣльно уменьшается. Въ то же время двѣ другія оси приближаются къ соотвѣтственнымъ осямъ фокальной линіи.

Отсюда слѣдуетъ, что часть какой-либо главной плоскости, ограниченная фокальною линіей, можетъ быть разсматриваема, какъ предѣльная поверх-

ность, принадлежащая системѣ (2), и именно такая поверхность, одна изъ осей которой равняется нулю.

652. Возьмемъ какую-нибудь точку (x_1, y_1, z_1), и постараемся найти поверхность, проходящую черезъ эту точку и софокусную съ данною поверхностью (1).

Очевидно, что вопросъ сводится къ отысканію величины k изъ условія

$$\frac{x_1^2}{A-k}+\frac{y_1^2}{B-k}+\frac{z_1^2}{C-k}=1\,.$$

По уничтоженіи знаменателей, это равенство можно представить въ видѣ

$$(k-A)(k-B)(k-C)+x_1^2(k-B)(k-C)+y_1^2(k-A)(k-C)+$$
$$+z_1^2(k-A)(k-B)=0,$$

а это есть уравненіе третьей степени относительно искомаго k.

Легко видѣть, что это уравненіе всегда имѣетъ три дѣйствительные корня.

Въ самомъ дѣлѣ, первая часть его при подстановкѣ на мѣсто k послѣдовательно величинъ

$$-\infty, C, B, A, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

изъ которыхъ каждая слѣдующая больше предыдущей, получаетъ рядъ значеній, коихъ знаки послѣдовательно суть

$$-, +, -, +.$$

Это показываетъ, что въ каждомъ изъ трехъ промежутковъ между величинами (4) заключается дѣйствительное значеніе k, удовлетворяющее разсматриваемому уравненію.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, согласно сказанному выше, уравненіе (2) при такихъ значеніяхъ k представляетъ дѣйствительныя поверхности и притомъ трехъ различныхъ видовъ.

Итакъ, *чрезъ всякую точку пространства проходятъ три дѣйствительныя поверхности, софокусныя съ данною центральною поверхностью второго порядка, и изъ этихъ трехъ поверхностей одна есть эллипсоидъ, другая однополый гиперболоидъ и третья двуполый гиперболоидъ.*

653. Такъ какъ для всѣхъ дѣйствительныхъ поверхностей, выражаемыхъ уравненіемъ (2), имѣемъ $k < A$, то можно положить

$$A-k=a^2.$$

Далѣе, вслѣдствіе неравенствъ (3), можно положить

$$A-B=\lambda^2 \qquad \text{и} \qquad A-C=\mu^2.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$B - k = a^2 - \lambda^2 \qquad \text{и} \qquad C - k = a^2 - \mu^2,$$

и уравненіе (2) приметъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a^2 - \mu^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Здѣсь λ и μ суть величины вполнѣ опредѣленныя, одинаковыя для всѣхъ поверхностей системы. Ими опредѣляются общія фокальныя линіи этихъ поверхностей. Что же касается a, т. е. половины оси поверхности, принятой за ось OX, то, какъ зависящая отъ неопредѣленнаго параметра k, она также неопредѣленная.

Давая въ уравненіи (5) величинѣ a всѣ возможныя положительныя значенія, получимъ всѣ возможныя софокусныя поверхности, фокальныя линіи которыхъ выражаются на соотвѣтственныхъ плоскостяхъ координатъ уравненіями

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \lambda^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{z^2}{\mu^2 - \lambda^2} = 1,$$

$$\frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\mu^2} = -1.$$

654. Если уравненіе (5) удовлетворяется координатами x_1, y_1, z_1, то будемъ имѣть, по уничтоженіи въ немъ знаменателей,

$$a^2(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2) - x_1{}^2(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2) - y_1{}^2a^2(a^2 - \mu^2) -$$
$$- z_1{}^2a^2(a^2 - \lambda^2) = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} a^6 - a^4(\lambda^2 + \mu^2 + x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2) + \\ + a^2(\lambda^2\mu^2 + \lambda^2x_1{}^2 + \mu^2x_1{}^2 + \mu^2y_1{}^2 + \lambda^2z_1{}^2) - \lambda^2\mu^2x_1{}^2 = 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (6)$$

Это есть уравненіе третьей степени относительно a^2, опредѣляющее, какъ и выше, три поверхности системы (5), проходящія черезъ данную точку.

Обозначая корни этого уравненія черезъ $a_1{}^2$, $a_2{}^2$, $a_3{}^2$, можемъ, очевидно, положить

$$a_1 > \mu > a_2 > \lambda > a_3.$$

Вслѣдствіе этого можно ввести еще слѣдующее обозначеніе:

$$\left.\begin{aligned} a_1{}^2 - \lambda^2 = b_1{}^2, \quad a_2{}^2 - \lambda^2 = b_2{}^2, \quad \lambda^2 - a_3{}^2 = b_3{}^2 \\ a_1{}^2 - \mu^2 = c_1{}^2, \quad \mu^2 - a_2{}^2 = c_2{}^2, \quad \mu^2 - a_3{}^2 = c_3{}^2 \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (7)$$

при которомъ три поверхности системы (5), проходящія черезъ точку (x_1, y_1, z_1), выразятся уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1 \\ \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}-\frac{z^2}{c_2^2}=1 \\ \frac{x^2}{a_3^2}-\frac{y^2}{b_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}=1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8$$

Оси этихъ поверхностей опредѣляются по координатамъ x_1, y_1, z_1 изъ уравненія (6) и соотношеній (7).

655. Легко видѣть, что и обратно, полуосями a_1, a_2, a_3 трехъ софокусныхъ поверхностей опредѣляются вполнѣ абсолютныя величины координатъ ихъ общихъ точекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе извѣстнаго соотношенія между коэффиціентами и корнями алгебраическихъ уравненій, будемъ имѣть для уравненія (6)

$$\lambda^2+\mu^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$
$$\lambda^2\mu^2+(\lambda^2+\mu^2)x_1^2+\mu^2y_1^2+\lambda^2z_1^2=a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+a_2^2a_3^2,$$
$$\lambda^2\mu^2x_1^2=a_1^2a_2^2a_3^2.$$

Разсматривая a_1, a_2, a_3, λ и μ, какъ извѣстныя, будемъ имѣть, что эти соотношенія представляютъ систему уравненій первой степени относительно неизвѣстныхъ x_1^2, y_1^2, z_1^2.

Послѣднее уравненіе даетъ непосредственно

$$x_1^2=\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{\lambda^2\mu^2}$$

или, въ виду соотношеній (7),

$$x_1^2=\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{(a_1^2-b_1^2)(a_1^2-c_1^2)}.$$

Изъ перваго же уравненія находимъ

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a_3^2+b_3^2+c_1^2,$$

выраженіе, опредѣляющее разстояніе точки пересѣченія трехъ софокусныхъ поверхностей отъ ихъ общаго центра.

Уравненіе (6) или (5) есть не что иное, какъ результатъ замѣны въ уравненіи (2) неопредѣленнаго постояннаго k, чрезъ a посредствомъ предположенія

$$A-k=a^2.$$

Если сдѣлаемъ подобное же преобразованіе, полагая

$$B-k=b^2 \quad \text{или} \quad C-k=c^2,$$

то получимъ уравненія такія же, какъ (6), опредѣляющія полуоси b_1, b_2, b_3 или c_1, c_2, c_3 софокусныхъ поверхностей. Изъ этихъ уравненій найдемъ, такъ же какъ и выше, для координатъ y_1 и z_1 общихъ точекъ этихъ поверхностей слѣдующія выраженія:

$$y_1^2=\frac{b_1^2b_2^2b_3^2}{(a_1^2-b_1^2)(b_1^2-c_1^2)} \quad \text{и} \quad z_1^2=\frac{c_1^2c_2^2c_3^2}{(a_1^2-c_1^2)(b_1^2-c_1^2)}.$$

656. Подставивъ въ уравненія двухъ первыхъ изъ софокусныхъ поверхностей (8) координаты ихъ общей точки x_1, y_1, z_1 и вычтя результаты, получимъ

$$\frac{x_1^2(a_2^2-a_1^2)}{a_1^2a_2^2}+\frac{y_1^2(b_2^2-b_1^2)}{b_1^2b_2^2}+\frac{z_1^2(c_2^2+c_1^2)}{c_1^2c_2^2}=0.$$

Но, вслѣдствіе соотношеній (7), имѣемъ

$$(a_2^2-a_1^2)=(b_2^2-b_1^2)=-(c_2^2+c_1^2).$$

Поэтому послѣднее равенство обращается въ

$$\frac{x_1^2}{a_1^2a_2^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2b_2^2}-\frac{z_1^2}{c_1^2c_2^2}=0.$$

Въ такомъ видѣ оно представляетъ условіе перпендикулярности плоскостей

$$\frac{xx_1}{a_1^2}+\frac{yy_1}{b_1^2}+\frac{zz_1}{c_1^2}=1$$

и

$$\frac{xx_1}{a_2^2}+\frac{yy_1}{b_2^2}-\frac{zz_1}{c_2^2}=1,$$

касательныхъ къ каждой изъ поверхностей въ ихъ общей точкѣ.

Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *касательныя плоскости къ двумъ софокуснымъ центральнымъ поверхностямъ во всякой ихъ общей точкѣ перпендикулярны между собою.*

Отсюда слѣдуетъ, что касательныя плоскости къ тремъ софокуснымъ поверхностямъ въ общей ихъ точкѣ составляютъ прямой тригранный уголъ.

657. Изъ сказаннаго о софокусныхъ поверхностяхъ второго порядка слѣдуетъ, что пересѣченіемъ такихъ поверхностей можно опредѣлять положеніе точекъ въ пространствѣ, подобно тому какъ, при употребленіи прямолинейной системы координатъ, положеніе точки опредѣляется

пересѣченіемъ плоскостей, параллельнымъ тремъ даннымъ. Такимъ образомъ получается особаго рода *криволинейная* система координатъ.

Что касается собственно координатъ, т. е. величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ этой системѣ, то таковыми, какъ мы видѣли, представляются параметры софокусныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ эту точку, напр. длины полуосей a_1, a_2, a_3, имѣющихъ общее направленіе.

§ 3. Фокальныя линіи параболоидовъ.

658. Данное выше опредѣленіе фокусовъ (см. стр. 504) относится ко всѣмъ возможнымъ поверхностямъ второго порядка. Поэтому разысканіе фокусовъ поверхностей съ безконечно удаленнымъ центромъ, или параболоидовъ, достигается такъ же, какъ и для центральныхъ поверхностей, отождествленіемъ значенія ихъ уравненій съ уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\\-(k_1x+l_1y+m_1z+n_1)(k_2x+l_2y+m_2z+n_2)=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(1)$$

гдѣ α, β, γ суть координаты фокуса, а многочлены

$$k_1x+l_1y+m_1z+n_1$$

и

$$k_2x+l_2y+m_2z+n_2$$

суть первыя части уравненій двухъ плоскостей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ директрису.

Возьмемъ сперва эллиптическій параболоидъ, выражаемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Для того, чтобы предыдущее уравненіе (1) выражало также этотъ параболоидъ, должны имѣть мѣсто соотношенія

$$\left.\begin{aligned}1-m_1m_2=0,\\k_1l_2+l_1k_2=0,\quad k_1m_2+m_1k_2=0,\quad l_1m_2+m_1l_2=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}k_1n_2+n_1k_2+2\alpha=0,\quad l_1n_2+n_1l_2+2\beta=0,\\\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-n_1n_2=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots(4)$$

$$p(1-k_1k_2)=q(1-l_1l_2)=\frac{1}{2}(m_1n_2+n_1m_2+2\gamma).\quad\ldots(5)$$

Первое изъ этихъ соотношеній показываетъ, что постоянныя m_1 и m_2 не могутъ равняться нулю, и такъ какъ, въ силу слѣдующихъ трехъ

равенствъ (3), произведеніе $k_1 l_1 m_1 k_2 l_2 m_2$ равняется нулю, то, какъ видно изъ тѣхъ же равенствъ, должно быть или

$$k_1 = k_2 = 0 \qquad \text{или} \qquad l_1 = l_2 = 0 .$$

Если допустимъ послѣднее, то будемъ имѣть $\beta = 0$, такъ что искомые фокусы будутъ находиться на плоскости XOZ и уравненіе (1) приметъ видъ

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - (k_1 x + m_1 z + n_1)(k_2 x + m_2 z + n_2) = 0 .$$

Его можно представить также въ слѣдующемъ видѣ

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - u(x-\alpha')^2 - v(z-\gamma')^2 = 0 ,$$

для чего нужно только положить

$$k_1 k_2 = u , \qquad m_1 m_2 = v$$
$$k_1 n_2 + n_1 k_2 = -2u\alpha' , \quad m_1 n_2 + n_1 m_2 = -2v\gamma'$$
$$u\alpha'^2 + v\gamma'^2 = n_1 n_2 .$$

Изъ этихъ равенствъ четыре первыя опредѣляютъ значенія величинъ u, v, α', γ', послѣднее же есть ихъ слѣдствіе [1]. При этомъ очевидно, что α' и γ' суть координаты любой точки директрисы.

Сличая послѣднія равенства съ соотношеніями (3), (4) и (5), получимъ

$$v = 1 , \qquad \alpha = u\alpha' ,$$
$$\alpha^2 + \gamma^2 = u\alpha'^2 + v\gamma'^2 ,$$
$$p(1-u) = q = \gamma - v\gamma' ,$$

откуда

$$u = \frac{p-q}{p} , \qquad \alpha' = \frac{p\alpha}{p-q} , \qquad \gamma' = \gamma - q ,$$

и потому

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \frac{p\alpha^2}{p-q} + (\gamma - q)^2$$

или

$$\alpha^2 = (p-q)(2\gamma - q) .$$

Это показываетъ, что координаты фокусовъ, находящихся на плоскости XOZ, удовлетворяютъ уравненію

$$x^2 = (p-q)(2z-q) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

---

[1]) Это доказывается такъ же, какъ и для центральныхъ поверхностей (см. стр. 507).

Оно представляетъ, такимъ образомъ, *фокальную линію* параболоида (2) и именно параболу, ось которой совпадаетъ съ осью самой поверхности, а вершина находится отъ ея вершины на разстояніи $\frac{q}{2}$.

Если бы мы допустили, что

$$k_1 = k_2 = 0,$$

то имѣли бы изъ соотношеній (4) $\alpha = 0$ и, посредствомъ такихъ же точно преобразованій, какъ и предыдущія, обнаружили бы слѣдующую зависимость между координатами β и γ фокусовъ:

$$\beta^2 = (q-p)(2\gamma - p).$$

Слѣдовательно, на плоскости YOZ существуетъ также дѣйствительная фокальная линія параболоида, именно парабола, выражаемая уравненіемъ

$$y^2 = (q-p)(2z-p). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Она имѣетъ съ поверхностью общую ось и вершина ея отстоитъ отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{p}{2}$.

659. Такъ какъ параметры параболъ (6) и (7) имѣютъ противоположные знаки, то заключаемъ, что оси ихъ имѣютъ противоположныя направленія. Предполагая, что $q > p$, будемъ имѣть, что парабола (6) простирается въ безконечность въ отрицательномъ направленіи оси OZ, и легко видѣть, что она пересѣкается съ поверхностью въ точкахъ, координаты которыхъ получимъ, рѣшая совмѣстно уравненіе (6) съ уравненіемъ главнаго сѣченія

$$x^2 = 2pz;$$

въ результатѣ будемъ имѣть

$$z = \frac{q-p}{2}, \qquad x = \sqrt{p(q-p)}.$$

Это, какъ мы видѣли (см. стр. 487), суть координаты точекъ округленія.

Что же касается параболы (7), то она не пересѣкается съ поверхностью, ибо, рѣшая совмѣстно уравненіе (7) и уравненіе главнаго сѣченія

$$y^2 = 2qz,$$

получимъ для координаты y мнимыя выраженія.

660. Предыдущія аналитическія преобразованія будутъ относиться и къ гиперболическому параболоиду

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

если замѣнимъ въ нихъ q чрезъ $-q$.

Отсюда прямо заключаемъ, что гиперболическій параболоидъ (8) имѣетъ также двѣ фокальныя линіи на своихъ главныхъ плоскостяхъ и именно параболы, выражаемыя уравненіями

$$x^2=(p+q)(2z+q)$$

и

$$y^2=-(p+q)(2z-p).$$

Обѣ эти линіи не пересѣкаются съ поверхностью.

661. Изъ того, что только для параболоидовъ фокальныя линіи суть параболы, слѣдуетъ, что всякая поверхность второго порядка, софокусная съ даннымъ параболоидомъ, есть также параболоидъ.

Положимъ, что данный параболоидъ выражается уравненіемъ (2). Такъ какъ всякій софокусный съ нимъ параболоидъ имѣетъ общую съ нимъ ось, то его уравненіе относительно той же системы координатъ будетъ имѣть видъ

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z-c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ a, b, c суть неопредѣленныя постоянныя.

Если перенесемъ начало координатъ въ вершину этого параболоида, не измѣняя при этомъ направленія осей, то формулы преобразованія координатъ будутъ

$$x=x', \quad y=y', \quad z=z'+\frac{c}{2},$$

и уравненіе (9) преобразуется въ

$$\frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b}=2z'.$$

Такъ какъ оно имѣетъ видъ уравненія (2), то заключаемъ, что уравненія его фокальныхъ линій будутъ

$$x'^2=(a-b)(2z'-b)$$

и

$$y'^2=(b-a)(2z'-a).$$

Понятно, что относительно первоначальной системы координатъ эти линіи будутъ выражаться уравненіями

$$x^2 = (a-b)(2z-c-b),$$
$$y^2 = (b-a)(2z-c-a).$$

Вслѣдствіе того, что параболоиды (2) и (9) суть, по предположенію, софокусные, послѣднія уравненія должны имѣть то же значеніе, какъ и уравненія (6) и (7), а для этого должно имѣть

$$b+c=q \quad \text{и} \quad a+c=p.$$

Уравненіе (9) приметъ въ такомъ случаѣ видъ

$$\frac{x^2}{p-c}+\frac{y^2}{q-c}=2z-c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

При неопредѣленномъ c оно представляетъ, слѣдовательно, систему софокусныхъ параболоидовъ. Всякому значенію c соотвѣтствуетъ единственная и опредѣленная поверхность этой системы.

Очевидно, что для всѣхъ значеній c, заключающихся между p и q, параболоиды (10) суть гиперболическіе, а для всѣхъ значеній c, большихъ или меньшихъ обѣихъ этихъ величинъ,—эллиптическіе.

662. Значенія параметра c, опредѣляющія параболоиды системы (10), которые проходятъ черезъ данную точку (x_1, y_1, z_1), опредѣлятся изъ условія

$$\frac{x_1^2}{p-c}+\frac{y_1^2}{q-c}+2z_1-c.$$

По уничтоженіи знаменателей это условіе обращается въ

$$(c-p)(c-q)(c-2z_1)-(c-p)y_1^2-(c-q)x_1^2=0 \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Это есть уравненіе третьей степени относительно c, имѣющее три дѣйствительные корня. Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что $q>p$, и давая величинѣ c послѣдовательно возрастающія значенія

$$-\infty,\ p,\ q,\ +\infty, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

убѣждаемся, что первая часть уравненія (11) получаетъ значенія, имѣющія знаки

$$-,\ +,\ -,\ +.$$

Слѣдовательно, въ каждомъ изъ трехъ промежутковъ между величинами (12) заключается по одному дѣйствительному корню разсматриваемаго уравненія.

Отсюда заключаемъ, что чрезъ всякую точку пространства проходятъ три софокусные параболоида системы (10) и изъ этихъ параболоидовъ два эллиптическіе и одинъ гиперболическій.

663. Обозначая корни уравненія (11) чрезъ c_1, c_2, c_3, будемъ имѣть, что параболоиды системы (10), проходящіе черезъ данную точку (x_1, y_1, z_1), выражаются уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p-c_1}+\frac{y^2}{q-c_1}&=2z-c_1\\ \frac{x^2}{p-c_2}+\frac{y^2}{q-c_2}&=2z-c_2\\ \frac{x^2}{p-c_3}+\frac{y^2}{q-c_3}&=2z-c_3 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(13)$$

Уравненія касательныхъ плоскостей къ этимъ поверхностямъ въ данной точкѣ, какъ извѣстно, будутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{xx_1}{p-c_1}+\frac{yy_1}{q-c_1}&=z+z_1-c_1\\ \frac{xx_1}{p-c_2}+\frac{yy_1}{q-c_2}&=z+z_1-c_2\\ \frac{xx_1}{p-c_3}+\frac{yy_1}{q-c_3}&=z+z_1-c_3 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(14)$$

Если подставимъ въ первыя два изъ уравненій (13) координаты x_1, y_1, z_1 и результаты вычтемъ, то получимъ равенство

$$\frac{x_1^2}{(p-c_1)(p-c_2)}+\frac{y_1^2}{(q-c_1)(q-c_2)}+1=0,$$

представляющее, очевидно, условіе перпендикулярности первыхъ двухъ изъ плоскостей (14).

Такимъ образомъ, видимъ, что касательныя плоскости къ двумъ софокуснымъ параболоидамъ въ ихъ общей точкѣ перпендикулярны между собою, свойство, принадлежащее также и центральнымъ поверхностямъ.

664. Мы видѣли выше (см. стр. 487 и 502), что параболоиды могутъ быть разсматриваемы, какъ предѣлы, къ которымъ стремятся центральныя поверхности при безконечномъ возрастаніи ихъ осей. Понятно поэтому, что свойства фокальныхъ линій центральныхъ поверхностей, имѣющія мѣсто при всякихъ размѣрахъ осей, должны оставаться справед-

ливыми и для предѣльнаго случая, т. е. для параболоидовъ. Таково, напр., свойство, что прямая, соединяющая фокусъ съ основаніемъ соотвѣтствующей ему директрисы, есть нормаль къ фокальной линіи (см. стр. 510). Къ такимъ же свойствамъ относится и доказанное сейчасъ свойство софокусныхъ параболоидовъ пересѣкаться ортогонально, т. е. такъ, что касательныя плоскости въ общихъ точкахъ перпендикулярны между собою.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

СОКРАЩЕННЫЙ СПОСОБЪ ВЪ ПРИМѢНЕНІИ КЪ ПОВЕРХНОСТЯМЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Системы поверхностей второго порядка.

665. Положимъ, что намъ даны двѣ какія-нибудь поверхности второго порядка, выражающіяся относительно какой-либо прямолинейной системы координатъ уравненіями

$$S_1 = 0 \quad \text{и} \quad S_2 = 0, \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ S_1 и S_2 суть сокращенно обозначенные многочлены второй степени вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K.$$

Всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ одновременно обоимъ этимъ уравненіямъ, суть, очевидно, точки, принадлежащія линіи пересѣченія поверхностей. Можетъ случиться, однако, что всѣ эти точки будутъ мнимыя. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что поверхности пересѣкаются по мнимой линіи.

Такъ какъ всякою плоскостью поверхности (1) пересѣкаются по линіямъ второго порядка, а такія линіи имѣютъ, вообще говоря, четыре (дѣйствительныя или мнимыя) общія точки, то заключаемъ, что линія пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка есть линія четвертаго порядка [1].

Въ частныхъ случаяхъ, какъ увидимъ ниже, эта линія можетъ быть совокупностью линій низшихъ порядковъ.

666. Обозначая черезъ k какое-нибудь постоянное количество, будемъ имѣть, что уравненіе

$$S_1 - kS_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

[1]) Вообще, порядокъ алгебраической кривой линіи въ пространствѣ опредѣляется числомъ точекъ пересѣченія ея съ какою угодно плоскостью.

выражаетъ поверхность, проходящую черезъ линію пересѣченія поверхностей (1). Если же k есть неопредѣленное постоянное, то послѣднее уравненіе представляетъ цѣлую систему поверхностей второго порядка, пересѣкающихся по одной и той же линіи (дѣйствительной или мнимой).

Такая система называется пучкомъ поверхностей или линейною системою одного измѣренія.

Очевидно, что поверхность, принадлежащая пучку (2), вполнѣ опредѣляется одною ея точкою, не находящеюся на линіи пересѣченія всѣхъ поверхностей пучка. Въ самомъ дѣлѣ, по координатамъ данной точки для постояннаго k найдемъ единственное и опредѣленное значеніе, и если обозначимъ черезъ S_1' и S_2' результаты подстановки этихъ координатъ въ первыя части уравненій (1), то уравненіе искомой поверхности будетъ

$$S_1 S_2' - S_2 S_1' = 0 .$$

667. Выше было доказано (см. стр. 385), что девятью точками, принадлежащими поверхности второго порядка, эта поверхность опредѣляется вполнѣ. Если же приложимъ тѣ же самыя разсужденія къ отысканію поверхности, проходящей черезъ восемь данныхъ точекъ, то замѣтимъ безъ труда, что уравненіе искомой поверхности не будетъ вполнѣ опредѣленное, и такъ какъ оно будетъ содержать одинъ неопредѣленный параметръ въ первой степени, то, очевидно, приводится къ виду (2).

Это показываетъ, что всѣ поверхности второго порядка, проходящія черезъ восемь произвольно данныхъ точекъ, составляютъ, вообще говоря, пучекъ, т. е. пересѣкаются между собою по одной и той же линіи.

Слѣдовательно, восемь точекъ въ пространствѣ, хотя и не достаточны для полнаго опредѣленія проходящей черезъ нихъ поверхности второго порядка, опредѣляютъ, тѣмъ не менѣе, цѣлую линію, принадлежащую этой поверхности, линію, по которой она пересѣкается съ безчисленнымъ множествомъ другихъ такихъ же поверхностей.

Изъ сказаннаго видимъ также, что девять точекъ въ пространствѣ не могутъ опредѣлять проходящую черезъ нихъ поверхность второго порядка въ томъ случаѣ, когда всѣ онѣ лежатъ на одной кривой пересѣченія, опредѣляемой какими-нибудь восемью изъ нихъ. Въ этомъ случаѣ девятая точка не представляетъ новаго независимаго условія для опредѣленія поверхности, такъ какъ условіе, что поверхность должна проходить черезъ эту точку, есть необходимое слѣдствіе условія, что она проходитъ черезъ восемь первыхъ точекъ.

668. Положимъ, что намъ даны три поверхности второго порядка, не принадлежащія одному пучку и выражающіяся сокращенно уравненіями

$$S_1 = 0 , \quad S_2 = 0 , \quad S_3 = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Такъ какъ результатъ исключенія двухъ изъ неизвѣстныхъ x, y, z изъ этихъ уравненій есть, вообще говоря, уравненіе восьмой степени относительно третьяго, то заключаемъ, что три поверхности второго порядка имѣютъ восемь общихъ точекъ, изъ которыхъ нѣкоторыя (или всѣ) могутъ быть мнимыя.

Далѣе, очевидно, что уравненіе

$$S_1 - kS_2 - lS_3 = 0 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ k и l суть постоянныя, выражаетъ поверхность второго порядка, проходящую черезъ тѣ же общія точки. При неопредѣленныхъ k и l этимъ уравненіемъ представляется система поверхностей второго порядка, имѣющихъ восемь общихъ точекъ. Это есть система двухъ измѣреній.

По координатамъ двухъ какихъ-нибудь точекъ, не принадлежащихъ всѣмъ поверхностямъ системы (4), постоянныя k и l могутъ быть найдены, и такъ какъ для этихъ постоянныхъ получаются единственныя значенія, то заключаемъ, что двумя данными точками опредѣляется, вообще говоря, единственная поверхность, принадлежащая системѣ (4).

Обозначая результаты подстановки въ первыя части уравненій (3) координатъ первой изъ данныхъ точекъ чрезъ S_1', S_2', S_3', а второй чрезъ S_1'', S_2'', S_3'', будемъ имѣть, что уравненіе поверхности, принадлежащей системѣ (4) и проходящей черезъ данныя точки, есть

$$\begin{vmatrix} S_1 \,, & S_2 \,, & S_3 \\ S_1' , & S_2' , & S_3' \\ S_1'' , & S_2'' , & S_3'' \end{vmatrix} = 0 .$$

669. Если дано семь точекъ, чрезъ которыя должна проходить поверхность второго порядка, то, представивъ уравненіе этой поверхности въ общемъ видѣ и выразивши подстановкою въ него координатъ данныхъ точекъ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты этого уравненія, мы будемъ имѣть достаточно данныхъ для исключенія семи изъ этихъ коэффиціентовъ. Въ результатѣ исключенія получимъ уравненіе, содержащее только два неопредѣленныхъ параметра и, притомъ, первой степени относительно этихъ параметровъ, т. е. уравненіе вида (4).

Такъ какъ всѣ поверхности системы (4) имѣютъ восемь общихъ точекъ, то убѣждаемся, что семь точекъ, данныхъ въ пространствѣ, будучи недостаточны для опредѣленія проходящей чрезъ нихъ поверхности второго порядка, тѣмъ не менѣе, опредѣляютъ восьмую точку этой поверхности, именно точку, въ которой она пересѣкается съ безчисленнымъ множествомъ другихъ такихъ же поверхностей, проходящихъ чрезъ данныя точки.

Мы видѣли, что восемью точками вполнѣ опредѣляется линія пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка, но это не относится,

какъ теперь видно, къ тому случаю, когда эти точки составляютъ систему точекъ пересѣченія трехъ такихъ поверхностей. Въ самомъ дѣлѣ, каждая изъ точекъ этой системы не представляетъ, для опредѣленія названной линіи, особаго независимаго условія, а есть необходимое слѣдствіе условія, представляемаго въ совокупности семью остальными точками.

670. Въ уравненіи (2), представляющемъ пучекъ поверхностей, одинъ или оба многочлена S_1 и S_2 могутъ разлагаться на множители первой степени. Эти случаи заслуживаютъ особаго вниманія.

Положимъ, что S_2 есть произведеніе двухъ многочленовъ первой степени U_2 и V_2, такъ что уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$S_1 - kU_2V_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Линія пересѣченія всѣхъ поверхностей, выражаемыхъ такимъ уравненіемъ, будетъ состоять, очевидно, изъ двухъ кривыхъ второго порядка, по которымъ поверхность

$$S_1 = 0$$

пересѣкается двумя плоскостями

$$U_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad V_2 = 0.$$

Допустимъ, что прямая, по которой пересѣкаются послѣднія плоскости, встрѣчаетъ поверхность $S_1 = 0$ въ точкахъ M и N, и вообразимъ, что въ точкѣ M проведены двѣ касательныя къ названнымъ кривымъ пересѣченія.

Эти касательныя будутъ также касательными прямыми къ любой изъ поверхностей, выражаемыхъ уравненіемъ (5). Слѣдовательно, проходящая черезъ нихъ плоскость есть касательная плоскость ко всѣмъ этимъ поверхностямъ въ точкѣ M. То же самое должно быть сказано и о точкѣ N.

Двѣ поверхности, имѣющія въ общей точкѣ общую касательную плоскость, называются *соприкасающимися* между собою. Изъ сказаннаго видимъ, что всѣ поверхности пучка (5) соприкасаются между собою въ двухъ точкахъ или, какъ еще говорятъ, имѣютъ двойное соприкосновеніе.

Точки M и N могутъ быть мнимыми. Въ этомъ случаѣ и касательныя въ нихъ плоскости къ поверхности $S_1 = 0$ будутъ мнимыя, но такъ какъ, тѣмъ не менѣе, онѣ имѣютъ такое же отношеніе и ко всѣмъ прочимъ поверхностямъ пучка (5), т. е. также суть къ нимъ касательныя (хотя и мнимыя), то поверхности пучка должно считать имѣющими мнимое двойное соприкосновеніе (въ двухъ мнимыхъ сопряженныхъ точкахъ).

671. Не трудно убѣдиться и въ обратномъ, а именно, что всякія двѣ поверхности второго порядка, имѣющія двойное соприкосновеніе, пересѣкаются между собою по двумъ линіямъ второго порядка.

Дѣйствительно, пусть M и N суть точки соприкосновенія поверхностей и K какая-нибудь точка линіи ихъ пересѣченія. Плоскость, проходящая черезъ эти три точки, пересѣчетъ обѣ поверхности по двумъ линіямъ второго порядка, имѣющимъ три общія точки и въ двухъ изъ нихъ M и N общія касательныя. Такія линіи, какъ извѣстно, совпадаютъ.

672. Если поверхность $S_1 = 0$ есть сфера и система координатъ прямоугольная, то уравненіе (5) можно представить въ видѣ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2-kU_2V_2=0,$$

гдѣ α, β, γ суть координаты центра, а r радіусъ сферы.

Полагая $r=0$, получимъ отсюда извѣстное уравненіе поверхности второго порядка (см. стр. 505), для которой точка (α, β, γ) есть фокусъ, а линія пересѣченія плоскостей $U_2=0$ и $V_2=0$ соотвѣтствующая ему директриса.

Отсюда видимъ, что фокусы поверхности второго порядка могутъ быть разсматриваемы, какъ центры безконечно малыхъ сферъ, имѣющихъ съ поверхностью двойное соприкосновеніе.

Само собою понятно, что это соприкосновеніе не будетъ мнимымъ только тогда, когда фокусъ есть точка, принадлежащая самой поверхности, именно точка округленія (см. стр. 512).

673. Если плоскости $U_2=0$ и $V_2=0$ совпадаютъ, то уравненіе (5) обращается въ

$$S_1-kU_2^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

и выражаетъ, очевидно, пучекъ поверхностей, имѣющихъ безчисленное множество точекъ соприкосновенія. Это суть всѣ точки линіи, по которой каждая изъ поверхностей пучка пересѣкается плоскостью $U_2=0$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ двѣ поверхности пучка не могутъ имѣть другихъ общихъ точекъ, кромѣ точекъ этой линіи, то всякая плоскость, проходящая черезъ двѣ какія-нибудь точки этой линіи, будетъ пересѣкать обѣ поверхности по кривымъ второго порядка, соприкасающимся въ этихъ точкахъ. Слѣдовательно, и сами поверхности будутъ соприкасаться въ тѣхъ же точкахъ.

Если поверхность $S_1=0$ есть сфера и за плоскость XOY прямоугольной системы координатъ принята касательная къ этой сферѣ плоскость, то уравненіе (6) будетъ имѣть видъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-r)^2-r^2-kU_2^2=0.$$

Полагая здѣсь $z=0$, получимъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-kL^2=0,$$

гдѣ L есть многочленъ первой степени съ двумя неизвѣстными x и y.

Послѣднее уравненіе выражаетъ на плоскости XOY кривую второго порядка, для которой точка $(\alpha . \beta)$ соприкосновенія этой плоскости со сферою есть одинъ изъ фокусовъ (см. стр. 245).

Отсюда убѣждаемся, что если поверхность второго порядка имѣетъ безчисленное множество точекъ соприкосновенія со сферою, то всякая плоскость, касательная къ сферѣ, пересѣкаетъ поверхность по линіи второго порядка, для которой точка соприкосновенія сѣкущей плоскости со сферою есть одинъ изъ фокусовъ.

Этимъ свойствомъ мы пользовались при разсмотрѣніи линій второго порядка, какъ сѣченій прямого круглаго конуса (см. стр. 244).

674. Извѣстно, что уравненіе первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

выражаетъ безконечно удаленную плоскость, когда въ немъ коэффиціенты A, B, C обращаются въ нуль.

На этомъ основаніи уравненіе

$$S + U = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ S есть какой-нибудь многочленъ второй степени, а U первой, можетъ быть разсматриваемо, какъ частный случай уравненія (5), когда одна изъ плоскостей

$$U_2 = 0, \quad V_2 = 0,$$

есть безконечно удаленная.

Слѣдовательно, полагая, что всѣ коэффиціенты многочлена U суть неопредѣленные, будемъ имѣть въ уравненіи (7) общее выраженіе всѣхъ поверхностей второго порядка, имѣющихъ съ поверхностью

$$S = 0$$

общую безконечно удаленную линію второго порядка (дѣйствительную или мнимую). Такія поверхности называются *подобными и подобно расположенными*.

Отсюда заключаемъ, что двѣ поверхности второго порядка будутъ подобны и подобно расположены, когда въ ихъ уравненіяхъ коэффиціенты всѣхъ членовъ второго измѣренія пропорціональны.

Всякія двѣ сферы суть, слѣдовательно, поверхности подобныя и подобно расположенныя.

675. Двѣ подобныя и подобно расположенныя поверхности второго порядка, кромѣ безконечно удаленной кривой, имѣютъ еще общую кривую второго порядка, лежащую въ опредѣленной плоскости.

Полагая, что U_1, U_2, U_3 суть три какіе-нибудь многочлена первой степени, мы можемъ уравненія трехъ подобныхъ и подобно расположенныхъ поверхностей разсматривать въ видѣ

$$S-U_1=0\,,\quad S-U_2=0\,,\quad S-U_3=0\,.$$

Вычитая эти уравненія одно изъ другого, получимъ

$$U_2-U_1=0\,,\quad U_1-U_3=0\,,\quad U_3-U_2=0.$$

Это суть, очевидно, уравненія трехъ плоскостей, въ которыхъ лежатъ линіи пересѣченія поверхностей.

Такъ какъ сумма первыхъ частей этихъ уравненій тождественно равняется нулю, то заключаемъ, что *плоскости, въ которыхъ лежатъ линіи пересѣченія трехъ подобныхъ и подобно расположенныхъ поверхностей второго порядка, проходятъ черезъ одну прямую.*

Для случая сферъ это свойство было доказано выше (см. стр. 430).

676. Положимъ теперь, что въ уравненіи (2) оба многочлена S_1 и S_2 разлагаются на множители первой степени, такъ что это уравненіе принимаетъ видъ

$$U_1V_1-kU_2V_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Линія пересѣченія всѣхъ поверхностей, имъ выражаемыхъ, будетъ въ этомъ случаѣ состоять изъ четырехъ прямыхъ, по которымъ плоскости

$$U_1=0\,,\quad V_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

пересѣкаются плоскостями

$$U_2=0,\quad V_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Слѣдовательно, всѣ эти поверхности суть линейчатыя, имѣющія четыре общія прямолинейныя образующія, изъ которыхъ двѣ принадлежатъ одной системѣ и двѣ другой (см. стр. 464 и слѣд.).

Такъ какъ на всякой линейчатой поверхности можно взять четыре прямолинейныя образующія, принадлежащія по двѣ къ разнымъ системамъ и представляющія въ совокупности линію пересѣченія этой поверхности съ двумя парами плоскостей, то уравненіе (8) можетъ быть разсматриваемо, какъ выражающее какую угодно линейчатую поверхность второго порядка. Полагая, что въ немъ U_1, U_2, V_1, V_2 суть многочлены первой степени въ нормальной формѣ, приходимъ къ заключенію, что *всякая линейчатая поверхность второго порядка можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ произведеніе разстояній отъ двухъ данныхъ плоскостей находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній отъ двухъ другихъ данныхъ плоскостей.*

Уравненіе (8) можетъ выражать и не линейчатую поверхность, но въ этомъ случаѣ множители U_1, V_1, U_2, V_2 будутъ содержать мнимые коэффиціенты, такъ что плоскости, выражаемыя уравненіями (9) и (10), будутъ мнимыя.

677. Замѣтимъ, что уравненіе (8) удовлетворяется всѣми значеніями неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ совмѣстно уравненіямъ

$$lU_1 - kU_2 = 0$$

и

$$V_1 - lV_2 = 0.$$

Эти же послѣднія уравненія, при данномъ k и неопредѣленномъ l, представляютъ два пучка плоскостей, связанныхъ проективнымъ соотвѣтствіемъ (см. стр. 98), такъ какъ всякой плоскости одного пучка, опредѣляемой какимъ-нибудь значеніемъ параметра l, соотвѣтствуетъ единственная плоскость другого, опредѣляемая тѣмъ же значеніемъ l.

Поэтому заключаемъ, что *всякая линейчатая поверхность второго порядка можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто линій пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей двухъ пучковъ, находящихся въ проективномъ соотвѣтствіи.*

Легко убѣдиться также, что всякіе два проективно-соотвѣтственные пучка плоскостей образуютъ поверхность второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія данныхъ пучковъ мы можемъ разсматривать въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} U_1 - kU_2 &= 0 \\ V_1 - k'V_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и

Но извѣстно, что проективное соотвѣтствіе между всякими двумя системами первой степени, элементы которыхъ опредѣляются параметрами k и k', устанавливается уравненіемъ вида

$$Akk' + Bk + Ck' + D = 0,$$

гдѣ A, B, C, D данныя постоянныя величины.

Исключая k и k' изъ этого уравненія и уравненій (11) пучковъ, получимъ

$$AU_1V_1 + BU_1V_2 + CU_2V_1 + DU_2V_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

а это есть уравненіе поверхности второго порядка.

678. Назовемъ чрезъ L_1 прямую, черезъ которую проходятъ всѣ плоскости перваго изъ пучковъ (11), и чрезъ L_2 прямую пересѣченія всѣхъ плоскостей втораго изъ этихъ пучковъ. Всякая прямая, по которой пересѣкаются соотвѣтственныя плоскости обоихъ пучковъ, будетъ, очевидно, пересѣкаться съ каждою изъ прямыхъ L_1 и L_2 [1]).

[1]) Прямыя L_1 и L_2 нужно предполагать не пересѣкающимися и не параллельными. Въ противномъ случаѣ поверхность (12) будетъ коническая или цилиндрическая.

Плоскости перваго изъ пучковъ (11), пересѣкая прямую L_2, образуютъ на ней рядъ точекъ, точно такъ же, какъ и плоскости второго пучка на прямой L_1. Оба эти ряда точекъ будутъ, слѣдовательно, проективно соотвѣтственные между собою, и прямыя пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей пучковъ (11) будутъ въ то же время соединяющими соотвѣтственныя точки этихъ рядовъ.

Такимъ образомъ видимъ, что *всякая линейчатая поверхность второго порядка можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто прямыхъ, соединяющихъ соотвѣтственныя точки двухъ рядовъ, находящихся въ проективномъ соотвѣтствіи.*

Частный случай проективнаго соотвѣтствія представляютъ ряды точекъ, дѣлящихъ двѣ прямыя на пропорціональные отрѣзки. Такіе ряды называются подобными.

Мы видѣли выше (см. стр. 302), что только въ этомъ случаѣ поверхность, образуемая прямыми, соединяющими соотвѣтственныя точки, есть гиперболическій параболоидъ. Во всѣхъ же другихъ случаяхъ она есть, слѣдовательно, однополый гиперболоидъ.

679. Возьмемъ опять уравненіе

$$S_1 - kS_2 = 0,$$

представляющее пучекъ поверхностей второго порядка. Будучи второй степени, оно имѣетъ видъ

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ каждый коэффиціентъ содержитъ неопредѣленный параметръ k въ первой степени.

Всякое соотношеніе между коэффиціентами уравненія поверхности выражаетъ нѣкоторое свойство этой поверхности. Опредѣляя k изъ такого соотношенія, мы найдемъ, слѣдовательно, въ числѣ поверхностей разсматриваемаго пучка такія, которыя обладаютъ даннымъ свойствомъ.

Извѣстно, напр. (см. стр. 396), что условіе, при которомъ поверхность (13) есть конусъ, выражается равенствомъ

$$\begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K \end{vmatrix} = 0.$$

Здѣсь первая часть есть однородный многочленъ четвертой степени относительно коэффиціентовъ A, B, $C \ldots K$. Слѣдовательно, и относи-

тельно параметра k это равенство представляетъ уравненіе четвертой степени. Это приводитъ къ заключенію, что *въ пучкѣ поверхностей второго порядка существуетъ, вообще говоря, четыре коническія поверхности.*

§ 2. Взаимныя поляры.

680. По отношенію къ какой-либо данной поверхности второго порядка всякая точка имѣетъ опредѣленную полярную плоскость и всякая плоскость опредѣленный полюсъ (см. стр. 419).

Полюсы всѣхъ плоскостей, касательныхъ къ какой-нибудь поверхности, образуютъ, очевидно, нѣкоторую другую поверхность и, обратно, полюсы касательныхъ плоскостей второй поверхности суть точки, принадлежащія первой. Это слѣдуетъ изъ того, что полюсы двухъ плоскостей, приближающихся при перемѣщеніи къ совпаденію, также сближаются до совпаденія, и обратно.

Двѣ поверхности, изъ которыхъ каждая есть геометрическое мѣсто полюсовъ плоскостей, касательныхъ къ другой, называются *взаимно-полярными* или *взаимными полярами.*

Такъ какъ чрезъ всякую прямую линію можно провести къ поверхности второго порядка не болѣе двухъ касательныхъ плоскостей, то заключаемъ изъ свойствъ полярныхъ плоскостей и ихъ полюсовъ (см. стр. 420), что всякая прямая пересѣкаетъ поверхность, взаимно-полярную съ какою-нибудь поверхностью второго порядка, не болѣе какъ въ двухъ точкахъ. Это показываетъ, что *взаимная поляра всякой поверхности второго порядка есть также поверхность второго порядка.*

681. На основаніи зависимости между взаимными полярами легко обнаруживаются многія свойства поверхностей второго порядка, имѣющія характеръ взаимности со свойствами уже извѣстными. Такъ напр., легко видѣть, что девятью касательными плоскостями поверхность второго порядка опредѣляется вполнѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, взявши полюсы девяти данныхъ плоскостей по отношенію къ какой-нибудь поверхности второго порядка, будемъ имѣть, что этими точками опредѣляется вполнѣ поверхность, взаимно-полярная съ искомою. Съ тѣмъ вмѣстѣ опредѣлится, очевидно, и искомая поверхность.

Способъ доказательства, состоящій въ заключеніи о свойствахъ фигуръ въ пространствѣ по свойствамъ ихъ взаимныхъ поляръ, обыкновенно называютъ *способомъ взаимныхъ поляръ* (см. стр. 282). Заключенія такого рода можно иногда дѣлать непосредственно въ силу закона двойственности (см. стр. 340), такъ какъ всѣ полярныя свойства поверхностей второго порядка сами суть его слѣдствія.

682. Положимъ, что намъ даны двѣ поверхности второго порядка. Ихъ взаимныя поляры, будучи также поверхностями второго порядка,

пересѣкаются по нѣкоторой линіи четвертаго порядка. Каждая точка этой линіи будетъ имѣть полярною плоскостью общую касательную плоскость къ обѣимъ даннымъ поверхностямъ. Слѣдовательно, всѣ такія плоскости непрерывно слѣдуютъ одна за другою также точно, какъ точки кривой линіи, представляя какъ бы послѣдовательныя положенія одной и той же плоскости, катящейся по обѣимъ даннымъ поверхностямъ.

Линія пересѣченія двухъ безконечно близкихъ общихъ касательныхъ плоскостей къ двумъ поверхностямъ, при совпаденіи этихъ плоскостей, обращается въ общую касательную прямую. Отсюда слѣдуетъ, что общія касательныя плоскости къ двумъ даннымъ поверхностямъ второго порядка, слѣдуя непрерывно одна за другою, огибаетъ нѣкоторую линейчатую поверхность, образующія которой суть общія касательныя прямыя къ даннымъ поверхностямъ. Такъ какъ эта линейчатая поверхность огибается катящеюся плоскостью, которая во всякомъ своемъ положеніи соприкасается съ нею по прямой, то въ свою очередь она можетъ катиться по плоскости и быть, слѣдовательно, развертываема или разгибаема на плоскость.

Изъ сказаннаго видимъ, что взаимная поляра линіи пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка есть развертываемая линейчатая поверхность, соприкасающаяся съ взаимными полярами этихъ поверхностей.

Въ частномъ случаѣ, когда линія пересѣченія двухъ поверхностей состоитъ изъ двухъ кривыхъ второго порядка, эта развертывающаяся линейчатая поверхность будетъ состоять изъ двухъ конусовъ. Такъ будетъ, напр., въ томъ случаѣ, когда разсматриваемыя поверхности суть двѣ сферы.

Развертываемая линейчатая поверхность, соприкасающаяся съ двумя поверхностями второго порядка, будетъ, очевидно, соприкасаться съ безчисленнымъ множествомъ другихъ такихъ же поверхностей, именно съ взаимными полярами всѣхъ поверхностей, имѣющихъ общую линію пересѣченія.

683. Посредствомъ способа взаимныхъ поляръ обнаруживаются многія свойства развертываемой линейчатой поверхности, соприкасающейся съ двумя поверхностями второго порядка, свойства, представляющіяся взаимными со свойствами линіи пересѣченія такихъ же поверхностей. Такъ, напр.. очевидно, что чрезъ всякую точку въ пространствѣ можно провести, вообще говоря, четыре касательныя плоскости къ такой развертываемой поверхности, соприкасающіяся съ нею по прямымъ.

Далѣе, очевидно, что такая развертываемая поверхность опредѣляется вполнѣ восемью касательными къ ней плоскостями.

Легко видѣть отсюда, что доказанная выше опредѣляемость поверхности второго порядка девятью ея касательными плоскостями не имѣетъ

мѣста въ случаѣ, когда всѣ эти плоскости суть касательныя къ одной и той же развертываемой поверхности, соприкасающейся съ двумя поверхностями второго порядка.

Изъ свойствъ взаимныхъ поляръ заключаемъ также, что три поверхности второго порядка имѣютъ, вообще говоря, восемь общихъ касательныхъ плоскостей и что семью изъ этихъ плоскостей вполнѣ опредѣляется положеніе восьмой.

Отсюда слѣдуетъ, далѣе, что развертываемая поверхность, соприкасающаяся съ двумя поверхностями второго порядка, не будетъ опредѣляться восемью касательными къ ней плоскостями въ томъ случаѣ, когда эти плоскости представляютъ систему общихъ касательныхъ плоскостей къ тремъ поверхностямъ второго порядка.

684. Положимъ теперь, что намъ даны три плоскости, касающіяся какой-нибудь поверхности второго порядка въ точкахъ M_1, M_2, M_3, и пусть N_0 будетъ вершина образуемаго этими плоскостями триграннаго угла.

Вообразимъ плоскость, проходящую черезъ точки M_1, M_2, M_3. Она пересѣчетъ поверхность по нѣкоторой линіи второго порядка, а три данныя плоскости по прямымъ, составляющимъ треугольникъ, описанный около этой линіи.

Въ такомъ треугольникѣ прямыя, соединяющія вершины съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ, проходятъ, какъ извѣстно (см. стр. 276), черезъ одну точку. Обозначимъ эту точку черезъ P_0.

Такъ какъ три плоскости $N_0M_1P_0$, $N_0M_2P_0$ и $N_0M_3P_0$ проходятъ также черезъ вершины этого треугольника, а слѣдовательно и черезъ линіи пересѣченія данныхъ плоскостей, и имѣютъ, притомъ, двѣ общія точки N_0 и P_0, то приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Три плоскости, проходящія черезъ ребра описаннаго около поверхности второго порядка триграннаго угла и черезъ точки прикосновенія противоположныхъ граней этого угла, пересѣкаются между собою по одной прямой.

685. Присоединимъ къ тремъ даннымъ плоскостямъ четвертую, также касательную къ разсматриваемой поверхности въ какой-нибудь точкѣ M_0, и пусть точки пересѣченія этой плоскости съ ребрами триграннаго угла, образуемаго прежними плоскостями, будутъ N_1, N_2, N_3. Всѣ четыре данныя плоскости составятъ тетраэдръ, описанный около поверхности, а точки ихъ прикосновенія M_0, M_1, M_2, M_3 будутъ вершинами другого тетраэдра, вписаннаго въ поверхность.

На основаніи предыдущаго три плоскости $N_0M_1N_1$, $N_0M_2N_2$ и $N_0M_3N_3$ проходятъ черезъ одну прямую N_0P_0. Слѣдовательно, эта послѣдняя прямая пересѣкается съ каждою изъ прямыхъ N_1M_1, N_2M_2, N_3M_3,

лежащихъ въ этихъ плоскостяхъ. Въ то же время она пересѣкается съ прямою N_0M_0 въ точкѣ N_0.

Итакъ, прямая N_0P_0 пересѣкается со всѣми четырьмя прямыми, соединяющими вершины описаннаго тетраэдра съ точками прикосновенія его противоположныхъ граней.

Предыдущее предложеніе можетъ быть примѣнено къ каждому изъ тригранныхъ угловъ, образуемыхъ четырьмя разсматриваемыми касательными плоскостями. Вслѣдствіе этого заключаемъ, что, кромѣ прямой N_0P_0, должны существовать еще три различныя прямыя, пересѣкающіяся съ каждою изъ прямыхъ N_0M_0, N_1M_1, N_2M_2, N_3M_3.

Послѣднія прямыя можно поэтому разсматривать, какъ образующія нѣкоторой линейчатой поверхности второго порядка.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее предложеніе.

Прямыя линіи, соединяющія вершины тетраэдра, описаннаго около поверхности второго порядка съ точками прикосновенія противоположныхъ граней, суть образующія одной и той же линейчатой поверхности второго порядка.

686. Два разсматриваемые тетраэдра, описанный около поверхности второго порядка и вписанный въ нее, представляютъ взаимно-полярныя фигуры относительно этой поверхности. Поэтому изъ предыдущаго предложенія по способу взаимныхъ поляръ выводимъ еще слѣдующее.

Прямыя линіи, по которымъ грани тетраэдра, вписаннаго въ поверхность второго порядка, пересѣкаются съ касательными плоскостями въ противоположныхъ вершинахъ, суть образующія одной и той же линейчатой поверхности второго порядка.

Сочиненія того-же автора.

1. О таблицахъ смертности. Опытъ теоретическаго изслѣдованія о законахъ смертности и составленія таблицъ смертности для Россіи. Москва. Универс. тип. 1871,—ц. 1 р.
2. Выводъ одного общаго свойства многосторонниковъ. Москва. Универс. тип. 1873.—ц. 30 к.
3. О геометрическомъ образованіи плоскихъ кривыхъ. Харьковъ. Универс. тип. 1875,—ц. 50 к.
4. О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій. Москва. Унив. тип. 1879,—ц. 1 р. 50 к.
5. О построеніи поляръ относительно плоскихъ кривыхъ линій. Харьковъ. Универс. тип. 1880,—ц. 25 к.
6. Карлъ Георгъ Христіанъ фонъ Штаудтъ (некрологическая замѣтка). Харьковъ. Универс. тип. 1880,—ц. 10 к.
7. Объ изложеніи началъ проективной геометріи. Харьковъ. Универс. тип. 1881,—ц. 30 к.
8. Мишель Шаль (некрологическій очеркъ). Харьковъ. Универс. тип. 1881,—ц. 50 к.
9. Нѣкоторыя обобщенія въ вопросѣ о разложеніи опредѣленнаго интеграла по формулѣ, предложенной П. Л. Чебышевымъ. Харьковъ. Универс. тип. 1883,—ц. 25 к.
10. О многоугольникахъ Понселе. Харьковъ. Универс. тип. 1884,—50 к.
11. Викторъ Яковлевичъ Буняковскій (некрологическій очеркъ). Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1890,—ц. 40 к.
12. Къ вопросу о конфигураціяхъ. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1891,—ц. 20 к.
13. Гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1893.—ц. 15 к.
14. Комментарій къ статьѣ академика Имшенецкаго о розысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1894.—ц. 15 к.
15. О розысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1894,—ц. 40 к.
16. Василій Григорьевичъ Имшенецкій. Біографическій очеркъ. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1895,—ц. 60 к.

---

17. Сборникъ упражненій по Аналитической геометріи. Харьковъ. Тип. Зильберберга. 1892,—ц. 1 р. 30 к.

Складъ изданій у автора. Харьковъ. Каплуновская ул., 11.